

1.25

Sea $(\ell^{\infty}, d_{\infty})$ un E. M

$A = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ es cerrado.

Demo:

$A^c = \{(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^{\infty} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0\}$

Por las definiciones sabemos que:

$\exists \epsilon > 0 \ \forall \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0$

$|x_n| < \epsilon \ \vee \ |y_{n_0}| > 2\epsilon$

$\left. \begin{matrix} y_{n_0} > 2\epsilon \\ \epsilon > 0 > x_{n_0} > \epsilon \end{matrix} \right\} \Rightarrow y_{n_0} - x_{n_0} > \epsilon$

$\left. \begin{matrix} 0 \\ y_{n_0} < -2\epsilon \\ -\epsilon < x_{n_0} < \epsilon \end{matrix} \right\} \Rightarrow y_{n_0} - x_{n_0} < -\epsilon$

$|y_{n_0} - x_{n_0}| > \epsilon$

También están las sucesiones acotadas que no son convergentes. Debes esperarlas mejor.

Esto tiene que explicarlo mejor y por separado

Sea $B((y_n)_{n=1}^{\infty}, \epsilon)$ siempre existe $n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall (x_n) \in A \ |y_{n_0} - x_{n_0}| > \epsilon$

Luego A^c es un ~~intervalo~~ abierto $\Rightarrow A$ es un cerrado