



Cálculo integral

77. Calcule las integrales siguientes y compruebe el resultado por derivación:

$$\begin{array}{lll}
 \int \sqrt[3]{x} dx; & \int \frac{1}{x^k} dx; & \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx; \\
 \int (x^2 - 1)(x + 1) dx; & \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx; & \int \sqrt[3]{x^4} (x^2 - 1)^3 dx; \\
 \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1} dx; & \int \frac{\sqrt{x}(x^2 + 1)}{x^{\frac{5}{3}}} dx; & \int \sqrt[3]{x^5} x^{-\frac{4}{3}} (x^3 - 1) dx; \\
 \int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}} dx & \int x\sqrt{9 - x^2} dx; & \int \sin^2 x \cos x dx
 \end{array}$$

78. Calcule las integrales siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 \int x e^x dx; & \int x^2 \ln x dx; & \int x \sqrt{1 + x} dx; \\
 \int x^2 \sin x dx; & \int x^3 e^{2x} dx; & \int x \ln x dx; \\
 \int \sqrt{(9 + x^2)^3} dx; & \int \sin(\ln x) dx; & \int x \arcsin(x^2) dx; \\
 \int \sqrt{1 - x^2} dx; & \int x^4 \sin x dx; & \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\sin x) dx; \\
 \int_0^{\pi} (3x^2 - 4) \cos x dx; & \int_0^1 \arccos x dx; & \int_0^1 \frac{\arctan x}{1 + x} dx;
 \end{array}$$

79. Calcule las integrales siguientes:

$$\begin{array}{lll}
 \int x \sqrt{x + 2} dx; & \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} dx; & \int \frac{dx}{x \sqrt{9 + 4x^2}}; \\
 \int x \sin(x^2) dx; & \int_0^{a^2} x(a^4 + x^4)^{-1} dx; & \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx; \\
 \int x^2 \sqrt{1 - x} dx; & \int \frac{-x}{(x + 1) - \sqrt{x + 1}} dx; & \int x(x^2 + 1)^3 dx; \\
 \int x \sqrt{x - 3} dx; & \int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})^2} dx; & \int (x - 1) \sqrt{2 - x} dx; \\
 \int e^{-2x} dx; & \int (x^2 - 1) 2^{x^3 - 3x + 1} dx; & \int \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} dx; \\
 \int x e^{ax^2} dx; & \int e^x \sqrt{1 - e^x} dx; & \int \frac{5 - e^x}{e^{2x}} dx; \\
 \int (3 - x) e^{(x-3)^2} dx; & \int \frac{x}{x^2 + 1} dx; & \int \frac{\ln x}{2x} dx; \\
 \int \frac{(1 + \ln x)^2}{x} dx; & \int x 5^{x^2} dx; & \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx;
 \end{array}$$

80. Calcule las integrales racionales siguientes :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{1}{x^2 - 4} dx; & \int \frac{x + 1}{x^3 + x^2 - 6x} dx; \\ \int \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx; & \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx; \\ \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx; & \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx; \\ \int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx; & \int \frac{x^3 + x^2 - 5x + 15}{(x^2 + 5)(x^2 + 2x + 3)} dx; \\ \int \frac{2x^3 + x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2} dx; & \int \frac{1}{e^{2x} - 3e^x} dx; \\ \int \frac{\sen x}{\cos x(1 + \cos^2 x)} dx; & \int \frac{(2 + \tan^2 \theta) \sec^2 \theta}{1 + \tan^3 \theta} d\theta; \end{array}$$

81. Calcule las siguientes integrales

$$\begin{array}{lll} \int \cos^5 x dx; & \int \sen^2 x \cos^3 x dx; & \int \sen^3 3x \cos^5 3x dx; \\ \int \cos^3 \frac{x}{3} dx; & \int \sen^4 x dx; & \int \sen^2 x \cos^2 x dx; \\ \int \frac{dx}{1 + \sen x - \cos x}; & \int \sec x dx; & \int \frac{dx}{5 + 4 \sen x}; \\ \int \frac{dx}{3 - 2 \cos x}; & \int \frac{dx}{2 + \cos x}; & \int \frac{dx}{1 - 2 \sen x}; \\ \int \frac{dx}{1 + \sen x + \cos x}; & \int \frac{\sen x}{1 + \sen^2 x} dx; & \int \frac{dx}{2 - \cos x}; \end{array}$$

$$82. \text{ Calcule } \int_1^6 f(x) dx \text{ siendo } f \text{ la función } f(x) \begin{cases} \frac{12}{x} & \text{si } x > 6 \\ x^2 - 34 & \text{si } 3 \leq x \leq 6 \\ -25 & \text{si } x < 3 \end{cases} \quad ; \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sen x| dx.$$

83. Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt; & G(x) = \int_0^x t^2 dt; & H(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{3 + t} dt; \\ L(x) = \int_{-3}^x |t + 2| dt; & M(x) = \int_2^{x^3} \frac{e^t}{t^2 + 1} dt; & N(x) = \int_x^\pi \sen t^2 dt; \\ J(x) = \int_0^{\sen x} (t^2 + 3t) dt; \end{array}$$

84. Halle los máximos y mínimos de las funciones f y g siguientes, sin calcular las integrales:

$$f(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt; \quad g(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2) dt$$

85. Halle el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

86. Halle el área limitada por la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, el eje X y las rectas $x = 2$ y $x = 6$.

87. Calcule el área de la región del plano comprendida entre la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje X .
88. Halle el área de la región comprendida entre las curvas que se dan en cada uno de los casos siguientes:
- $f(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 4x - 1$
 - $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.
 - $y = x^2 + 4x$ e $y = x^2 - 2x$.
 - $f(x) = x^2 - 9$ y $g(x) = x^4 - 9x^2$.
 - $y = x^2$ e $y^2 = x$.
89. Calcule el área del recinto limitado por la curva $y = \cos x$, el eje X y las rectas $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$. Idem con las rectas $x = \frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{3\pi}{4}$.
90. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje X las curvas siguientes: (a) $y = \sin x$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$; (b) Idem en $[0, 2\pi]$; (c) $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$
91. Calcule el volumen del sólido generado al girar el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2a, 0)$ y $(a, a\sqrt{3})$ alrededor del eje X .
92. Halle el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje X el recinto limitado por las curvas $y = 0$, $y = x^2 + 1$ y la recta tangente a esta última en el punto $x = 1$.
93. Halle el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $x + 1 = 0$, el recinto limitado por las curvas $y = (x + 1)^{-1}$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 0$.
94. Calcule el volumen de una esfera de radio r .
95. Halle el volumen de un sólido de base circular de radio 4, sabiendo que toda sección plana perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero.
96. Un sólido tiene por base la elipse de ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Halle su volumen sabiendo que toda sección de dicho sólido perpendicular al eje X es un triángulo isósceles de altura 6.
97. Calcule el volumen de un cono recto de altura h que tiene por base una elipse de semieje mayor a y semieje menor b .
98. Calcule la longitud del arco de la curva $f(x) = \ln x$ desde el punto $x = \sqrt{3}$ hasta el punto $x = \sqrt{8}$.
99. Calcule la longitud de la curva $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ entre los valores $x_1 = a$ y $x_2 = b$.
100. Halle la longitud del arco de la catenaria $y = \frac{1}{2}a(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ desde $x = 0$ a $x = a$.
101. Halle el área de la superficie de revolución generada en la rotación alrededor del eje X de la gráfica de la función $y^2 = 12x$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$.
102. Halle una fórmula para el área lateral de un cono cuya base tiene radio r y altura h .
103. Halle el área de la superficie generada haciendo girar la gráfica de $f(x) = \sin x$, con $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alrededor del eje X .