Funciones de varias variables.

Una función $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de varias variables, asigna a un punto de $\mathbb{R}^n$ otro punto de $\mathbb{R}^m$:

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

donde $(f_1, \dots, f_m)$ son funciones $f_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ reales de variable vectorial.

Fundamentalmente nos referiremos a funciones $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ reales de variable vectorial.

Derivada según un vector. Derivadas parciales.

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, se llama derivada de f en el punto $a \in \mathbb{R}^n$, según el vector $v \in \mathbb{R}$ al siguiente límite, si existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h} = D_v f(a).$$

Si $\|v\| = 1$, se le llama derivada direccional.

Cuando se trata de los vectores i, j k de la base canónica, le llamamos derivadas parciales

$$Dif(a) = D_x f(a) = \frac{\partial}{dx} f(a), \quad Djf(a) = D_y f(a) = \frac{\partial}{dy} f(a), ; \; ; \; Dkf(a) = D_z f(a) = \frac{\partial}{dz} f(a)$$

Calcular derivadas parciales es muy sencillo y soloconsiste en derivar con respecto a la variable en cuestión, suponiendo que el resto de variables son constantes.

Se llama vector gradiente de f en un punto a al vector

$$\bigtriangledown f(a) = (D_x f(a), D_y f(a), D_z f(a))$$

Si $\|v\| = 1$ y f tiene derivadas parciales continuas en a, entonces la derivada direccional es

$$D_v f(a) = \bigtriangledown f(a).v$$

Calculo de extremos

Una función f tiene en a un punto de máximo relativo (resp. mínimo) si existe un entorno U de a tal que para todo $x \in U$, $x \neq a$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).

Un punto a es un punto crítico (0 estacionario) para una función f si $D_1 f(a) = 0, \dots D_n f(a) = 0$.

1. Si a es un punto de extremo para f, entonces a es un punto crítico para f.
2. Si $n = 2$, consideremos
$$\Delta f(a) = \begin{vmatrix} D_{11} f(a) & D_{12} f(a) \\ D_{21} f(a) & D_{22} f(a) \end{vmatrix}$$
   Entonces:
   a) Si $\Delta f(a) > 0$
      1) Si $D_{11} f(a) > 0$, entonces a es un punto de mínimo.

2) Si $D_{11}f(a) < 0$, entonces a es un punto de máximo.

b) Si $\Delta f(a) < 0$ no hay extremo en a (punto de ensilladura).

c) Si $\Delta f(a) = 0$ no se puede asegurar nada.

3. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto,$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_1 : A \longrightarrow \mathbb{R}, \dots, g_m : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones que admiten derivadas parciales de primer orden continuas en A. Supongamos que el rango de matriz

$$\begin{pmatrix} D_1g_1(x) & \dots & D_mg_1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1g_m(x) & \dots & D_mg_m(x) \end{pmatrix}$$

es máximo, es decir m, en todo punto x verificando $g_i(x) = 0$, con $i = 1, \dots, m$. Entonces si x_0 es un punto extremo de f, existen m números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que x_0 es un punto crítico de la función

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_m g_m(x)$$