

1575. Topología de espacios métricos

(2º Cuatrimestre, 6 créditos ECTS. Consúltese la guía oficial en SUMA)

Profesorado	Área / Departamento	Despacho Facultad	Teléf.	e-mail	Horario de tutorías
Pedro José Herrero Piñeyro	Geometría y Top. / Matemáticas	1.19 Matem.	86888 4171	pherrero@um.es	L 16:30-19:30 M,V 9:30-11:00

El profesor participa en el Proyecto de Tutoría Electrónica

Presentación de la asignatura

Para el estudiante del Grado en Matemáticas que inicia el segundo cuatrimestre, los conceptos asociados a la topología basada en una métrica no son nuevos. Las ideas de convergencia, continuidad, abierto, ... ya se han estudiado de forma incipiente en el bachillerato, y de manera más intensa en la asignatura “Funciones de una variable real I”. Se trata ahora, pues, de introducir de forma sistemática y rigurosa los conceptos de distancia y de topología asociada a un espacio métrico y, a partir de aquí, estudiar los principales conceptos topológicos en este tipo de espacios, ideas que se encuentran en la base de otras materias posteriores.

Estamos ante una introducción a la Topología a través de la teoría de los espacios métricos y, por otra parte, ante la adquisición de conceptos básicos y necesarios para el estudio de otras asignaturas del Grado.

La topología, en concreto la topología de los espacios métricos y, en particular, de los espacios euclídeos, es básica en la formación de un matemático; y se hace necesaria para el desarrollo de otras materias ulteriores, como Análisis Matemático en Varias Variables, Ecuaciones Diferenciales, Topología y Geometría Diferencial, Análisis Funcional, Funciones de Variable Compleja, Métodos Numéricos, etc.

Objetivos:

- Conocer y manejar el concepto de distancia y de espacio métrico.
- Conocer y manejar con soltura los conceptos topológicos asociados a los espacios métricos: tipos de subconjuntos, continuidad, convergencia, compacidad, conexión, completitud, ...
- Introducir al alumno en el método demostrativo y desarrollar el pensamiento lógico y riguroso.
- Resolver problemas en los que intervienen los conceptos estudiados y ser capaces de expresar con rigor, tanto oralmente como por escrito, los razonamientos que intervienen en la resolución.
- Atender, fundamentalmente, a los métodos e ideas, más que a los contenidos y resultados concretos.
- Lograr un grado de madurez científica y una predisposición que le permita enfrentarse al planteamiento y resolución de problemas diversos, no estrictamente de naturaleza topológica.
- Despertar en el alumno la capacidad de aplicar teorías generales a situaciones concretas, sintetizando resultados parciales y deduciendo otros más globales.

Conocimientos previos necesarios

Es necesario que el alumno conozca los conceptos fundamentales sobre la teoría de conjuntos, el concepto de aplicación y sus diferentes tipos, conjunto finito e infinito, numerabilidad, ... así como los conjuntos numéricos standard; en especial las propiedades de los números reales, sucesiones, funciones, ... Es decir, los conocimientos correspondientes a las asignaturas de primer cuatrimestre “Conjuntos y números” y “Funciones de una variable real I”.

Competencias específicas de la asignatura

- Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de espacio métrico.
- Reconocer y utilizar las propiedades sencillas de la topología métrica.
- Construir ejemplos de espacios métricos usando las nociones de subespacio métrico y espacio métrico producto.
- Saber calcular la adherencia, el interior y la frontera de subconjuntos de algunos espacios métricos, en particular, de los espacios euclídeos.
- Determinar cuándo una función entre espacios métricos es continua y, en particular, cuándo es un homeomorfismo.
- Identificar los subconjuntos conexos de la recta real y, en general, de los espacios euclídeos.
- Relacionar los conceptos de conexión y continuidad en un espacio métrico.
- Identificar los subconjuntos compactos de la recta real y, en general, de los espacios euclídeos.
- Relacionar los conceptos de compacidad y continuidad en un espacio métrico.
- Conocer las propiedades más sencillas de los espacios métricos completos.
- Relacionar los conceptos de completitud y compacidad en los espacios métricos.
- Saber caracterizar diferentes propiedades y conceptos topológicos mediante el uso de sucesiones, particularmente la continuidad, la adherencia, y los subconjuntos cerrados y compactos.

Programa de la Asignatura

1. **Espacios métricos.** Distancia. Espacio métrico. Distancias en \mathbb{R} y \mathbb{R}^n . Ejemplos de espacios métricos. Subespacio métrico. Distancia a un conjunto y distancia entre conjuntos. Bolas. Topología asociada a una métrica. Conjuntos abiertos y cerrados. Propiedades. Producto de espacios métricos.
2. **Subconjuntos destacados en la topología métrica.** Adherencia, interior y frontera. Conjuntos densos y espacios separables. Puntos aislados y de acumulación. Adherencia, interior y frontera relativos. Sucesiones. Convergencia. Caracterización mediante sucesiones de los puntos adherentes y puntos frontera.
3. **Funciones continuas.** Continuidad de funciones entre espacios métricos. Continuidad en un punto. Continuidad global. Caracterización de la continuidad mediante sucesiones. Principales propiedades de las aplicaciones continuas. Aplicaciones abiertas, cerradas y homeomorfismos. Aplicaciones continuas en subespacios. Continuidad uniforme. Isometrías.
4. **Espacios compactos.** Espacio y subespacio compacto. Subconjuntos compactos de la recta real y del espacio euclídeo \mathbb{R}^n . Compacidad secuencial. Teorema de Heine-Borel-Lebesgue. Relación entre la compacidad y las funciones continuas. Propiedad de la intersección finita.
5. **Espacios métricos completos.** Sucesiones de Cauchy. Los espacios euclídeos \mathbb{R}^n . Relación entre la completitud y la compacidad. Teorema de encaje de Cantor, Teorema de Baire, Teorema del punto fijo. Completado de un espacio métrico.
6. **Espacios conexos** Espacios métricos conexos. Propiedades. Componentes cconexas. Los subespacios conexos de la recta real. Conexión y continuidad. Conexión por caminos.

Estimación del volumen de trabajo del estudiante (ECTS)

Estimación de las horas de trabajo que un alumno debe dedicar para superar la asignatura por curso:

Actividad	Presencial	Personal	Total
Clases de teoría	20	20	40
Clases de problemas	17	25	42
Talleres de problemas	12	18	30
Tutorías, trabajos	4	9	13
Pruebas de evaluación	7	18	25
TOTALES	60	90	150

Temporalización o cronograma

Distribución aproximada de las horas presenciales que se emplearán en cada tema.

Tema	Contenidos	Horas
1	Espacios métricos	8
2	Subconjuntos destacados	12
3	Funciones continuas	10
4	Espacios compactos	12
5	Espacios métricos completos	8
6	Espacios conexos	7

Criterios básicos de evaluación

El aprendizaje se valorará según el siguiente esquema:

Instrumento	Criterios de calidad	Ponderación
Tareas entregadas	Precisión y corrección del lenguaje. Claridad, coherencia y orden de los razonamientos. Manejo y relación de los conceptos y resultados utilizados. Correcta resolución.	10 %
Controles (dos)	Precisión y corrección del lenguaje. Claridad, coherencia y orden de los razonamientos. Manejo y relación de los conceptos y resultados utilizados. Correcta resolución.	20 %
Examen final	Precisión y corrección del lenguaje. Claridad, coherencia y orden de los razonamientos. Manejo y relación de los conceptos y resultados utilizados. Correcta resolución.	70 %

Para aprobar la asignatura en la convocatoria de junio será necesario obtener una calificación igual superior a 3.5 puntos en el examen final y obtener al menos cinco puntos según la ponderación establecida.

En las restantes convocatorias del mismo curso académico la calificación del alumno será la mejor entre la calificación del examen y la media ponderada del párrafo anterior.

Bibliografía Básica

1. J.M. DIAZ MORENO; Introducción a la Topología de los Espacios Métricos ; Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz *Cádiz*; 1998.
2. M. MACHO-STADLER; Topología de Espacios Métricos ;
; <http://www.ehu.es/~mtwmastm/Docencia.html>.

Bibliografía Complementaria

1. E. BUJALANCE y J. TARRES; Problemas de Topología ; UNED *Madrid*; 1989.
2. G. FLEITAS MORALES y J. MARGALEF ROIG; Problemas de Topología General ; Alhambra *Madrid*; 1970.
3. PEDRO J. HERRERO y PASCUAL LUCAS; Topología ; Ed. Diego Marín *Murcia*; 2002.
4. S. LIPSCHUTZ; Topología General *Serie Schaum*; McGraw-Hill *México*; 1970.
5. W.A. SUTHERLAND; Introduction to Metric and Topological Spaces ; Oxford Sci. Publ. ; 1975.
6. M. O. SEARCÓID; Metric Spaces ; Springer-Verlag ; 2007.
7. S. SHIRALI y H. VASUDEVA; Metric Spaces ; Springer-Verlag ; 2006.