Potencias, logaritmos y números complejos

(Recordando la infancia y la adolescencia (II))

26. Exprese con *notación científica*:

    a) La distancia media de Plutón al Sol: Cinco billones novecientos diez mil millones de km.

    b) La masa del electrón 0'00000000000000000000000000000009108.

    c) Un trillón.

    d) La velocidad de la luz.

    e) Un año luz.

    f) La masa de la tierra 5970000000000000000000000000000000000000.

27. Realice las siguientes operaciones:

$$(a) 2\cdot 10^{-5}\cdot 5'5\cdot 10^{18},\quad (b) 34'57\cdot 10^{-29}\cdot 16\cdot 10^{24} : 1'2\cdot 10^{12}$$
$$(c)(3'86\cdot 10^{12}-2'86\cdot 10^{12})\cdot 1'454\cdot 10^{-15} : 2'12\cdot 10^{-12}$$

28. Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$(a) 2^{3x-1}=32,\quad (b) 3^{\frac{x}{2}}=\sqrt[4]{27},\quad (c) 5^{x^2-x-2}=1,\quad (d) 2^{\frac{x-1}{x}}=16,\quad (e) 2^{2x-1}=4^{2x+6}$$
$$(f) 3^{2x}+5\cdot 3^{x-1}=96,\quad (g) 5^{x+3}+4\cdot 5^{2x+5}=25,\quad (h) 5^{2x-7}+20=5^{x-2}$$
$$(i)\begin{cases}2^2=\frac{32}{2^y}\\ 5^x=5^{y-1}\end{cases}\qquad (j)\begin{cases}3^x+3^y=12\\ 3^{x+y}=27\end{cases}$$

29. Utilice la definición de logaritmo para encontrar el valor de la incógnita en los siguientes casos:

$$\log_2 a=7,\quad \log_3 x=243,\quad \log_x e=1,\quad \log_x\sqrt{2}=\frac{1}{2},\quad \log_x\frac{1}{49}=-2$$

30. Exprese los logaritmos de X, Y Z en función de los logaritmos de a, b y c:

$$X=\frac{ab^2}{c^3},\quad Y=\sqrt{\frac{a^3b}{c}},\quad Z=\sqrt[5]{\frac{ab^3}{c^4}}$$

31. Resuelva las siguientes ecuaciones:

$$(a)\ln 3+\ln(x+1)=1,\quad (b)\log_2 x^2-\log_2 x^3=-2,\quad (c)\log_3(x+1)+\log_3(2x+5)=3$$
$$(d)\ln(x^2-1)-\ln(x+1)=1,\quad (e)\ln(x+1)-\ln(2x+5)=e,$$
$$(f)\log_5 x+2\log_5(x+4)=2+\log_5 x^4,\quad (g)\begin{cases}x+y=6\\ \log x+\log y=\log 8\end{cases}$$
$$(h)\begin{cases}\ln x+\ln y=\ln 3\\ x^2+y^2=10\end{cases},(i)\begin{cases}\log x+\log y=-4\\ 3\log x-2\log y=-7\end{cases},(j)\begin{cases}x^2-y^2=1000\\ (x-y)^{\log(x+y)}=100\end{cases}$$

32. Sean $z = 2 - 3\mathbf{i}$, $w = -1 + \mathbf{i}$, $v = -1 - \mathbf{i}$; realiza las siguientes operaciones:

$$z - 2w,\ \ z - \bar{z},\ \ z(w+v),\ \ z\bar{w},\ \ \frac{zw}{\mathbf{i}},\ \ z : w,\ \ \frac{1}{z},\ \ w^{-1},\ \ ww^{-1},\ \ w^2,\ \ w^3,\ \ w^4,$$

$$\mathbf{i}^{3423},\ \ (\mathbf{i}^5 + \mathbf{i}^{-12})^3,\ \ \frac{(1+\mathbf{i})^2}{4+\mathbf{i}}$$

33. Determine el valor de x para que el producto $(2 - 5\mathbf{i})(3 + x\mathbf{i})$ sea:

    a) un número real;

    b) un número imaginario puro.

34. Dados los números complejos $2 - m\mathbf{i}$ y $3 - n\mathbf{i}$, determine el valor de m y n para que su producto sea $8 + 4\mathbf{i}$.

35. Halle x para que el cociente $\frac{x+3\mathbf{i}}{3+2\mathbf{i}}$, sea imaginario puro.

36. Encuentre un número complejo cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

37. Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$.

38. Calcule y represente gráficamente los resultados:

$$(1+\mathbf{i})^5,\ \ (2+2\sqrt{3}\mathbf{i})^2,\ \ (1+\mathbf{i})^2,\ \ (-2+2\sqrt{3}\mathbf{i})^6,\ \ \frac{\mathbf{i}^7 - \mathbf{i}^{-7}}{2\mathbf{i}},\ \ \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\mathbf{i}}{2}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{-1},\ \ \sqrt[4]{1+\mathbf{i}},\ \ \sqrt{-36},\ \ \sqrt[3]{-27},\ \ \sqrt[6]{729\mathbf{i}},\ \ \sqrt[4]{16(\cos\pi + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\pi)}$$

39. Sea $z, w \in \mathbb{C}$ demuestre que:

    a) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

    b) $\overline{zw} = \overline{zw}$.

    c) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

    d) $z + \overline{z} = 2Re(z)$.

    e) $(z - \overline{z})/\mathbf{i} = 2Im(z)$.

40. Resuelva $(a + \mathbf{i})(b - 3\mathbf{i}) = 7 - 11\mathbf{i}$.

41. Encuentre un número complejo que sumándolo con $\frac{1}{2}$ dé como resultado otro número complejo de módulo $\sqrt{3}$ y argumento $\frac{\pi}{3}$.

42. La suma de dos números complejos es 6, el módulo del primero es $\sqrt{13}$ y el del segundo es 5. Calcule dichos números, su producto y su cociente.

43. Calcule el valor de a para que el módulo del cociente $\frac{a+2\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}$ sea 2.

44. Factorice los siguientes polinomios en $\mathbb{R}$ y después resuélvalos en $\mathbb{C}$:

$$x^8 - 1 = 0,\ \ x^2 - 2x + 2 = 0,\ \ z^3 + 1 = 0,\ \ z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$$

45. Calcule los números complejos cuyo cubo coincide con su conjugado.

46. Construya una representación de todos los números complejos z que satisfagan cada una de las relaciones siguientes:

$$(a)|z| < 1, \quad (b) z + \bar{z} = 1 \quad (c) z - \bar{z} = \mathbf{i}$$

$$(d)|z-1| = |z+1| \quad (e)|z - \mathbf{i}| = |z + \mathbf{i}| \quad (f) z + \bar{z} = |z|^2$$

47. En cada caso determine todos los valores reales x e y que satisfacen la relación dada:

$$(a)\ x + \mathbf{i}y = |x - \mathbf{i}y|;\ (b)\ x + \mathbf{i}y = (x - \mathbf{i}y)^2;\ (c)\ \sum_{k=0}^{100} \mathbf{i}^k = x + \mathbf{i}y$$

48. Si θ es un número real, $-\pi < \theta \leq \pi$ y n es entero, demuestre (fórmula de *Moivre*) que

$$(\cos\theta + \mathbf{i}\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + \mathbf{i}\operatorname{sen} n\theta$$

Demuestre, utilizando la fórmula anterior para $n = 3$, las dos identidades trigonométricas siguientes:

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta, \quad \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta.$$

49. Exprese los siguientes números complejos en forma binómica:

$$e^{\frac{\pi}{2}\mathbf{i}} \quad 2e^{-\frac{\pi}{2}\mathbf{i}}, \quad 3e^{\pi\mathbf{i}}, \quad e^{\frac{\pi}{4}\mathbf{i}} - e^{-\frac{\pi}{4}\mathbf{i}}, \quad \frac{1 - e^{\frac{\pi}{2}\mathbf{i}}}{1 + e^{\frac{\pi}{2}\mathbf{i}}}$$

50. Si $\theta \in \mathbb{R}$, demuestre que:

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}.$$

Utilice las dos fórmulas anteriores para demostrar:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

51. En cada caso, halle todos los valores de x e y que satisfacen la relación dada.

$$(a)\ x + \mathbf{i}y = xe^{\mathbf{i}y},\ (b)\ x + \mathbf{i}y = ye^{\mathbf{i}x},\ (c)\ e^{x+\mathbf{i}y} = -1,\ (d)\ \frac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}} = xe^{\mathbf{i}y}.$$

52. Calcule todos los valores de los siguientes logaritmos

$$\ln 4, \quad \ln \mathbf{i}, \quad \ln(-2 + 3\mathbf{i}).$$

53. Calcule todos los valores de las siguientes potencias

$$e^{3+(\pi/4)\mathbf{i}}, \quad (-2)^{\sqrt{2}}, \quad (1+\mathbf{i})^{2-3\mathbf{i}}$$