

Laura Ortega Pagán

1.23 Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$. Demuestre que el conjunto $\{x \in X \mid d(a, x) > r\}$ es abierto.

$$A = \{x \in X \mid d(a, x) > r\}$$

$$\text{Tomamos } x_0 \in A : d(a, x_0) = r_0 > r$$

$$\text{Sea } \delta > 0 \text{ tal que } \delta < r_0 - r \Rightarrow B(x_0, \delta) \subset A$$

$$\text{Sea } y \in B(x_0, \delta) \Rightarrow d(x_0, y) < \delta$$

$$d(a, x_0) \leq d(a, y) + d(y, x_0)$$

$$d(x_0, y) < \delta$$

$$d(a, y) \geq d(a, x_0) - d(y, x_0) = r_0 - d(y, x_0) > r_0 - \delta > r$$

$\delta < r_0 - r$