Prueba de control

Soluciones

Nombre:

1 Experimente con casos concretos y proponga respuestas para las siguientes preguntas. No se pide una demostración; simplemente conteste en el recuadro en cuanto, al experimentar, vea aparecer una pauta.

a) ¿Cuántos divisores enteros positivos tiene un número de la forma p^α, donde p es primo y α entero ≥ 1?

Son $\alpha + 1$ divisores.
Experimentando vemos por ejemplo que los divisores de $2^4 = 16$ son 1, 2, 4, 8 y 16. Los de $3^3 = 27$ son 1, 3, 9 y 27. No cuesta mucho ver la pauta: los divisores de p^α son 1, p, p^2, ..., $p^{\alpha-1}$, p^α y por tanto en total hay $\alpha + 1$ divisores.
Es interesante observar que la respuesta no depende del primo p, sólo del exponente α.

b) ¿Y cuántos tiene un número de la forma $p^\alpha q^\beta$, con p, q primos distintos y α, β enteros ≥ 1?

Ahora experimentar es algo más difícil y también es más difícil intuir el resultado. Sí podemos pensar, en vista de la parte anterior, que lo importante son los exponentes, así que tomamos primos fáciles $p = 2$ y $q = 3$ y vamos variando exponentes:

Los divisores de $2^2 \cdot 3 = 12$ son 1, 2, 3, 4, 6 y 12, en total 6.
Los divisores de $2^3 \cdot 3 = 24$ son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24, en total 8.
Los divisores de $2^4 \cdot 3 = 48$ son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 y 48, en total 10.
Los divisores de $2^2 \cdot 3^2 = 36$ son 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36, en total 9.

En el último ejemplo la pauta se ve mejor si separamos primero las potencias de 2 (1, 2 y 4) y las multiplicamos primero por 3 (3, 6 y 12) y luego por $3^2 = 9$ (9, 18, 36).

En general podemos contar todos los divisores poniendo primero las potencias de p, o sea $1, p, p^2, \cdots, p^{\alpha-1}, p^\alpha$, luego esos mismos multiplicados por q, o sea $q, pq, p^2q, \cdots, p^{\alpha-1}q, p^\alpha q$, luego ésos multiplicados por q^2 y así hasta multiplicarlos por q^β.

Se observa que en total son $(\alpha + 1)(\beta + 1)$ divisores.

2 En un texto sobre aritmética se ha demostrado que los enteros se pueden **dividir con resto**:

Dados dos enteros a, b con $b > 0$, existen enteros c, r tales que $a = cb + r$ y $0 \leq r < b$.

Más tarde se plantea una demostración del siguiente resultado:

Dada una fracción irreducible a/b con a, b enteros positivos, su expresión decimal es finita si y sólo si b no tiene divisores primos distintos de 2 y de 5.

La demostración comienza así:

Podemos suponer, usando la división con resto, que a es menor que b ...

¿Por qué se puede suponer eso? (No se trata de pensar en la demostración, sino de ver cómo se deduce el caso general del caso particular $a < b$.)

En el texto se resuelve el caso $a < b$ y nosotros tenemos que ver cómo "el otro caso" ($a \geq b$) se deduce de este.
Para $a \geq b$, dividiendo con resto tenemos $a = cb + r$ con $0 \leq r < b$. Entonces $\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b}$, por lo que las fracciones a/b y r/b se diferencian en un número entero (c) y por tanto tienen la misma parte decimal. Como la propiedad ya quedará demostrada en el texto para r/b (porque $r < b$) y la parte decimal es la misma, queda también demostrada para a/b.

3 En un texto se han demostrado las siguientes propiedades:

> **Propiedad A.-** *Para un entero n se verifica: n es par si, y sólo si n^2 es par.*
>
> **Propiedad B.-** *Todo número racional admite una expresión irreducible, es decir puede expresarse como r/s, donde r y s son enteros sin divisores primos comunes.*
>
> **Propiedad C.-** *Dados dos enteros a, b con $b > 0$, existen enteros c, r tales que $a = cb + r$ y $0 \leq r < b$.*

Demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ [**Complete convenientemente cada uno de los espacios punteados citando, si es necesario, las propiedades anteriores**]

"Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $\sqrt{2}$ fuese racional.

Esto significa que $(*)$: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, con a, b enteros no negativos, $b \neq 0$.

Sin pérdida de generalidad, por la propiedad B podemos suponer

que la fracción ($\frac{a}{b}$) que representa a $\sqrt{2}$ es irreducible, es decir, a y b no tienen

factores primos en común.

A continuación, elevamos al cuadrado en la igualdad $(*)$ y operando obtenemos $(**)$: $2b^2 = a^2$.

Debido a la propiedad A, de la última igualdad $(**)$ deducimos que a es

un número par, esto es $a = 2a'$, donde a' es un cierto entero.

Sustituyendo el nuevo valor de $a = 2a'$ en la igualdad $(**)$, obtenemos que $2b^2 = 4(a')^2$,

es decir $b^2 = 2(a')^2$. Por la propiedad A, esto implica que b es par.

En definitiva, llegamos a que a y b son pares, lo que termina la prueba

porque contradice la suposición de que la fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible."

$\boxed{4}$ Consideremos la suma S_n de los n primeros enteros positivos impares, con $n \geq 1$.

a) Traduzca a lenguaje matemático la frase "la suma S_n de los n primeros enteros positivos impares, con $n \geq 1$."

> Observemos: $S_1 = 1$,
> $S_2 =$ suma de los 2 primeros enteros positivos impares $= 1 + 3$,
> $S_3 =$ suma de los 3 primeros enteros positivos impares $= 1 + 3 + 5$,
> $S_4 =$ suma de los 4 primeros enteros positivos impares $= 1 + 3 + 5 + 7$,
>
> Se aprecia que para n sumandos el último es $2n - 1$, luego $S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$.
>
> También se puede escribir $S_n = \sum_{j=1}^{n} (2j - 1)$ ó $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} (2j + 1)$.

b) Conjeture una fórmula para S_n

> Haciendo las sumas de arriba vemos que van apareciendo cuadrados: $S_1 = 1$, $S_2 = 4 = 2^2$, $S_3 = 9 = 3^2$, $S_4 = 16 = 4^2$; de modo que parece razonable proponer $S_n = n^2$.

c) ¿Qué método podría utilizar para demostrar la validez de tal conjetura?

> En problemas como éstos suele funcionar el método de inducción. Veamos cómo:
>
> Sea $P(n)$ la propiedad que se afirma, es decir $S_n = n^2$; desde luego $P(1)$ se cumple y también $P(2)$ y $P(3)$, como hemos visto en el apartado (b) anterior. Además, si suponemos válida $P(n)$ podemos deucir de ella $P(n+1)$, pues
>
> $S_{n+1} = S_n +$siguiente sumando $= S_n + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$.
>
> También se pueden usar otros métodos:
>
> Por ejemplo, si se conoce que $\sum_{j=1}^{n} j = \dfrac{1}{2}\, n(n + 1)$ entonces se puede hacer
>
> $S_n = \sum_{j=1}^{n} (2j - 1) = 2 \sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} 1 = n(n + 1) - n = n^2 + n - n = n^2$
>
> O se puede usar una idea visual que aparece en la página 8 del texto "Algunas estrategias de pensamiento matemático" que se entregó en las clases iniciales.

$\boxed{5}$ Escriba las frases que actúan de contrarrecíproco de las siguientes afirmaciones, y haga un esquema lógico a través de implicaciones:

a) Sean p, q números reales positivos. Si $\sqrt{pq} \neq \frac{p+q}{2}$, entonces $p \neq q$.

> El contrarrecíproco es: Sean $p, q \in \mathbb{R}^+$. Si $p = q$, entonces $\sqrt{pq} = \dfrac{p + q}{2}$.
>
> Para el esquema a través de implicaciones podemos poner:
>
> $$\left.\begin{array}{l} \text{A} : \sqrt{pq} \neq \frac{p+p}{2} \\ \text{B} : p \neq q \end{array}\right\} \quad \text{y entonces} \quad \left.\begin{array}{l} \text{no-A} : \sqrt{pq} = \frac{p+p}{2} \\ \text{no-B} : p = q \end{array}\right\}$$
>
> Entonces la afirmación del enunciado es A $\Rightarrow$ B y su contrarrecíproco (no-B $\Rightarrow$ no-A) es el que se propone.

b) Supongamos que a, b son cantidades reales positivas. Se tiene que $a^2 < b^2$ siempre que $a < b$.

El contrarrecíproco es: Sean $a, b \in \mathbb{R}$; $a, b > 0$. Si $a^2 \geq b^2$, entonces $a \geq b$.
(O, usando el estilo del enunciado: Se tiene que $a \geq b$ siempre que $a^2 \geq b^2$.)

Para el esquema a través de implicaciones podemos poner:

$$\left.\begin{array}{l} \text{A} : a < b \\ \text{B} : a^2 < b^2 \end{array}\right\} \quad \text{y entonces} \quad \left.\begin{array}{l} \text{no-A} : a \geq b \\ \text{no-B} : a^2 \geq b^2 \end{array}\right\}$$

Entonces la afirmación del enunciado es A $\Rightarrow$ B y su contrarrecíproco (no-B $\Rightarrow$ no-A) es el que se propone.

6 Represente simbólicamente y estudie la validez de los siguientes razonamientos:

a) Pedro es estudiante o albañil
Si es albañil está en el ramo de la construcción
No está en el ramo de la construcción,
luego, Pedro es estudiante.

Simbólicamente el razonamiento podría representarse en la forma siguiente. Comenzamos por dar nombre a las proposiciones que aparecen: así, llamemos A a la afirmación «Pedro es estudiante», B a la afirmación «Pedro es albañil» y C a la afirmación «Pedro está en el ramo de la construcción». Entonces el razonamiento se escribiría en la forma siguiente:

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ B \Longrightarrow C \\ \neg C \\ \hline A \end{array}$$

donde la línea horizontal se lee "luego ...".

Debemos interpretar todo el ejercicio en la forma siguiente: conocemos la certeza de las tres primeras afirmaciones (las tres primeras líneas en el simbolismo anterior) y nos preguntamos si de todo ello se deduce lógicamente la conclusión (A). La respuesta es que sí, es decir, que el razonamiento es correcto. En efecto: la proposición $B \Longrightarrow C$ es equivalente a $\neg C \Longrightarrow \neg B$ (contrarecíproco), así, si $\neg C$ es verdadero, lo que sabemos por la tercera línea, entonces $\neg B$ es cierto (de otro modo, $\big[(\neg C \Longrightarrow \neg B) \wedge \neg C\big] \Longrightarrow \neg B$, que es un caso especial del "modus ponens"; también podríamos haber utilizado directamente el "modus tollens"). Ahora bien, si $A \vee B$ es cierto y B es falso (es decir $\neg B$ es cierto) entonces necesariamente A es cierto (incluido en la lista de tautologías como "ley de la disyunción").

b) Todos los españoles son europeos
Todos los europeos son mortales
Luego todos los españoles son mortales.

Simbólicamente el razonamiento podría representarse en la forma siguiente. Comenzamos por dar nombre a las proposiciones que aparecen: así, llamemos A a la afirmación «la persona en cuestión es española», B a la afirmación «la persona es europea» y C a «la persona es mortal». Entonces, aunque podríamos utilizar cuantificadores, no es en este caso necesario, pues lo que sigue se aplica a cualquier individuo de la raza humana:

$$\begin{array}{c} A \Longrightarrow B \\ B \Longrightarrow C \\ \hline A \Longrightarrow C \end{array}$$

El razonamiento es correcto, se trata tan solo de la regla de inferencia:

$$\big[(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)\big] \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)$$

(lo que hemos llamado "modus barbara"), puesto que las dos primeras afirmaciones confirman la verdad de la hipótesis en la implicación anterior ($\big[(A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)\big]$) obtenemos la verdad de la tesis ($A \Longrightarrow C$).

$\boxed{\mathbf{7}}$ A la gente de mi ciudad le gusta mucho ir de tapas. Si $d \in D$ es un día del año, $m \in M$ una persona de mi ciudad y $p \in T$ es una tapa de las que se ofrecen, denotemos por $C(m,d,p)$ la afirmación: «la persona m come la tapa p en el día d». Represente simbólicamente las afirmaciones siguientes y niegue cada una de ellas, tanto en lenguaje simbólico como en lenguaje habitual.

- Hubo un día que todos comieron la misma tapa.

Simbólicamente la afirmación se escribe

$$\exists d \in D\, \exists p \in T\, \forall m \in M\ C(m,d,p)$$

Entonces la negación es:

$$\forall d \in D\, \forall p \in T\, \exists m \in M\ \neg C(m,d,p)$$

que podremos enunciar como: *Cada día y cada tapa hay alguna persona que no se come esa tapa en ese día.*

- Cada día hay una tapa que todos comen.

Simbólicamente la afirmación se escribe

$$\forall d \in D\, \exists p \in T\, \forall m \in M\ C(m,d,p)$$

Entonces la negación es:

$$\exists d \in D\, \forall p \in T\, \exists m \in M\ \neg C(m,d,p)$$

que podremos enunciar como: *Hay un día en el que cada tapa hay una persona que no se la come.*

- Cada tapa se la come alguien algún día.

Simbólicamente la afirmación se escribe

$$\forall p \in T\, \exists d \in D\, \exists m \in M\ C(m,d,p)$$

Entonces la negación es:

$$\exists p \in T\, \forall d \in D\, \forall m \in M\ \neg C(m,d,p)$$

que podremos enunciar como: *Hay una tapa que nadie come nunca*.

- Hay una tapa preferida que todos comen cada día.

Simbólicamente la afirmación se escribe

$$\exists p \in T\, \forall d \in D\, \forall m \in M\ C(m,d,p)$$

Entonces la negación es:

$$\forall p \in T\, \exists d \in D\, \exists m \in M\ \neg C(m,d,p)$$

que podremos enunciar como: *Cada tapa se queda sin tocar en algún día* (es decir «nadie se la come»).

- Hubo un día en que nadie comió tapas.

Simbólicamente la afirmación se escribe

$$\exists d \in D\, \forall p \in T\, \forall m \in M\ \neg C(m,d,p)$$

Entonces la negación es:

$$\forall d \in D\, \exists p \in T\, \exists m \in M\ C(m,d,p)$$

que podremos enunciar como: *Cada día hay alguien que come alguna tapa*.

- Hubo un día en que alguien comió una tapa.

Simbólicamente la afirmación se escribe

$$\exists d \in D\, \exists p \in T\, \exists m \in M\ C(m,d,p)$$

Entonces la negación es:

$$\forall d \in D\, \forall p \in T\, \forall m \in M\ \neg C(m,d,p)$$

que podremos enunciar como: *Nadie come nunca ninguna tapa*.