Ejercicio $\boxed{1.29}$ Jesús Hernández Gil.

Sea $f:[0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ una función estrictamente creciente verificando:

(a) $f(0)=0$.

(b) si $x,y \geq 0 \Rightarrow f(x+y) \leq f(x)+f(y)$

Si (X,d) es un espacio métrico, pruebe que la aplicación $d'=f\circ d$ es decir, $d'(x,y)=f(d(x,y))$, es también una distancia sobre X

(1) $d'(x,y)=f(d(x,y))\geq 0$.

Evidentemente, puesto que sabemos que $d(x,y)$ es distancia, entonces $d(x,y) = z \geq 0$ portanto queda $f(z)$, y puesto que $f(0)=0$ y cualquier valor que tome $z \geq 0$ es mayor o igual a 0 puesto que f es estrictamente creciente, $f(z) \geq 0$.

(2) $d'(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

puesto que f es estrictamente creciente, f es inyectiva, lo que quiere decir que $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$, por tanto como por (a) $f(0)=0$, $f(d(x,y))=0 \Leftrightarrow d(x,y)=0$ y como sabemos que d es distancia, $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

(3) $d'(x,y)=d'(y,x)$

$f(d(x,y)) = f(d(y,x))$ Como habíamos dicho, f es inyectiva, y por tanto esa igualdad es cierta, si y solo si

$d(x,y)=d(y,x)$ lo cual es cierto, puesto que d es distancia.

(4) $d'(x,y) \leq d'(x,z)+d'(z,y)$

$d'(x,y) = f(d(x,y)) \leq f(d(x,z)+d(z,y)) \leq f(d(x,z))+f(d(z,y)) =$

Puesto que d es distancia y cumple la desigualdad triangular, y f es estrictamente creciente, por tanto al tomar un valor más grande es mayor.

por (b), y $d(x,z) \geq 0$ y $d(z,y) \geq 0$

$= d'(x,z)+d'(z,y)$

Como queríamos comprobar, d' es distancia sobre X