



## Cálculo integral

77. Calcule las integrales siguientes y compruebe el resultado por derivación:

$$\begin{array}{lll} \int \sqrt[3]{x} dx; & \int \frac{1}{x^k} dx; & \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx; \\ \int (x^2 - 1)(x + 1) dx; & \int \left( \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx; & \int \sqrt[3]{x^4}(x^2 - 1)^3 dx; \\ \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 1} dx; & \int \frac{\sqrt{x}(x^2 + 1)}{x^3} dx; & \int \sqrt[3]{x^5}x^{-\frac{4}{3}}(x^3 - 1) dx; \\ \int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}} dx & \int x\sqrt{9 - x^2} dx; & \int \sin^2 x \cos x dx \end{array}$$

78. Calcule las integrales siguientes:

$$\begin{array}{lll} \int xe^x dx; & \int x^2 \ln x dx; & \int x\sqrt{1+x} dx; \\ \int x^2 \sin x dx; & \int x^3 e^{2x} dx; & \int x \ln x dx; \\ \int \sqrt{(9+x^2)^3} dx; & \int \sin(\ln x) dx; & \int x \arcsin(x^2) dx; \\ \int \sqrt{1-x^2} dx; & \int x^4 \sin x dx; & \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \ln(\sin x) dx; \\ \int_0^{\pi} (3x^2 - 4) \cos x dx; & \int_0^1 \arccos x dx; & \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx; \end{array}$$

79. Calcule las integrales siguientes:

$$\begin{array}{lll} \int x\sqrt{x+2} dx; & \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x-1)^2}} dx; & \int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}; \\ \int x \sin(x^2) dx; & \int_0^{a^2} x(a^4 + x^4)^{-1} dx; & \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx; \\ \int x^2 \sqrt{1-x} dx; & \int \frac{-x}{(x+1)-\sqrt{x+1}} dx; & \int x(x^2 + 1)^3 dx; \\ \int x\sqrt{x-3} dx; & \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx; & \int (x-1)\sqrt{2-x} dx; \\ \int e^{-2x} dx; & \int (x^2 - 1)2^{x^3 - 3x + 1} dx; & \int \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx; \\ \int xe^{ax^2} dx; & \int e^x \sqrt{1-e^x} dx; & \int \frac{5-e^x}{e^{2x}} dx; \\ \int (3-x)e^{(x-3)^2} dx; & \int \frac{x}{x^2 + 1} dx; & \int \frac{\ln x}{2x} dx; \\ \int \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx; & \int x^{5x^2} dx; & \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx; \end{array}$$

80. Calcule las integrales racionales siguientes :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{1}{x^2 - 4} dx; & \int \frac{x + 1}{x^3 + x^2 - 6x} dx; \\ \int \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx; & \int \frac{x^4 - x^3 - x - 1}{x^3 - x^2} dx; \\ \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx; & \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx; \\ \int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^3 - 2x^2 + 3x} dx; & \int \frac{x^3 + x^2 - 5x + 15}{(x^2 + 5)(x^2 + 2x + 3)} dx; \\ \int \frac{2x^3 + x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2} dx; & \int \frac{1}{e^{2x} - 3e^x} dx; \\ \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(1 + \cos^2 x)} dx; & \int \frac{(2 + \tan^2 \theta) \sec^2 \theta}{1 + \tan^3 \theta} d\theta; \end{array}$$

81. Calcule las siguientes integrales

$$\begin{array}{lll} \int \cos^5 x dx; & \int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x dx; & \int \operatorname{sen}^3 3x \cos^5 3x dx; \\ \int \cos^3 \frac{x}{3} dx; & \int \operatorname{sen}^4 x dx; & \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx; \\ \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x - \cos x}; & \int \sec x dx; & \int \frac{dx}{5 + 4 \operatorname{sen} x}; \\ \int \frac{dx}{3 - 2 \cos x}; & \int \frac{dx}{2 + \cos x}; & \int \frac{dx}{1 - 2 \operatorname{sen} x}; \\ \int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x + \cos x}; & \int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx; & \int \frac{dx}{2 - \cos x}; \end{array}$$

82. Calcule  $\int_1^6 f(x) dx$  siendo  $f$  la función  $f(x) \begin{cases} \frac{12}{x} & \text{si } x > 6 \\ x^2 - 34 & \text{si } 3 \leq x \leq 6 \\ -25 & \text{si } x < 3 \end{cases}$ ;  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\operatorname{sen} x| dx$ .

83. Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{lll} F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt; & G(x) = \int_0^x t^2 dt; & H(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{3+t} dt; \\ L(x) = \int_{-3}^x |t+2| dt; & M(x) = \int_2^{x^3} \frac{e^t}{t^2+1} dt; & N(x) = \int_x^\pi \operatorname{sen} t^2 dt; \\ J(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} (t^2 + 3t) dt; & & \end{array}$$

84. Halle los máximos y mínimos de las funciones  $f$  y  $g$  siguientes, sin calcular las integrales:

$$f(x) = \int_0^x te^{-t^2} dt; \quad g(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2) dt$$

85. Halle el área limitada por la curva  $y = x^2$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = 1$  y  $x = 3$ .

86. Halle el área limitada por la parábola  $y = x^2 - 7x + 6$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = 2$  y  $x = 6$ .

87. Calcule el área de la región del plano comprendida entre la curva  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$  y el eje  $X$ .
88. Halle el área de la región comprendida entre las curvas que se dan en cada uno de los casos siguientes:
- $f(x) = x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x - 1$  y  $g(x) = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 4x - 1$
  - $f(x) = 6x - x^2$  y  $g(x) = x^2 - 2x$ .
  - $y = x^2 + 4x$  e  $y = x^2 - 2x$ .
  - $f(x) = x^2 - 9$  y  $g(x) = x^4 - 9x^2$ .
  - $y = x^2$  e  $y^2 = x$ .
89. Calcule el área del recinto limitado por la curva  $y = \cos x$ , el eje  $X$  y las rectas  $x = -\frac{\pi}{2}$  y  $x = \frac{\pi}{2}$ . Idem con las rectas  $x = \frac{\pi}{4}$  y  $x = \frac{3\pi}{4}$ .
90. Calcule el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje  $X$  las curvas siguientes:  
 (a)  $y = \sin x$  en  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ; (b) Idem en  $[0, 2\pi]$ ; (c)  $y = x^2$  e  $y = \sqrt{x}$
91. Calcule el volumen del sólido generado al girar el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(2a, 0)$  y  $(a, a\sqrt{3})$  alrededor del eje  $X$ .
92. Halle el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje  $X$  el recinto limitado por las curvas  $y = 0$ ,  $y = x^2 + 1$  y la recta tangente a esta última en el punto  $x = 1$ .
93. Halle el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta  $x + 1 = 0$ , el recinto limitado por las curvas  $y = (x + 1)^{-1}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = 0$ .
94. Calcule el volumen de una esfera de radio  $r$ .
95. Halle el volumen de un sólido de base circular de radio 4, sabiendo que toda sección plana perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero.
96. Un sólido tiene por base la elipse de ecuación  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . Halle su volumen sabiendo que toda sección de dicho sólido perpendicular al eje  $X$  es un triángulo isósceles de altura 6.
97. Calcule el volumen de un cono recto de altura  $h$  que tiene por base una elipse de semieje mayor  $a$  y semieje menor  $b$ .
98. Calcule la longitud del arco de la curva  $f(x) = \ln x$  desde el punto  $x = \sqrt{3}$  hasta el punto  $x = \sqrt{8}$ .
99. Calcule la longitud de la curva  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  entre los valores  $x_1 = a$  y  $x_2 = b$ .
100. Halle la longitud del arco de la catenaria  $y = \frac{1}{2}a(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$  desde  $x = 0$  a  $x = a$ .
101. Halle el área de la superficie de revolución generada en la rotación alrededor del eje  $X$  de la gráfica de la función  $y^2 = 12x$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 3$ .
102. Halle una fórmula para el área lateral de un cono cuya base tiene radio  $r$  y altura  $h$ .
103. Halle el área de la superficie generada haciendo girar la gráfica de  $f(x) = \sin x$ , con  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , alrededor del eje  $X$ .