Vectores.

Un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un conjunto en el que se puede definir un operación interna, que llamaremos suma y denotaremos por "+", que verifica las siguientes propiedades:

1. $u+v \in V$, para todo $u, v \in V$.
2. $u+v = v+u$.
3. $u+(v+w) = (u+v)+w$
4. Existe $0 \in V$ tal que $u+0 = 0+u = u$.
5. Existe $-u \in V$ tal que $u+(-u) = u-u = 0$.

Además se puede definir una operación externa, que llamaremos producto por escalares, que verifica:

6. $\lambda u \in V$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $u \in V$.
7. $1u = u$ (1 es el elemento unidad de $\mathbb{K}$).
8. $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu v$.
9. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$.
10. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$.

$\mathbb{R}^3$, con las operaciones conocidas

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \quad \text{y} \quad \lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3),$$

es un espacio vectorial.
Se llama combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$ vectores y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ escalares, al vector $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. En este caso se dice que v es combinación lineal o linealmente dependiente de los vectores $v_1, \ldots, v_n$.
Un conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_n$ es linealmente independiente si ninguno de ellos es combinación lineal del resto.
Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. Un conjunto $v_1, \ldots, v_n$ de vectores de $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente.
2. Si $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$, entonces $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
3. El determinante de la matriz formada por los vectores (puestos por columnas o por filas), es distinto de cero.

Un subconjunto U de un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, es un subespacio vectorial de V, si a su vez, es un espacio vectorial con las operaciones definidas en V. Esta afirmación es equivalente a la siguiente: si $u, v \in U$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, entonces $\lambda u + \mu v \in U$.
Un conjunto de vectores $v_1, \ldots, v_n \in V$ es un sistema generador del espacio vectorial V, si cualquier otro vector de V se puede expresar como combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$. Una base de V es un sistema generador linealmente independiente. Un espacio vectorial no tiene una única base, pero todas las bases tienen el mismo número de elementos. A dicho número se le llama dimensión del espacio vectorial.

Escribiremos lo que sigue en $\mathbb{R}^3$, se haría de la misma forma en cualquier otra dimensión.

Producto escalar.

Dados dos vectores $u = (u_1, u_1, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ se define el producto escalar de u y v como el escalar

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Se define el módulo de un vector como $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
Se verifican las propiedades siguientes:

1. $u \cdot v = v \cdot u$.
2. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$.
3. $\lambda(u \cdot v) = (\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v)$.
4. $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos(u, v)$, donde (u, v) es el ángulo que forman u y v.

Dos vectores son ortogonales si forman un ángulo de 90^o; si además tienen módulo 1 (son unitarios), se llaman ortonormales.
Dados dos puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, el vector que los une tiene por coordenadas $AB = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$. La distancia entre A y B, es precisamente el módulo del vector que los une

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Producto vectorial.
Se define el producto vectorial de dos vectores como el vector

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

El producto vectorial verifica las siguientes propiedades:

1. $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen}(u, v)$ (este valor es, precisamente, el área del paralelogramo que determinan u y v).
2. $u \times v = -v \times u$.
3. Si u y v tienen la misma dirección, entonces $u \times v = 0$.
4. $\lambda u \times v = u \times \lambda v = \lambda(u \times v)$.
5. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.

Producto mixto.
Se define el producto mixto de tres vectores u, v y w como:

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

El producto mixto verifica las propiedades siguientes:

1. $u \cdot (v \times w) = w \cdot (u \times v) = v \cdot (w \times u) = -u \cdot (w \times v) = -w \cdot (v \times u)$.
2. $u \cdot (v \times w) \neq 0$ si, y sólo si los tres vectores son linealmente independientes.
3. $\lambda u \cdot (v \times w) = u \cdot (\lambda v \times w) = u \cdot (v \times \lambda w)$.
4. $(u + z) \cdot (v \times w) = u \cdot (v \times w) + z \cdot (v \times w)$ y análogamente para los otros dos vectores.
5. $|u \cdot (v \times w)|$ representa el volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores u, v y w.