



Funciones de varias variables

113. Calcule las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}(a) f(x, y) &= x^4 + y^4 - 4x^2y^2; & (b) f(x, y) &= \ln(x^2 + y^2); \\ (c) f(x, y) &= \frac{1}{y} \cos x^2, (y \neq 0); & (d) f(x, y) &= \tan\left(\frac{x^2}{y}\right), (y \neq 0); \\ (e) f(x, y) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), (x \neq 0); & (f) f(x, y) &= \arctan\frac{x+y}{1-xy}, (xy \neq 1);\end{aligned}$$

Estudie qué pasa con las derivadas parciales mixtas de segundo orden.

114. Calcule las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x^2 \tan \frac{y^2}{x^2+y^2}$; $(x, y) \neq (0, 0)$ y compruebe la igualdad siguiente:

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2f(x, y).$$

115. Calcule las derivadas parciales de la función $f(x, y) = x \cos(3y) - y^2 \sin x$.

116. Halle las derivadas parciales de las funciones siguientes:

$$\begin{aligned}(a) f(x, y) &= x^2 + y^2 \sin(xy); & (b) f(x, y) &= e^x \cos y; \\ (c) f(x, y, z) &= x^2y^3z^4; & (d) f(x, y, z) &= x^2 - y^2 + 2z^2;\end{aligned}$$

117. Calcule los extremos relativos de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}(a) f(x, y) &= ye^x - e^y; & (b) f(x, y) &= (x+y)(xy+1); \\ (c) f(x, y) &= x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2; & (d) f(x, y) &= xy + \frac{1}{x} + \frac{a}{y}.\end{aligned}$$

118. Estudie los extremos de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}a) f(x, y) &= x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y. \\ b) f(x, y) &= \sin x + \sin y + \cos(x+y), \quad 0 < x < 2\pi; \quad 0 < y < 2\pi. \\ c) f(x, y, z) &= (y+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}\end{aligned}$$

119. Calcule la distancia mínima del punto $(0, 2)$ a la parábola de ecuación $x^2 = 4y$.

120. El material para elaborar la tapa y la base de una caja rectangular cuesta 3 euros por dm^2 y el material de los laterales 2 euros por dm^2 . ¿Cuáles son las dimensiones de la caja más barata que tenga 1 dm^3 de volumen?