TOPOLOGIA DE ESPACIOS MÉTRICOS

VERÓNICA LÓPEZ CÁNOVAS

1.4. Sea (X,d) un espacio métrico. Se definen d'_1, d'_2 y d'_3 como sigue: $d'_1(x,y) = K \cdot d(x,y)$ con $K \in \mathbb{R}^+$

$d'_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$

$d'_3(x,y) = [d(x,y)]^2$

Demuestre que d'_1 y d'_2 son distancias y que d'_3 no tiene por qué serlo.

Para demostrar que son distancias tenemos que probar que:

1. Son mayores o iguales que 1 para cualesquiera puntos en X.
2. Cumplen la condición de simetría.
3. Son cero sólo cuando $x=y$.
4. Cumplen la desigualdad anterior

→ Esto está bien para aclararte tú, pero no hace falta ponerlo

Como (X,d) es un espacio métrico, entonces $d(x,y)$ es una distancia y por tanto cumple las 4 condiciones anteriores.

En primer lugar comprobamos que d'_3 no tiene por qué ser una distancia. Veamos si cumple las 4 condiciones:

1. $d'_3(x,y) = [d(x,y)]^2$?

Como $d(x,y) \geq 0 \Rightarrow [d(x,y)]^2 \geq 0$.

2. $d'_3(x,y) = [d(x,y)]^2 \underset{\text{como } d(x,y)=d(y,x)}{=} [d(y,x)]^2 = d'_3(y,x)$

3. $d'_3(x,y) = [d(x,y)]^2 = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

ya que $d(x,y)$ cumple la condición 3.

4. $d'_3(x,y) \leq d'_3(x,z) + d'_3(z,y)$? $\Rightarrow [d(x,y)]^2 \leq [d(x,z)]^2 + [d(z,y)]^2$

Sabemos $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$\Downarrow$

$$[d(x,y)]^2 \leq [d(x,z) + d(z,y)]^2 = [d(x,z)]^2 + [d(z,y)]^2 + 2 \cdot d(x,z) \cdot d(z,y)$$

$\Rightarrow d'_3(x,y) \leq d'_3(x,z) + d'_3(z,y) + 2d(x,z)\,d(z,y)$

Por tanto si $2d(x,z)d(z,y) \neq 0$ $d'_3(x,y)$ No tiene porqé ser una distancia.

Ahora demostraremos que $d'_1(x,y) = K\cdot d(x,y)$ con $K\in\mathbb{R}^+$ es una distancia. Veamos que cumple las 4 condiciones:

1. $d'_1(x,y) = K\cdot d(x,y) \geq 0$
   Como $d(x,y)\geq 0$ y $K\in\mathbb{R}^+$, su producto no puede ser negativo
2. $d'_1(x,y) = Kd(x,y) \underset{\downarrow}{=} K\cdot d(y,x) = d'_1(y,x)$
   por simetría de $d(x,y)$.
3. $d'_1(x,y) = Kd(x,y) = 0 \Rightarrow K=0 \Leftarrow$ No es posible porque $K\in\mathbb{R}^+$
   ó
   $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$ por ser $d(x,y)$ una distancia
   ¿y si $x=y \Rightarrow d(x,y)=0 \Rightarrow Kd(x,y)=0 \Rightarrow d'_1(x,y)=0$
4. $d'_1(x,y) \leq d'_1(x,z) + d'_1(z,y)$?

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$
$$\Downarrow$$
$$K(d(x,y)) \leq K\left[d(x,z) + d(z,y)\right] = Kd(x,z) + Kd(z,y)$$
$$\Downarrow$$
$$d'_3(x,y) \leq d'_3(x,z) + d'_3(z,y).$$

Nos queda demostrar que $d'_2 = \min\{1, d(x,y)\}$

1. $d'_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ $\left.\begin{array}{l}\nearrow \text{si } d'_2(x,y) = 1 \geq 0\\ \searrow d'_2(x,y) = d(x,y) \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow d'_2(x,y) \geq 0.$
2. $d'_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = \min\{1, d(y,x)\} = d'_2(y,x)$ por la simetría de $d(x,y)$.
3. $d'_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \overset{=0}{\Leftrightarrow} d'_2(x,y) = d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$
4. $d'_2(x,y) \leq d'_2(x,z) + d'_2(z,y)$?

Veamos todas las posibilidades:

- $\left.\begin{array}{l} d(x,y)<1\\ d(x,z)<1\\ d(z,y)<1\end{array}\right\}$ $\Rightarrow \underline{d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)}$ ya que $d(x,y)$ cumple la desigualdad triangular
- $\left.\begin{array}{l} d(x,y)\geq 1\\ d(x,z)\geq 1\\ d(z,y)\geq 1\end{array}\right\}$ $\Rightarrow 1 \leq 1+1$
  $\underline{1 \leq 2}$
- $\left.\begin{array}{l} d(x,y)<1\\ d(x,z)\geq 1\\ d(z,y)<1\end{array}\right\}$ $\Rightarrow d(x,y) \leq 1 + d(z,y)$
  En el peor de los casos $d(z,y)=0$ y entonces $d(x,y)\leq 1$, lo que se cumple por la hipótesis
- $\left.\begin{array}{l} d(x,y)<1\\ d(x,z)<1\\ d(z,y)\geq 1\end{array}\right\}$ $\Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + 1$
  En el peor de los casos $d(x,z)=0$ y entonces $d(x,y) \leq 1$, lo que se cumple por hipótesis.

- $\left.\begin{array}{l} d(x,y)<1 \\ d(x,z)\geq 1 \\ d(z,y)\geq 1 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow d(x,y) \leq 1+1$
  $d(x,y) \leq 2$. y queda demostrado porque $d(x,y) < 1 \leq 2$

- $\left.\begin{array}{l} d(x,y)\geq 1 \\ d(x,z)< 1 \\ d(z,y)\geq 1 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow 1 \leq d(x,z) + 1$
  Como $d(x,z) \geq 0$, en el peor de los casos $d(x,z)=0$ y $\underline{1\leq 1}$

- $\left.\begin{array}{l} d(x,y)\geq 1 \\ d(x,z)< 1 \\ d(z,y)\geq 1 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow 1 \leq d(x,y) + 1$
  En el peor de los casos $d(z,y)=0 \Rightarrow \underline{1\leq 1}$

- $\left.\begin{array}{l} d(x,y)\geq 1 \\ d(x,z)< 1 \\ d(z,y)< 1 \end{array}\right\}$ $1 \leq d(x,z) + d(z,y)$
  Como $d(x,z)+d(z,y) \geq d(x,y)$ y $d(x,y) \geq 1$, entonces
  $\underline{d(x,z)+d(z,y) \geq 1}$

Está bien, pero lo puedes hacer también de la siguiente forma; como $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$, se cumple que

$$\rho(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \leq \min\{1, d(x,z)+d(z,y)\} \leq$$

$$\leq \min\{1, d(x,z)\} + \min\{1, d(z,y)\}$$