Antonio Alcalde Gaona

$\boxed{1.3.}$

$\boxed{d \text{ distancia} \rightarrow a) \text{ y } b)}$

a) Por definición de distancia.

b) $\Big[d(x,z) + d(y+z) \underbrace{=}_{\text{Simetría de la distancia}} d(x,z) + d(z,y) \underbrace{\geq}_{\text{Desigualdad Triangular de la distancia}}$

$\geq d(x,y) \Big]$

$\boxed{a) \text{ y } b) \rightarrow d \text{ distancia}}$

d será una distancia si cumple las propiedades de las distancias.

$\cdot\, d(x,y) \geq 0$

Por hipótesis: $d(x,x) \leq d(x,y) + d(x,y)$

$\xrightarrow{\boxed{d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y}} 0 \leq d(x,y) + d(x,y) \rightarrow -d\cancel{(x,y)} \leq$

$\overset{2d(x,y) \geq 0}{\Downarrow}$

$\leq \cancel{d(x,y) \rightarrow d(x,y) \geq} 0$

• $d(x,y)=0 \longleftrightarrow x=y$

Se cumple por hipótesis.

• $d(x,y)=d(y,x)$

Tomamos $z=x$:

$$d(x,y) \leq d(x,z)+d(y,z) \longrightarrow$$

$z=x$

$d(x,z)=0 \Leftrightarrow x=z$

$$d(x,y) \leq 0 + d(y,x) \longrightarrow d(x,y) \leq d(y,x)$$

Por otro lado:

Tomamos $z'=y$

$$d(y,x) \leq d(y,z')+d(x,z') \longrightarrow$$

$z'=y$

$d(y,z')=0 \Leftrightarrow y=z'$

$$\longrightarrow d(y,x) \leq 0 + d(x,y) \longrightarrow d(y,x) \leq d(x,y)$$

Por tanto tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \ominus\, d(x,y) \leq d(y,x) \\ \ominus\, d(y,x) \leq d(x,y) \end{array}\right\} \longrightarrow d(x,y)=d(y,x)$$

Propiedad ~~Anti~~simétrica de la relación de orden

Antonio Alcalde Gaona

• $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

~~d(x~~

Por hipótesis: $\left[d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \underset{\text{Simetría Apartado Anterior}}{=} d(x,z) + d(z,y) \right]$.

Por tanto d es una distancia.