Manual del curso

FILOSOFÍA DE LA CIENCIA APLICADA

La crisis de fundamentos (Una introducción a la filosofía de la matemática contemporánea)

Prof. Gustavo Fernández Díez Picazo

Curso 2020–2021
1º Cuatrimestre

Universidad de Murcia

Índice abreviado

MÓDULO 1

La crisis de fundamentos

Introducción

§ 1.1. Objetivos y ámbito de la asignatura. El objetivo de esta asignatura es analizar la *crisis de fundamentos* en filosofía de la matemática que se produjo a principios del siglo XX, y la posterior configuración del debate, a todo lo largo del siglo, entre las principales corrientes enfrentadas. En ese análisis vamos a involucrar a las más importantes escuelas, teorías y reflexiones acerca de la naturaleza de la matemática, desde finales del siglo XIX hasta principios del siglo XXI. El resultado será, por lo tanto, una visión panorámica de la filosofía de la matemática durante los últimos 130 años. Es decir: una vision panorámica de la filosofía de la matemática de nuestro tiempo.

El ámbito de la presente asignatura se circunscribe de este modo a los principales autores y autoras que están presentes en el debate actual sobre filosofía de la matemática. Es decir: a aquellos autores vivos, que están actualmente participando en dicho debate, y a aquellos clásicos recientes, a los que éstos toman como referencia, y con los que están, por así decirlo, “en diálogo”.

Así por ejemplo, estudiaremos las contribuciones de Frege y Brouwer, que murieron a principios y mediados del siglo XX respectivamente, porque son influencia palpable en la obra de filósofos actuales, como Michael Dummett (fallecido en 2011) o Crispin Wright. Pero dejaremos fuera de la asignatura a otros pensadores, como Kant, o John Stuart Mill, que fueron a su vez referentes de aquéllos, referentes para la filosofía de la matemática de Frege, por ejemplo, pero que en la literatura especializada de hoy en día aparecen ya en otro plano, y de forma mucho más esporádica.

Ello no significa que minimicemos la importancia de esos otros filósofos, más antiguos, de la historia de la filosofía. Muy al contrario, la aportación de esas figuras debe seguir siendo valorada y reivindicada, como así sucede, pero por estudios de orientación *histórica.*

También hay que advertir que se ha hecho un tratamiento de la asignatura completamente simplificado, y “no técnico”. Es decir: de tal forma que sea inmediatamente accesible, sin requerir conocimientos previos de ninguna otra materia universitaria. Ni siquiera conocimientos de matemáticas, más allá de las impartidas en la Enseñanza Primaria.

Asimismo, la exposición de las distintas teorías filosóficas se hace a un nivel sumamente elemental, limitándonos a repasar las principales propuestas, y los principales argumentos que caracterizan a cada una. Detrás de esa presentación básica que aparece aquí, hay una cantidad ingente de matices, desarrollos especializados, réplicas y contrarréplicas, que han quedado fuera de la asignatura, a fin de mantener ésta en unas dimensiones asequibles, que permitan desarrollarla íntegramente en un cuatrimestre.

Por último, hay que advertir también que vamos a dedicar una atención mucho mayor a aquellos autores y obras que hayan sido traducidos al castellano, y sobre los cuales dispongamos de estudios, manuales o monografías, en dicha lengua. Esto se ha hecho así para facilitar el conveniente apoyo del aprendizaje en otros materiales didácticos, donde el estudiante pueda ampliar conocimientos, buscar fuentes para la redacción de los ensayos, etc.

§ 1.2. Bosquejo general de los contenidos. La asignatura va a comenzar presentando el punto de vista *platónico* en filosofía de la matemática. El platonismo, en su versión rudimentaria, constituye sin duda la concepción más inmediata, y quizá también la más extendida, sobre la naturaleza del conocimiento matemático. En el siglo XX, esta filosofía tuvo un defensor notable en la figura del lógico Kurt Gödel. Y más recientemente ha sido reivindicada, en versiones sofisticadas, por filósofos como Charles Parsons o Mark Steiner.

Una vez introducido el platonismo, y todavía dentro de este Módulo 1, haremos una breve descripción de ese episodio histórico que se conoce como la "crisis de fundamentos". Se trata de la crisis que da título a la asignatura, y le sirve de eje central, por lo que las referencias a la misma serán continuas a todo lo largo de ésta.

Como estudiaremos en detalle en su momento, tras aquella crisis el debate quedó configurado en tres escuelas principales, las llamadas *"escuelas clásicas"* (o *"escuelas fundacionales"*) en filosofía de la matemática: el *logicismo*, el *formalismo*, y el *intuicionismo*. Estas tres escuelas condensaron el trabajo de investigación y reflexión filosófica sobre los fundamentos de la matemática en las primeras décadas del siglo XX.

En el presente curso les vamos a dedicar un capítulo a cada una de ellas, como es habitual en el tratamiento de estos temas. Así, el Módulo 2 está dedicado al logicismo, representado principalmente por los matemáticos y filósofos Gottlob Frege y Bertrand Russell. Y en nuestros días, por filósofos como Bob Hale y Crispin Wright, que han llevado a cabo una reformulación laboriosa y de interés indudable.

En el Módulo 3 nos ocuparemos de la escuela formalista, capitaneada por el gran matemático David Hilbert, y que en la actualidad tiene también un defensor tenaz, en la figura de Michael Detlefsen. Y en el Módulo 4 hablaremos del intuicionismo, creado por el matemático holandés Brouwer, continuado por su discípulo Arend Heyting, y más recientemente defendido con nuevos argumentos por el filósofo Michael Dummett.

A continuación, dedicaremos el Módulo 5 a hablar sobre las posiciones *convencionalistas* en filosofía de la matemática, que también han tenido un protagonismo grande durante el pasado siglo. En particular, haremos una excursión introductoria en la filosofía de la matemática de Wittgenstein, que está claramente relacionada con el convencionalismo, o al menos lo inspira, y que ha tenido un eco sonado, como toda la obra filosófica de este autor.

Por último, el Módulo 6 se ocupa del *empirismo en filosofía de la matemática*. Esta doctrina fue claramente relanzada, sobre todo a partir de 1950, por filósofos como Willard

Quine o Imre Lakatos, con propuestas muy diferentes. Y más recientemente ha estado representada, entre otros, por Hilary Putnam, Philip Kitcher o Penelope Maddy, también con propuestas muy distintas entre sí.

Al final de ese Módulo 6, y ya para terminar la asignatura, dedicaremos un último apartado a tratar brevemente sobre otras dos corrientes actuales, de reconocida importancia, pero a las que no dedicaremos tanta extensión como para asignarles módulos propios. La primera de estas corrientes es el *nominalismo*, defendido por una parte por Charles Chihara, y por otra, en una contribución enormemente original y compleja, por Hartry Field. Y la segunda es el *estructuralismo*, representado en diferentes versiones, por Paul Benacerraf, Michael Resnik, Stewart Shapiro y Geoffrey Hellman.

Se ha dicho con razón, que las últimas décadas del siglo XX han conocido un auténtico renacimiento de la filosofía de la matemática, tanto por la aparición de nuevos defensores y reformulaciones de las escuelas fundacionales, como por el surgimiento de propuestas y corrientes totalmente distintas, algunas de ellas de notable originalidad. En este curso daremos, como acabamos de explicar, buena cuenta de ello.

Ahora bien, hay que tener presente que la recepción de estas nuevas aportaciones, no está ni mucho menos tan asentada como la de las tres escuelas clásicas de principios de siglo. A consecuencia de ello, su etiquetado, catalogación, y la descripción general de sus propuestas resulta mucho más provisional y discutible. A diferencia de lo que ocurre con las escuelas clásicas, para las que existen criterios más o menos comunes, de amplia aceptación.

La lectora o lector interesado encontrará, de hecho, en la bibliografía reciente sobre la materia, clasificaciones de los filósofos actuales muy distintas entre sí. Y por supuesto, muchas de ellas distintas a la que se ha empleado en la presente asignatura, lo cual no debe extrañarle en absoluto.

Conviene hacer, por último, la siguiente advertencia. El presente manual ha sido confeccionado con el editor de textos LaTeX 2_ε, y la versión electrónica del mismo ha sido obtenida mediante el programa PDFLaTeX. Pues bien, debido a una limitación en la configuración de estos programas, ocurre que el buscador de Acrobat® Reader™ no reconoce correctamente en el documento ni los acentos, ni la letra eñe. Por ello, para intentar localizar una palabra acentuada, se debe introducir en la utilidad de búsqueda algún fragmento relevante de la misma que no contenga acentos (por ejemplo "filosof" para buscar "filosofía"). Y algo similar, en su caso, para buscar una palabra que contenga la ñ.

§ 1.3. Enfoque "no personalista" de la filosofía. En esta asignatura vamos a cultivar un enfoque de la filosofía que podríamos llamar *"no personalista"*, y que se resume básicamente en lo siguiente. Para nosotros lo importante serán los problemas filosóficos, las teorías elaboradas para abordarlos, y los argumentos a favor y en contra de las distintas teorías. Y *no* serán prioritarias para nosotros cuestiones como la correcta interpretación de autores, la búsqueda de coherencia en el conjunto de contribuciones de un autor o autora, las disputas por prioridades históricas, etc.

En una palabra: lo que nos interesará en esta asignatura no serán, primordialmente, los autores, sino las teorías, las reflexiones, y los argumentos filosóficos. De ahí la denominación que propongo, de enfoque "no personalista".

Un ejemplo de orientación personalista lo tenemos en una Biblioteca de filosofía cuyos libros están ordenados por autores, esto es, por personas, en vez de por materias, o por corrientes filosóficas. O también, en una monografía dedicada a estudiar el conjunto de la obra filosófica de un determinado autor. Un ejemplo de orientación no personalista nos lo ofrece la revista británica *Analysis*, cuyas instrucciones de publicación excluyen expresamente la publicación de artículos con "exégesis de los Grandes Filósofos Muertos" (http://www.oxfordjournals.org/our_journals/analys/for_authors, consultado el 05.09.2012).

De acuerdo con este modo de enfocar las cosas, si en el transcurso de esta asignatura hacemos una afirmación como, por ejemplo:

> "el representante por excelencia del platonismo puro en la filosofía de la matemática contemporánea es Kurt Gödel"

se entenderá que las mejores formulaciones, o la mejor defensa, del platonismo puro en la filosofía de la matemática contemporánea, se encuentran en la obra de Gödel. Es decir: que la mejor defensa de esa particular doctrina en la filosofía de la matemática contemporánea, se ha de encontrar entre los escritos publicados por Kurt Gödel.

Pero con ello *no* querremos implicar, y tampoco nos detendremos a analizar con más detalle, cuestiones como: si Gödel se consideraba platónico o no, si en otros lugares de la obra de Gödel se expresan opiniones discordantes con ésa, si una interpretación más sofisticada descubre aspectos ocultos en esos escritos, o si el verdadero mérito no hay que atribuirlo a Gödel, sino a otro filósofo anterior en el que Gödel se inspiró.

Tales cuestiones pueden aparecer ocasionalmente, como comentario marginal, al igual que pueden mencionarse de vez en cuando algunos datos biográficos u otras curiosidades históricas. Pero nunca deberán protagonizar nuestra discusión en primer plano.

§ 1.4. Filosofía de la matemática y filosofía de la ciencia. ¿Qué es la filosofía de la matemática? Pues la rama de la filosofía que recoge todas aquellas teorías y reflexiones sobre la naturaleza, contenido y fundamento epistemológico del conocimiento matemático. Es decir, todas aquellas teorías y reflexiones que tratan sobre qué es el conocimiento matemático, cuál es la entidad de los objetos matemáticos, cómo podemos conocer cosas acerca de estos objetos, cómo podemos referirnos a ellos, etc.

La filosofía de la matemática forma parte, por consiguiente, de lo que se denomina *"filosofía de la ciencia"*. Y en efecto, la filosofía de la ciencia a su vez, abarca toda la reflexión filosófica que se hace en torno a la ciencia, es decir, en torno a la parte más precisa y sofisticada del conocimiento humano. Por lo tanto, la filosofía de la matemática es como tal una forma de filosofía de la ciencia *aplicada*. Al igual que hay *filosofía de la física*, *filosofía de la biología*, *filosofía de la economía*, etc.

Comparada con las otras aplicaciones de la filosofía de la ciencia, la filosofía de la matemática ocupa una posición singular, debida a la propia diferencia existente entre la actividad matemática y el resto de disciplinas científicas.

Salta a la vista, por ejemplo, que dos ocupaciones centrales del trabajo científico, como son la *observación* y la *experimentación*, están esencialmente ausentes de la investigación matemática, o si intervienen, lo hacen de una forma muy particular y sui géneris. La persona que investiga en matemáticas no dispone de laboratorios, ni sale de su gabinete para realizar *trabajo de campo*.

En consecuencia, muchos de los principales problemas de la filosofía general de la ciencia, como son la *inducción empírica*, esto es, la confirmación de hipótesis por la experiencia, así como la *predicción*, la diferencia entre *teórico* y *observacional*, o el acaecimiento de *revoluciones científicas*, entre otros, apenas han preocupado a la filosofía de la matemática, que ha desarrollado su labor de casi forma totalmente ajena a esos problemas.

Sólo una corriente filosófica, aunque importante, el empirismo en filosofía de la matemática, propugna que la matemática es también una *ciencia empírica*, que debe ser asimilada por tanto al resto de las ciencias. Y aún así, son muchos entre sus defensores, los que admiten la singularidad de los problemas de la filosofía de la matemática con respecto al resto de problemas de los que trata la filosofía de la ciencia.

§ 1.5. La filosofía de la matemática como disciplina. La filosofía de la matemática constituye hoy por hoy un campo incierto, sobre el que sabemos poco o muy poco. Como dice el filósofo español Jesús Mosterín,

> "seguimos sin saber bien lo que hacemos, cuando hacemos matemáticas."
> (Mosterín, *Los lógicos*, p. 160.)

En consecuencia, no existe un tratamiento unificado de la materia, que pudiera servir como referencia básica para un curso universitario de las características del nuestro. Lo que hay, como estamos viendo, son teorías filosóficas, enfrentadas entre sí, y argumentos en favor de unas u otras.

Nótese que estamos hablando, por supuesto, de la *filosofía de la matemática*, y no de la *matemática* propiamente dicha. La incertidumbre, y la falta de un paradigma básico, son características de la reflexión filosófica acerca de la matemática. No tanto de la matemática en sí, que tiene una tradición solvente y consolidada desde hace más de dos mil años.

Lo que ocurre, parafraseando la cita de Mosterín, es que "sabemos hacer matemáticas de forma notable, pero *seguimos sin saber bien qué es lo que hacemos*, cuando hacemos matemáticas".

Por lo demás, la falta de certidumbre en filosofía de la matemática es una característica muy general de las disciplinas filosóficas. Y según una opinión bastante extendida, que comparto, la incertidumbre constituye en realidad una característica *definitoria* de las disciplinas filosóficas como tales. Es decir: que en la historia de una disciplina, es precisamente cuando se empieza a alcanzar cierto de grado de madurez, que se la deja de calificar como filosófica, y se le otorga nombre propio y consideración independiente.

Lo que está claro, en cualquier caso, es que cada estudiante del Grado en Filosofía deberá acostumbrarse enseguida a este tratamiento de las distintas materias a través de escuelas y teorías filosóficas enfrentadas, ninguna totalmente convincente, que es todo lo que hay disponible sobre las mismas. Ante tal situación, no cabe sino avivar el espíritu crítico, la capacidad reflexiva, y eso sí, adquirir un conocimiento fresco, actualizado y detallado sobre las mejores líneas argumentales existentes en cada campo concreto.

§ 1.6. Ontología, epistemología, semántica. Ontología, epistemología y semántica, son tres frentes habituales de la investigación filosófica en distintos ámbitos, que además suelen acabar resultando íntimamente relacionados.

Por hacer una descripción a vuela pluma, la *ontología* investiga las condiciones generales de la existencia de las cosas, y de los hechos, y es objeto tradicional de aquella disciplina filosófica denominada *"metafísica"*. La *epistemología*, por su parte, investiga las condiciones de nuestro conocimiento, y la rama de la filosofía que trata de ella se llama *"teoría del conocimiento"*. Y por último, la *semántica* trata de cómo es posible que hablemos, o nos refiramos, a cosas y hechos, y que nuestros enunciados sobre el mundo puedan resultar verdaderos o falsos; trata, en definitiva, de los significados de nuestras palabras y de las condiciones de existencia de nuestro lenguaje, por lo que entra dentro de lo que se denomina *"filosofía del lenguaje"*.

Se suele admitir que durante el siglo XX, la perspectiva semántica ha gozado de preeminencia con respecto a las otras dos, precisamente debido a la influencia de Frege. Es decir: que ha sido el lenguaje el terreno en el cual se ha centrado la discusión de la mayor parte de los problemas filosóficos. Es el llamado *"giro lingüístico"*, del que volveremos a hablar en el próximo Módulo. Dicha preeminencia, no obstante, se encuentra en declive, posiblemente a favor de la perspectiva epistemológica, que es la que está pasando cada vez más a un primer plano.

Pues bien, en la propia filosofía de la matemática, existen también una ontología, una epistemología, y una semántica, aplicadas específicamente a las realidades matemáticas. La tensión entre ellas, así como la conexión con problemas filosóficos más generales, habrán de dar mucho juego a lo largo de toda la asignatura.

§ 1.7. Objetos, propiedades y hechos. Otra distinción muy presente en esta asignatura es la que cabe trazar entre *objetos*, *propiedades* y *hechos*. Un objeto, por ejemplo, es la Luna. Una propiedad de la Luna es *ser esférica*, o *tener un diámetro de 3.500 km.* Y hechos acerca de la Luna son por ejemplo el hecho de que la Luna sea esférica, el hecho de que la Luna tenga un diámetro de 3.500 km., o el hecho de que la Luna gire alrededor de la Tierra.

Las *relaciones*, por su parte, están al mismo nivel que las propiedades, pero involucran varios objetos. Así por ejemplo, la Tierra y la Luna se encuentran relacionadas al *ser* la Luna *satélite de* la Tierra. O al *tener* la Luna *una masa 81 veces menor que* la de la Tierra. O por la relación de *encontrarse la una de la otra a una distancia media de 380.000 km.* Etc.

Pues bien, llamaremos *"término"* a cualquier expresión lingüística que utilicemos para referirnos a un objeto, o a una colección de objetos. Por ejemplo "Luna" es un término. La expresión "el único satélite natural de la Tierra" es también un término. La expresión "los satélites de Venus" también constituye un término. Etc.

Nótese lo importante que resulta utilizar las comillas, para diferenciar los términos de aquellos objetos que los términos denotan. Así, hablamos del término "Luna", y de él podemos decir con verdad que es una palabra castellana, y que consta de 4 letras, por ejemplo. Mientras que de la propia Luna no podemos decir que tenga letras, ni que sea una palabra: la Luna es una entidad física con propiedades materiales, como la de tener un diámetro de 3.500 km. En definitiva: que la diferencia entre la "Luna" (palabra) y la Luna (satélite) es enorme, y el uso de comillas nos ha de servir para resaltarla

A su vez, llamamos *"predicado"* a cualquier expresión lingüística que nos sirva para denotar propiedades o relaciones. Por ejemplo: "ser esférico", "tener un diámetro de 3.500 km.", "girar alrededor de", "tener una masa 81 veces menor que", etc.

Y llamamos *"enunciado"* (o más exactamente, *"enunciado declarativo"*), a aquel acto de habla mediante el cual exponemos un hecho. Por ejemplo, cuando decimos: "la Luna es esférica". O cuando decimos: "la Luna tiene un diámetro de 3.500 km.". O cuando decimos: "la Luna gira alrededor de la Tierra". Etc.

Nótese nuevamente lo importante del uso de comillas, para resaltar que estamos hablando de predicados, o de enunciados, en su caso, en lugar de las propiedades o hechos expresados por ellos.

La filosofía de la matemática, en fin, estudia el estatuto y naturaleza de los objetos matemáticos, así como de las propiedades, relaciones y hechos en los que éstos participan.

En algunas ocasiones puntuales, la distinción entre unos y otros aparecerá con gran relevancia. Por ejemplo, cuando discutamos sobre si los números deben ser categorizados como objetos singulares, o bien como propiedades organizadas de una determinada manera. Pero esto es algo excepcional, que sólo se comentará cuando resulte necesario, en su momento.

En general la distinción entre objetos, propiedades y hechos quedará implícita, no la traeremos a colación de una manera expresa. Mientras no se advierta lo contrario, los argumentos y reflexiones que, en cada filosofía de la matemática, se apliquen a una de estas categorías, se entenderá que valen también, mutatis mutandis, para las otras.

Por ejemplo, en breve presentaremos el platonismo en filosofía de la matemática, como aquella doctrina según la cual los objetos matemáticos tienen una existencia independiente de la mente humana. Pues bien, se entenderá, y no hará falta decir expresamente, que según esa doctrina las propiedades y relaciones de los objetos matemáticos son también independientes de la mente humana. Y se entenderá que los hechos en los que los objetos matemáticos están configurados, son asimismo independientes de la mente humana, siempre bajo el prisma de dicha concepción filosófica.

Y así con el resto de teorías y posiciones que se caractericen a lo largo del curso.

§ 1.8. Nota sobre las referencias bibliográficas. Los datos de edición de todos libros mencionados en este Manual se encontrarán en la *Bibliografía general*, que aparece al final (p. 121). Salvo que se indique lo contrario, las traducciones que se utilizan para las citas de autores extranjeros son las correspondientes a las ediciones allí mencionadas, especificándose cuál de ellas, caso de haber varias.

He tratado de restringir las citas y las recomendaciones bibliográficas a obras que estén disponibles en alguna de las bibliotecas de nuestra Universidad, especialmente en la Biblioteca Luis Vives, que es la que corresponde a la Facultad de Filosofía. En aquellas citas en que esto no ha sido posible se proporciona una “fuente secundaria” que sí sea accesible, y donde aparezcan citados a su vez los fragmentos aquí mencionados.

Las expresiones en cursiva de los textos citados son siempre las que aparecen en la edición original. Las acotadas entre corchetes, sin embargo, son añadidos aclaratorios al texto fuente. Los números de página corresponden, en cada caso, a la edición reseñada en la *Bibliografía*; y si hay varias, a la que aparezca citada en primer lugar.

Por último, la abreviatura “cf.”, que utilizo con frecuencia, significa *confrontar*, y es equivalente al “véase”; “s.”, o “ss.”, junto a un número de página, significan *y siguiente*, o *y siguientes*, respectivamente; otras abreviaturas utilizadas, como por ejemplo “secc.” para *sección*, etc., son evidentes, y deberán de entenderse sin dificultad.

§ 1.9. Recomendaciones bibliográficas generales. Entre los principales libros publicados sobre filosofía de la matemática, destaca la compilación de Benacerraf y Putnam, en inglés, que es la antología más citada en esta materia. Asimismo son importantes las compilaciones de Hart, Irvine, y Jacquette, algo más recientes, y también en inglés.

La única revista en lengua inglesa, y con amplia difusión internacional, que está exclusivamente dedicada a la filosofía de la matemática, es *Philosophia Mathematica*, editada en Canadá desde 1964 (a cuya versión electrónica está suscrita nuestra universidad). En castellano hubo una parecida, *Mathesis*, publicada en México entre 1985 y 1994, y cuyo ámbito cubría simultáneamente la filosofía y la historia de la matemática (ésta se encuentra disponible en papel, casi completa, en la Hemeroteca de Ciencias Sociales, aneja a nuestra Biblioteca Luis Vives).

Finalmente, en cuanto a los manuales sobre la materia, en inglés destacan el de Michèle Friend y (sobre todo) el de Øystein Linnebo; y en castellano los de Alcolea, Cañón Loyes y Javier de Lorenzo (2000), así como el de Dou y el de Garrido Garrido (2003), estos dos de carácter algo más técnico.

El platonismo puro en filosofía de la matemática

§ 1.10. La oposición entre realismo e idealismo en diferentes ámbitos. Una postura *realista*, aplicada a un objeto determinado, es la que defiende que ese objeto existe realmente, de forma exterior e independiente de la mente humana. Una postura *idealista* (o *"antirrealista"*), por el contrario, es aquella según la cual el objeto en cuestión es una ficción, un mero producto de nuestro pensamiento.

En este sentido, una concepción realista acerca de *El Quijote*, por ejemplo, sería aquella según la cual existió realmente un Alonso Quijano "el Bueno", de las características que describió Cervantes, y en el que Cervantes se habría inspirado para escribir su novela.

Una concepción idealista de *El Quijote*, por el contrario, es aquella según la cual Alonso Quijano es una pura invención de Cervantes, así como todas las andanzas y aventuras que le suceden y que aparecen relatadas en esa obra. Es decir: una concepción idealista de *El Quijote*, en la acepción que estamos comentando aquí, es aquella según la cual Don Quijote ha existido sola y exclusivamente en la mente de Cervantes, y en la mente de los lectores de Cervantes.

La filosofía se ha ocupado a lo largo de su historia, y se sigue ocupando con frecuencia, de la oposición entre estas dos posturas enfrentadas: la postura realista y la postura idealista. Y no ya aplicadas a un único objeto, sino a amplios abanicos de objetos, o de fenómenos. Es decir: a diferentes ámbitos de nuestro discurso, o de la realidad tal y como habitualmente la concebimos.

Por ejemplo, la filosofía se ha ocupado del dilema entre realismo e idealismo aplicado a los enunciados sobre el pasado; a los enunciados sobre el futuro; a las entidades teóricas de la ciencia; a los juicios morales; a los juicios estéticos; a los objetos abstractos; a Dios; a la existencia de otras mentes; a la existencia del mundo exterior en su conjunto; y un largo etcétera.

La discusión sobre cada uno de estos ámbitos responde a criterios y a argumentos distintos, específicos para cada uno. Y es coherente, en principio, adoptar una posición realista con respecto a algunos de ellos, e idealista con respecto a otros. (Véase por ejemplo Dummett, M., "El realismo" y "La realidad del pasado", en su libro *La verdad y otros enigmas*, pp. 220–242 y 447–464 respectivamente.)

§ 1.11. Vertientes epistemológica y semántica de la oposición entre realismo y antirrealismo. Además de la vertiente puramente ontológica, que es la que se refiere a la existencia (o inexistencia) de los objetos en cuestión, la oposición entre realismo y antirrealismo tiene dos vertientes más: una vertiente epistemológica, y una vertiente semántica.

Así por ejemplo, una visión realista de *El Quijote* en su vertiente epistemológica, consistiría en afirmar que nosotros tenemos conocimiento efectivo acerca del propio Don Quijote (Alonso Quijano El Bueno), conocimiento que hemos adquirido a partir del texto que nos legó Cervantes. Mientras que una visión antirrealista, por el contrario, afirmaría que nosotros no conocemos realmente a ningún Don Quijote (puesto que nunca existió, según esta postura), sino que lo que conocemos es la construcción de un personaje ficticio inventado por Cervantes, con las características recreadas por Cervantes acerca del mismo.

En cuanto a la vertiente semántica, una postura realista consistiría en afirmar que el término "Don Quijote" refiere a la persona real de aquel Alonso Quijano, que fue hidalgo manchego en su tiempo. Mientras que la postura antirrealista diría que ese término sólo sirve para hacer mención de la construcción inventada por Cervantes en su novela.

El significado de la expresión "Don Quijote", según adoptemos uno u otro punto de vista, aparece por consiguiente como algo muy distinto: en el primer caso denota una persona real, que existió en su época, mientras que en el segundo caso denota sólo una invención de la mente humana.

Del mismo modo, bajo la postura realista tiene sentido afirmar, por ejemplo, que:

"O bien Don Quijote tenía una abuela llamada Isabel, o bien no la tenía" (1)

Esto tiene sentido bajo la suposición de que estamos haciendo mención de una persona real, que necesariamente tendría unas abuelas, con determinados nombres, independientemente de que nosotros podamos llegar a conocer algún día si "Isabel" era o no el nombre de alguna de ellas.

Mientras que si adoptamos la concepción antirrealista, entonces la afirmación (1) queda en entredicho, porque bajo esta concepción Don Quijote es una mera ficción inventada por Cervantes, y Cervantes no dejó ninguna indicación en su novela acerca de los posibles nombres de las abuelas que tuviera su personaje.

§ 1.12. El platonismo en filosofía de la matemática. Salta a la vista, evidentemente, que el debate entre realismo e idealismo es muy pertinente cuando se aplica a los objetos de la matemática. Es decir: que es muy pertinente el debate sobre si los objetos matemáticos son objetos reales, o meras ideas de nuestro pensamiento. Y en efecto, dicho debate ha protagonizado gran parte de las discusiones en filosofía de la matemática desde la Antigüedad.

Pues bien: a la concepción realista en filosofía de la matemática, es decir, a la concepción según la cual los objetos matemáticos tienen una existencia real, exterior e independiente de la mente humana, es a la que se denomina tradicionalmente *"platonismo en filosofía de la matemática"*.

El platonismo en filosofía de la matemática, por consiguiente, es aquella doctrina filosófica que defiende que los objetos matemáticos, como por ejemplo los números, las funciones, las operaciones, los conjuntos, las figuras geométricas, etc., tienen una existencia eterna y absoluta, al estilo de la que describió Platón para su *mundo de las ideas*.

Y del mismo modo, el platonismo en filosofía de la matemática defiende también que los *"hechos matemáticos"* acerca de estos objetos, es decir, sus propiedades, las relaciones entre ellos, las distintas verdades matemáticas que expresan los teoremas, etc., son también realidades objetivas, que se dan de forma exterior e independiente de la mente humana.

Según esta concepción, por lo tanto, cuando uno realiza correctamente una suma, como "$2+2=4$", lo que está haciendo es describir correctamente la realidad matemática. Al igual que cuando uno dice, por ejemplo, "La capital de Francia es París", lo que hace es describir correctamente la realidad geopolítica de la nación vecina. O cuando uno dice "ácido + base = sal + agua", lo que hace es describir correctamente el resultado de una reacción química.

Y la investigación matemática, por su parte, siempre según el platonismo, consistirá en *"descubrir"* nuevos objetos matemáticos, y en *"descubrir"* nuevos hechos acerca de los objetos ya descubiertos.

Aquí tenemos que tener cuidado con un matiz terminológico, que puede jugarnos malas pasadas, y que es el siguiente. La posición platónica en filosofía de la matemática, es según estamos viendo, una forma de realismo *acerca del ámbito de los objetos matemáticos*.

Sin embargo, por la naturaleza esencialmente abstracta de esos objetos, se puede considerar también una instancia de "idealismo filosófico", ya que otorga la máxima carga de realidad a entidades a primera vista ideales. Es decir: se puede considerar que el platonismo en filosofía de la matemática es un "idealismo", al postular que los objetos matemáticos tienen una existencia real, comparable a la de las sillas y las mesas.

Para evitar malentendidos en este contexto, debemos tener la precaución de mencionar siempre esta forma de realismo como "realismo acerca de las entidades matemáticas", con todas sus letras. O bien, sencillamente, utilizar la expresión "platonismo en filosofía de la matemática", denominación inconfundible, y de uso consolidado, que es la que se utilizará preferentemente en este Manual.

§ 1.13. Platonismo ontológico, epistemológico y semántico. Además de la vertiente ontológica, que se refiere a la existencia de los objetos matemáticos, el platonismo tiene también una vertiente epistemológica, y una vertiente semántica.

Según la vertiente epistemológica del platonismo, nosotros podemos conocer los objetos matemáticos, al menos parcialmente. Pero de tal forma que nuestro conocimiento de los mismos no les afecta en absoluto. Es decir: tenemos lo que se denomina *"acceso epistemológico"* a los objetos matemáticos, pero la existencia de estos objetos, y sus propiedades, son completamente independientes de nuestra forma de acceso a los mismos.

Según la vertiente semántica del platonismo, por su parte, nosotros podemos referirnos a los objetos matemáticos, pero la existencia de éstos es independiente de los mecanismos mediante los cuales nosotros nos referimos a ellos. Y del mismo modo, nosotros podemos describir los hechos en los que los objetos matemáticos están involucrados, al menos parcialmente, pero la entidad de esos hechos es del todo independiente de que nosotros podamos describirlos o no.

De acuerdo con esto, por consiguiente, cualquier enunciado matemático tiene un valor de verdad predeterminado (*verdadero* o *falso*), según que lo expresado por el enunciado corresponda o no con la realidad del mundo matemático. Y ello vale para todos los enunciados matemáticos sin excepción. Incluyendo aquellos casos en los que nosotros no conozcamos el valor de verdad, ni dispongamos de ningún medio imaginable para averiguarlo.

§ 1.14. El platonismo logicista. El platonismo en filosofía de la matemática está representado principalmente por tres corrientes distintas, bien diferenciadas. Éstas son el logicismo, el empirismo en filosofía de la matemática, y el platonismo puro, al que está dedicado el presente apartado.

En el logicismo, por decirlo de forma muy resumida, se considera que los objetos matemáticos son *"objetos lógicos"*. Es decir: objetos que existen por necesidad lógica, o cuya existencia se postula por razones de necesidad lógica.

Por "lógica", en este contexto, se viene a entender las leyes más básicas y generales que regulan nuestro razonar y discurrir. Tales leyes constriñen u obligan a ciertas cosas, como por ejemplo, a rechazar que puedan ser verdaderos un enunciado y su negación (*principio de no contradicción*): los enunciados "está lloviendo" y "no está lloviendo" no pueden ser verdaderos al mismo tiempo, y esto es algo que sabemos por razones estrictamente lógicas. Es decir: es algo que sabemos sin necesidad de asomarnos a la ventana para comprobarlo.

Pues bien, las leyes de la lógica, según la concepción de los logicistas, nos obligan también a postular la existencia de ciertos objetos, entre los que se encuentran, en particular, los objetos matemáticos, o por lo menos algunos de ellos.

El Módulo 2 está dedicado a presentar esta corriente filosófica, por lo que ya tendremos ocasión entonces de incidir con más detalle en su planteamiento.

§ 1.15. El platonismo empirista. En la corriente empirista, por su parte, la existencia los objetos matemáticos se mantiene por razones bien distintas. Para los empiristas en filosofía de la matemática, los objetos matemáticos son objetos empíricos. Es decir: objetos que forman parte de nuestro mundo físico real, de un modo lejanamente análogo al de las sillas y las mesas.

Lo que ocurre, según esta corriente filosófica, es que los objetos matemáticos representan un grado de abstracción muy alto, sobre esa realidad física inmediata. Y ésa es la razón por la que tendemos a no catalogarlos como parte de la misma.

Ya en la ciencia física, por ejemplo, así como en las otras ciencias, se postula la existencia de numerosas *entidades teóricas*. Entidades como la *fuerza de la gravedad*, *el centro de masa*, *el calor específico* o el *campo electromagnético*. Entidades correspondientes a cosas que no vemos, pero que resultan necesarias para formular las leyes mediante las cuales explicamos los fenómenos observables.

Pues bien: los objetos matemáticos, según el empirismo en filosofía de la matemática, están todavía un paso más allá, en ese grado de abstracción de la realidad física que nos rodea. Y debemos considerar a los objetos matemáticos como parte integrante de dicha realidad, según esta corriente, por la sencilla razón de que nos resultan necesarios para dar una descripción completa y satisfactoria de la misma.

También al empirismo se le dedica un capítulo propio en esta asignatura, el Módulo 6, por lo que será entonces el momento para analizar detenidamente los fundamentos y distintas variantes de esta interesante doctrina.

§ 1.16. Esencia del platonismo puro en filosofía de la matemática. Por último, la corriente en la que vamos a profundizar algo en el presente apartado es el *"platonismo puro"*, que a veces se llama también *"platonismo extremo"*, o *"platonismo no adulterado"*. Y que constituye la expresión más básica y rudimentaria del punto de vista platónico, siempre, se entiende, aplicado a la filosofía de la matemática.

El platonismo puro postula la existencia de un universo separado, eterno e independiente del mundo físico y de la mente humana, en el cual se encuentran los objetos matemáticos, configurados con todas sus propiedades y relaciones entre ellos. El representante por excelencia de esta posición en la filosofía de la matemática contemporánea es Kurt Gödel. Gödel fue un matemático austriaco, después nacionalizado estadounidense, cuyas contribuciones a la lógica y a la teoría de conjuntos se encuentran entre las más importantes de todo el siglo XX.

Otro ejemplo notable de platónico puro fue el matemático alemán de origen ruso Georg Cantor. Cantor fue el creador de la teoría de conjuntos, que desempeña un papel esencial en el campo de los fundamentos de la matemática, y de la que hablaremos con detalle más adelante. Recientemente se ha editado en español una pequeña antología de su obra, bajo el título "*Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*".

Según la filosofía platónica de la matemática, los objetos matemáticos tienen una existencia independiente sin más, en una especie de mundo aparte o *"universo platónico"*. Un universo en el que se encuentran los objetos matemáticos, configurados con todas sus propiedades y con todas las relaciones entre ellos, de forma sustantiva y eterna. Un universo al que a veces nos "asomamos", como si fuera por una rendija, para descubrir cosas sobre esos objetos.

El platonismo puro es la concepción más inmediata acerca del conocimiento matemático, entre otras razones porque la propia jerga o idiolecto matemático nos induce en buena medida a ello. Esto es: porque el uso lingüístico habitual en matemáticas, en los diferentes idiomas, tiende al platonismo: se da a los objetos matemáticos el mismo tratamiento gramatical que a los objetos físicos, se habla de "descubrir" sus propiedades y las relaciones entre ellos, etc.

Sin embargo, como teoría filosófica el platonismo puro resulta mucho más difícil de defender. Y ello es así, como veremos enseguida, principalmente a causa de esa "rendija" por la que se supone que logramos conectarnos con el universo matemático. Es decir: a causa de la particular vía de acceso epistemológico que se supone, según esta doctrina, que estaríamos utilizando las personas para obtener conocimiento del universo matemático.

Lo que ocurre, en efecto, es que la tarea de especificar en qué consiste esa vía de acceso epistemológico de forma clara y aceptable, resulta extraordinariamente complicada. Y por ende, la tarea de argumentar la existencia de ese universo matemático separado, universo que sólo conocemos a través de tan dudosa vía, resulta a su vez extraordinariamente ardua.

Además del problema de justificar la vía de acceso epistemológico al universo matemático, el platonismo puro tiene otra dificultad considerable a tener en cuenta, y es la de explicar la ubicua aplicabilidad de la matemática en el resto de las ciencias, y en especial en la física. ¿A qué se debe la aplicabilidad y la fertilidad de la matemática en el resto de las ciencias, si el contenido sobre el que la matemática versa es un universo aparte, que nada tiene que ver con el mundo espacio-temporal del que tratan aquéllas?

§ 1.17. Difusión y virtudes del platonismo puro. Sea como sea, el caso es que seguramente el platonismo puro constituye la concepción más extendida sobre la naturaleza del conocimiento matemático. En efecto, es la concepción que subyace a muchísimos textos y tratados de matemáticas, y es la concepción de las matemáticas que suele infundir en la enseñanza primaria y secundaria.

Además, el platonismo puro es también la filosofía tácita que subyace al trabajo de investigación de muchos matemáticos en activo. De muchos matemáticos que se dedican exclusivamente a hacer matemáticas, sin haberse detenido especialmente a indagar sobre los fundamentos epistemológicos y filosóficos de aquello que hacen.

Se trata, en definitiva, de una filosofía muy sugestiva a la imaginación, y es por ello que resulta tan válida en sus funciones *propedéutica* (para facilitar la enseñanza) y *heurística* (para facilitar la investigación).

Es más: considerada desde la perspectiva de las restantes teorías filosóficas, más elaboradas, resulta hasta cierto punto *inocua* para muchas de ellas. Es decir: que se podría admitir desde otras posiciones filosóficas, que los matemáticos en activo siguieran trabajando bajo el prisma del platonismo puro, ajenos a la sustentación filosófica de su tarea, sin vaticinar por eso deficiencia alguna en el desempeño de la misma.

No se ve así, sin embargo, desde algunas otras posiciones filosóficas, como la intuicionista, y otras filosofías cercanas, que achacan al "platonismo dominante" un daño profundo sobre la orientación de la investigación matemática y sus resultados, por razones que veremos en su momento.

§ 1.18. Conjeturas matemáticas no decididas: la infinitud de los primos gemelos. Un indicador bastante característico de las distintas filosofías de la matemática, y en particular del platonismo puro, es su forma de plantear la cuestión de las conjeturas matemáticas no decididas.

En matemáticas, una conjetura no decidida es cualquier cuestión que no se haya conseguido resolver, ni en un sentido ni en otro (ni afirmativa ni negativamente). Es lo que se llama también un *"problema abierto"*.

Vamos a poner algunos ejemplos sencillos, pertenecientes a la *aritmética*. La aritmética (o *teoría elemental de números*) es aquella parte de las matemáticas que se ocupa del estudio de los *números naturales* y sus propiedades. Los *números naturales* son sencillamente los que utilizamos para contar:

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad 5 \qquad 6 \qquad \dots$$

y así hasta el infinito. A veces se conoce también a los naturales como *"números enteros positivos"*, pero exceptuando en este caso al 0, que no es un número positivo ni negativo.

Una de las distinciones básicas que estudia la aritmética es la existente entre números *primos* y números *compuestos*. En efecto, de entre los números naturales, llamamos "primos" a aquellos que no son divisibles más que por la unidad y sí mismos. Por ejemplo el 7, el 11, ó el 13. Mientras que al resto de números naturales los llamamos "compuestos".

El 8 por ejemplo es compuesto, ya que es divisible por 2 y por 4. También es compuesto el 9, que se puede dividir por 3. Y el 15, por ejemplo, que se puede dividir por 3 y por 5. Siempre considerando, naturalmente, la división exacta, "sin resto".

En resumidas cuentas: que entre los números naturales, hay algunos que son primos, y otros que no. Y para hacernos una idea, podemos contemplar la siguiente tabla, donde aparecen destacados todos los números primos que se dan entre el 2 y el 99:

$\boxed{\mathbf{2}}$	$\boxed{\mathbf{3}}$	4	$\boxed{\mathbf{5}}$	6	$\boxed{\mathbf{7}}$	8	9	10	$\boxed{\mathbf{11}}$	12	$\boxed{\mathbf{13}}$	14	15
16	$\boxed{\mathbf{17}}$	18	$\boxed{\mathbf{19}}$	20	21	22	$\boxed{\mathbf{23}}$	24	25	26	27	28	$\boxed{\mathbf{29}}$
30	$\boxed{\mathbf{31}}$	32	33	34	35	36	$\boxed{\mathbf{37}}$	38	39	40	$\boxed{\mathbf{41}}$	42	$\boxed{\mathbf{43}}$
44	45	46	$\boxed{\mathbf{47}}$	48	49	50	51	52	$\boxed{\mathbf{53}}$	54	55	56	57
58	$\boxed{\mathbf{59}}$	60	$\boxed{\mathbf{61}}$	62	63	64	65	66	$\boxed{\mathbf{67}}$	68	69	70	$\boxed{\mathbf{71}}$
72	$\boxed{\mathbf{73}}$	74	75	76	77	78	$\boxed{\mathbf{79}}$	80	81	82	$\boxed{\mathbf{83}}$	84	85
86	87	88	$\boxed{\mathbf{89}}$	90	91	92	93	94	95	96	$\boxed{\mathbf{97}}$	98	99

Ahora la pregunta es: ¿serán los números primos infinitos, o habrá algún momento en el que se agoten, y ya no aparezca ningún primo más? O dicho de otro modo: ¿existe algún número natural suficientemente grande, a partir del cual ya no haya ningún número primo mayor?

He ahí una típica *cuestión matemática*. En este caso se encuentra ya decidida, ni más ni menos que por el matemático egipcio Euclides, en el siglo III antes de Cristo. Euclides demostró que los números primos *son* infinitos, es decir: que hay números primos cada vez mayores, y su aparición no se agota nunca (cf. Euclides, *Elementos*, Libro IX, Proposición 20, pp. 226–227 del vol. 2 de la edición de Gredos; y explicada en lenguaje más actual, en Davis y Hersh, *Experiencia matemática*, p. 59).

La demostración de Euclides es bastante sencilla, pero no viene al caso que nos detengamos ahora a analizarla aquí.

A continuación, fijémonos, sin embargo, en las parejas de primos conocidas como *"primos gemelos"*. Los números primos gemelos son parejas de números primos separados sólo por 2 unidades. O dicho de otro modo: números primos que aparecen "en parejas", como el 11 y el 13, por ejemplo, el 17 y el 19, ó el 59 y el 61.

Mientras que los otros números primos están "salteados", sin tener a otro número primo en sus proximidades: como por ejemplo el 23, el 67 ó el 79.

Naturalmente, una cosa es que haya infinitos números primos, y otra cosa muy distinta es que haya, en particular, infinitos números primos *gemelos*. Es decir: que haya infinitos números primos, de este tipo particular que aparece en parejas.

La nueva pregunta en este caso es: ¿habrá infinitos números primos gemelos, o bien llegará un momento en que se agoten, y ya no aparezca ninguna pareja más de primos gemelos? O dicho de otro modo: ¿existe algún número natural suficientemente grande, a partir del cual ya no haya ninguna pareja de primos gemelos mayores que él?

He ahí otra una típica conjetura matemática, que en este caso pertenece a las *no decididas*. En efecto, nadie ha conseguido demostrar, hasta la fecha, si los primos gemelos son infinitos o no. No se sabe. La conjetura de la infinitud de los primos gemelos es un problema matemático abierto.

§ 1.19. El surtido inagotable de conjeturas matemáticas. La matemática es una ciencia viva, y continuamente se están resolviendo cuestiones de este tipo. En algunos casos, se resuelven cuestiones que habían estado siendo investigadas durante siglos.

Eso sí, es preciso tener muy claro que jamás se conseguirán resolver *todas* las conjeturas, o cuestiones matemáticas abiertas. Y ello sucede por dos razones muy poderosas, que son las siguientes.

En primer lugar, la cantidad de cuestiones abiertas es infinita, y el planteamiento de cuestiones nuevas es prácticamente inagotable. En efecto, siempre se nos puede ocurrir proponer nuevas cuestiones, para lo cual basta muchas veces con utilizar pequeñas variantes a partir de una cuestión dada. Por ejemplo, modificando la cuestión sobre la infinitud de los números primos, podemos preguntar: ¿existen infinitos números primos que terminen en "3"? ¿Y en "7"? ¿Y en "37"? ¿Y en "137"? etc.

Y en segundo lugar, sabemos positivamente que nunca se conseguirá diseñar un procedimiento mecánico para obtener soluciones a todos los problemas matemáticos. Es decir: que nunca conseguiremos automatizar *completamente* el razonamiento matemático (tan solo en parte, como de hecho ya se hace). Esto es algo que ha sido demostrado de una forma absolutamente rigurosa y definitiva, como tendremos ocasión de comentar en el Módulo 3.

§ 1.20. Las conjeturas no decididas bajo el platonismo puro. Pues bien, desde la perspectiva del platonismo puro, lo que se considera es que todas las conjeturas matemáticas tienen ya una solución predeterminada, independientemente de que nosotros la lleguemos a conocer algún día o no. Es decir: que todas las conjeturas matemáticas tienen una solución dada, determinada por la propia configuración del universo matemático, esto es, por cómo sea "realmente" ese universo.

Así, los números primos son infinitos, según esto, porque en el universo matemático *hay* infinitos números primos. Al igual que en el Patio de los Leones de la Alhambra *hay* 124 columnas. Al igual que la capital de Francia *es* París. Al igual que al reaccionar un ácido con una base, *se produce* sal más agua.

Y los números primos gemelos serán infinitos o no, según que en el universo matemático los haya o no. Y así con todas las restantes conjeturas matemáticas que quepa plantear.

§ 1.21. La intuición matemática. En matemáticas, hay algunos enunciados que nos parecen intuitivamente verdaderos. Hay otros enunciados que nos parecen intuitivamente falsos. Y finalmente, hay enunciados que no nos parecen ni intuitivamente verdaderos, ni intuitivamente falsos.

Estamos hablando de una intuición en sentido "fuerte". Esto es: como una impresión que, cuando se produce, nos proporciona una seguridad absoluta sobre el enunciado al que se refiere.

Por ejemplo, un enunciado que parece intuitivamente verdadero es que "todo número natural tiene un siguiente" (un *sucesor*). Es decir: que al igual que detrás del 3 va el 4, detrás del 4 va el 5, y detrás del 5 va el 6, pues detrás de cualquier otro número natural, por grande que sea, habrá a su vez otro que le siga, inmediatamente mayor. Este enunciado tiene una fuerte apariencia intuitiva de verdad, y en efecto es verdadero, sin ninguna duda.

También parece intuitivamente verdadero, en este sentido fuerte, el enunciado conocido como *"principio del menor número"*, y que dice que "todo conjunto no vacío de números naturales tiene un menor número". Es decir: que dado cualquier conjunto de números naturales sea el que sea, mientras no se trate de un conjunto vacío, habrá un número que constituya el más pequeño de los pertenecientes a ese conjunto. Y que también es un enunciado verdadero, por supuesto (salvo una pequeña precisión que haremos al respecto, en el Módulo 4).

Por su parte, parece intuitivamente falso afirmar que "no todo número tiene un sucesor" (negación del enunciado anterior); y parece intuitivamente falso, en el sentido que estamos comentando, afirmar que "la suma de dos números pares siempre da 0 como resultado". Enunciados que son, ambos dos, falsos, como no cabía suponer otra cosa.

Sin embargo, no parece intuitivamente verdadero, ni parece intuitivamente falso, en este sentido, que entre el 2 y el 99 haya exactamente 25 números primos. Esto es algo que exige comprobación, o demostración. Como tampoco parece intuitivamente verdadero, ni parece intuitivamente falso, por ejemplo, que los números primos sean infinitos, cosa que tuvo que demostrar Euclides en su momento.

Como tampoco parece intuitivamente verdadero, ni intuitivamente falso, que los primos gemelos sean infinitos, cosa que a día de hoy nadie ha demostrado.

§ 1.22. La intuición matemática bajo el platonismo puro. Pues bien: la intuición matemática, según el platonismo puro, desempeña el papel de esa "rendija" por la cual nos asomamos al universo matemático. Es decir: la intuición matemática sería el mecanismo a través del cual conseguimos captar información sobre la configuración del universo matemático.

Dicha captación se produce, según esta teoría, a través de impresiones puntuales, que nos revelan alguna característica parcial de ese universo, como si fuera en una fotografía instantánea, o *flash*. Y cada vez que un enunciado matemático nos parece intuitivamente verdadero es, supuestamente, porque se ha producido una captación de estas características.

Mientras que el resto de enunciados matemáticos, que no nos parecen intuitivamente verdaderos, ni tampoco intuitivamente falsos, corresponden a la parte del universo matemático que no podemos "ver" directamente. Una parte, por consiguiente, que tenemos que adivinar o reconstruir utilizando los fragmentos que sí conocemos. Y es a esa "reconstrucción", a partir de los enunciados intuitivamente verdaderos, a la que llamamos *"prueba"* o *"demostración"*.

El principal problema de esta explicación, como venimos diciendo, es el de especificar la naturaleza de ese mecanismo que teóricamente nos estaría permitiendo obtener conocimiento de un universo separado. ¿Se trata de un *"sexto sentido"*? ¿Tiene una implementación fisiológica en nuestro organismo? ¿Va ligado a una *cadena causal* (cadena de causas físicas), mediante la cual se produzca la transmisión de información en cuestión?

Resulta innegable, desde luego, que existe la intuición matemática, en este sentido fuerte en que la estamos tomando aquí. Y es un hecho que el ser humano, al menos en determinados ambientes culturales, responde a la instrucción matemática, manifestando, según avanza en el proceso de aprendizaje, una concordancia creciente con los contenidos que va a asimilando. No cabe duda, en definitiva, de que la intuición matemática está ahí, que desempeña un papel fundamental en el desarrollo de esa ciencia, y que es un hecho que exige una explicación científica clara.

Así como también requiere explicación la ubicuidad de tantas entidades matemáticas fundamentales como hay, que aparecen una y otra vez en contextos enormemente diversos e insospechados. Como el número π, por ejemplo, que resulta ser pieza clave en incontables cuestiones matemáticas de áreas totalmente dispares (geometría, trigonometría, análisis matemático, teoría de números, estadística y probabilidad). O la llamada "identidad de Euler", que muestra una asombrosa relación entre los cinco números más importantes de toda la matemática ($e^{\pi i} + 1 = 0$), y cuya belleza ha sido comparada a los sonetos de Shakespeare.

Pero aun reconociendo estos enigmas, es difícil aceptar que la solución a los mismos pase por postular la existencia de un universo separado, y de todo un mecanismo perceptivo específico que supuestamente nos estuviera conectando con él.

§ 1.23. El platonismo puro en Kurt Gödel. A pesar de la dedicación a los fundamentos de la matemática de Gödel, y de que conocía perfectamente las alternativas filosóficas existentes en su momento, este autor se decantó por el platonismo puro, al menos en parte de sus escritos. Y la defensa que hace de esta postura es tan nítida y contundente, que se ha hecho habitual utilizarla como principal referencia de la misma.

Gödel publicó muy poco en vida. Pero a sus publicaciones hay que sumar miles de páginas de manuscritos inéditos, escritos en un antiguo sistema de taquigrafía alemana, buena parte de los cuales están dedicados a la filosofía de la matemática.

En inglés se han completado hasta cinco volúmenes de sus *Collected Works* ("Obras completas"), incluyendo los artículos que Gödel publicó mientras vivía, así como parte de sus manuscritos inéditos, y la correspondencia conservada.

En español disponemos de una edición de sus *Obras completas*, que reúne el conjunto de artículos publicados en vida, así como otra, titulada *Ensayos inéditos*, que es una pequeña selección de la parte que había quedado inédita, precedida de un amplio estudio introductorio del profesor Francisco Rodríguez Consuegra.

Entre las contribuciones más destacadas de Gödel a la filosofía de la matemática, se encuentran sus artículos "La lógica matemática de Russell", de 1944, y "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?", de 1947, ambos incluidos en la edición española de sus *Obras completas* (pp. 297–327 y 340–362 respectivamente; y con distinta traducción se ha vuelto a publicar el primero de ellos, en la revista *Teorema* 25(2), 2006, pp. 113–137). Así como el texto de la denominada "Conferencia Gibbs", que pronunció en los Estados Unidos en el año 1951, y que está traducido al castellano a su vez, en el mencionado volumen de *Ensayos inéditos* (pp. 149–187).

Incidentalmente, un lugar en los escritos de Gödel en que éste se manifiesta *contrario* al platonismo en filosofía de la matemática, y lo ataca con cierta dureza, es un texto de 1933 que puede leerse en el vol. 3 de las mencionadas *Collected Works*, p. 50 (y comentario por S. Feferman en pp. 39–40).

§ 1.24. Preliminares a las lecturas de Gödel. A continuación vamos a reproducir dos textos en los que Gödel defiende la posición platónica, pertenecientes a dos de las contribuciones que acabamos de mencionar. Para entenderlos correctamente, es conveniente que antes hagamos algunas consideraciones preliminares.

En estos dos textos, y en especial en el primero de ellos, Gödel tiene muy en mente a la teoría de conjuntos. La teoría de conjuntos es, para decirlo con muy pocas palabras, una teoría matemática fundamental, elaborada a partir de la noción de *conjunto* y la relación de *pertenencia*.

La noción intuitiva de *conjunto* la tenemos todos, como *reunión de cosas*. Por ejemplo, un conjunto de manzanas, un conjunto de ovejas, un conjunto de edificios, etc. Y la *pertenencia* no es más que lo que liga una cosa (manzana, oveja, edificio, o lo que sea) a cada conjunto de cosas del que forma parte.

A partir de estas nociones tan básicas y elementales, se desarrolla una larga disquisición matemática, en la que se exploran todas las posibilidades de variación y combinación de estas nociones. Y el resultado es una teoría matemática vasta y compleja, que es la que se conoce con el nombre de "teoría de conjuntos".

La aparición de esta teoría y sus avatares iniciales están íntimamente ligados con la famosa crisis de fundamentos, que da título a esta asignatura. En efecto, después de algunos años de trabajo laborioso y fructífero en dicha teoría, se descubrieron *paradojas*, que mostraban que de la teoría se podían derivar distintas contradicciones. Esto es: que la teoría era inconsistente. Ello dio lugar a la crisis, como vamos a comentar en detalle más adelante.

A raíz de aquella crisis, la elaboración de la teoría cambió completamente de rumbo, y empezó a desarrollarse de forma *axiomática*. Es decir: partiendo de unos principios muy generales, que se toman como axiomas, y derivando toda la teoría posterior a partir de esos principios.

De esta forma se trataba de evitar que surgieran nuevas paradojas, ya que si esos principios generales eran absolutamente ciertos y seguros, habría de resultar imposible derivar de ellos contradicción alguna.

El primero de los textos Gödel menciona también la *"teoría de conjuntos transfinita"*, que no es ni más ni menos que la parte de la teoría de conjuntos que se encarga del estudio de los conjuntos infinitos. Una de las primeras cosas que se comprueba en esa parte de la teoría de conjuntos, es que los conjuntos infinitos no son todos iguales, sino que los hay de tamaños muy distintos. Es decir: que entre los conjuntos infinitos, hay algunos de tamaño mayor que otros. El conjunto de los números naturales, en particular, es tan sólo el más pequeño de todos ellos, es decir: el más pequeño de entre los conjuntos infinitos. (Una introducción asequible a este tema se puede encontrar en Hunter, *Metalógica*, pp. 31–41.)

Y la llamada *"hipótesis del continuo"*, a la que también se refiere Gödel en el primero de los textos, consiste en una conjetura sobre la existencia de conjuntos de determinados tamaños intermedios, entre unos conjuntos infinitos y otros. Conjetura ésta que *no* se puede decidir, por cierto, sobre la base de los axiomas de la teoría.

§ 1.25. Lectura de Gödel ("El problema del continuo"). Uno de los textos clave en los que Gödel expone su filosofía de la matemática es el artículo titulado "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?", y que publicó en 1947 el *American Mathematical Monthly*.

Dicho artículo fue incluido en la compilación de Benacerraf y Putnam, *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, cuya 1ª edición apareció en 1964. Para su publicación en dicha compilación Gödel escribió un Suplemento, del cual está tomado el fragmento que reproducimos a continuación.

> "(...) Por otro lado, los objetos de la teoría de conjuntos transfinita (...) está claro que no pertenecen al mundo físico e incluso que su conexión indirecta con la experiencia es muy remota (debido principalmente al hecho de que los conceptos de la teoría de conjuntos tienen un reducido papel en las teorías físicas de hoy).
>
> "Pero, a pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos. No veo ninguna razón por la cual debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción sensible, que nos induce a construir teorías físicas y a esperar que futuras percepciones sensibles concuerden con ellas y, además, a creer que cuestiones no decidibles por el momento tengan significado y puedan ser decididas en el futuro. Las paradojas de la teoría de conjuntos difícilmente son más preocupantes para la matemática que los engaños de los sentidos para la física. Ya se indicó (...) que pueden darse perfectamente nuevas intuiciones matemáticas que conduzcan a una decisión de problemas tales como la hipótesis del continuo de Cantor.
>
> "Debería observarse que la intuición matemática no tiene que ser concebida como una facultad que proporcione un conocimiento *inmediato* de los objetos que le conciernen. Parece más bien que, como en el caso de la experiencia física, *formamos* también nuestros conceptos de estos objetos a partir de algo más que *es* inmediatamente dado. (...) Lo "dado" que subyace a las matemáticas está, evidentemente, muy relacionado con los elementos abstractos contenidos en nuestros conceptos empíricos. De esto no se sigue, sin embargo, que los datos de este segundo tipo sean algo puramente subjetivo, porque no pueden asociarse con acciones de ciertas cosas exteriores a nuestros órganos sensibles (...). Pueden representar más bien un aspecto de realidad objetiva, pero, en oposición a las sensaciones, su presencia en nosotros puede deberse a otro tipo de relación entre la realidad y nosotros mismos.
>
> "La cuestión de la existencia objetiva de los objetos de la intuición matemática (que, incidentalmente, es una réplica exacta de la cuestión de la existencia objetiva del mundo exterior) no es, sin embargo, decisiva para el problema que aquí discutimos. El mero hecho psicológico de la existencia de una intuición que es lo bastante clara como para producir los axiomas de la teoría de conjuntos y una serie abierta de extensiones de estos basta para dar sentido a la cuestión de la verdad o falsedad de ideas tales como la hipótesis del continuo de Cantor.".
>
> (Kurt Gödel, "¿Qué es el problema del continuo de Cantor? — Suplemento", *Obras completas*, pp. 359–361.)

§ 1.26. Lectura de Gödel (Conferencia Gibbs). En 1951, Gödel fue distinguido por la *American Mathematical Society* con la invitación a pronunciar, en su Congreso Anual, la "Conferencia Gibbs" (así llamada en honor del matemático estadounidense Josiah Willard Gibbs). El título de la conferencia fue "Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas", pero el texto se conoce generalmente como "Conferencia Gibbs" a secas.

Se conserva el manuscrito original en inglés, con numerosas tachaduras, reconstruido por Hao Wang para el volumen 3 de las *Collected Works* ("Obras completas"), y también, de forma independiente, por Rodríguez Consuegra, para la selección en español titulada *Ensayos inéditos.* Es de esta última edición de la que hemos extraído el fragmento siguiente.

> "Sin embargo, me parece que a pesar de ello hay un ingrediente (...) que es perfectamente correcto y de hecho revela la verdadera naturaleza de la matemática. A saber: es correcto proclamar que las proposiciones matemáticas no dicen nada acerca de lo físico o psíquico que exista en el espacio y el tiempo, porque son ya verdaderas en virtud del significado de los términos que aparecen en ellas, con independencia del mundo de las cosas. Lo erróneo, sin embargo, consiste en decir que el significado de los términos (o sea, los conceptos que éstos denotan) sea algo hecho por nosotros y consista meramente en convenciones semánticas. Creo que la verdad es que esos conceptos forman una realidad objetiva por sí mismos, la cual no podemos crear o cambiar, sino sólo percibir o describir.
>
> "Por tanto, las proposiciones matemáticas, aunque no digan nada acerca de la realidad espacio-temporal, pueden sin embargo poseer un contenido objetivo sólido, en la medida en que digan algo acerca de las relaciones entre los conceptos.
>
> "(...) nuestro conocimiento del mundo de los conceptos puede ser tan limitado e incompleto como el que tenemos del mundo de las cosas. Es cierto e innegable que este conocimiento es (en ciertos casos), no sólo incompleto, sino incluso indiferenciado. Esto tiene lugar en las paradojas de la teoría de conjuntos, que se aducen frecuentemente como una refutación del platonismo, aunque en mi opinión de forma completamente injusta. Nuestras percepciones visuales contradicen a veces nuestras percepciones táctiles, por ejemplo en el caso de una vara inmersa en agua, pero nadie en su sano juicio concluiría de ello que el mundo externo no existe.
>
> (...)
>
> "Una forma posible de psicologismo admite que la matemática investiga las relaciones entre los conceptos, y que los conceptos no pueden crearse a voluntad, sino que nos son dados como una realidad que no podemos cambiar; sin embargo, afirma que tales conceptos son sólo estructuras o disposiciones psicológicas en nuestras mentes, es decir, que no son nada, sino las ruedas de nuestra máquina pensante, por así decir. (...)
>
> "La esencia de esta concepción psicologista es que el objeto de la matemática no es nada más que el conjunto de leyes psicológicas según las cuales

los pensamientos, las convicciones, etc., tienen lugar en nosotros, en el mismo sentido en que el objeto de otra parte de la psicología es el conjunto de leyes según las cuales las emociones tienen lugar en nosotros. La principal objeción a esta concepción que se me ocurre en este momento es que si fuera correcta no poseeríamos conocimiento matemático alguno. No sabríamos, por ejemplo, que $2 + 2 = 4$, sino sólo que nuestra mente está constituida de tal forma que acepta la verdad de tal enunciado, y que no habría entonces razón alguna para que, a través de otra línea de pensamiento, no pudiéramos llegar a la conclusión opuesta con el mismo grado de certeza. Por tanto, quienquiera que afirme la existencia de algún dominio, por pequeño que sea, de proposiciones *matemáticas* que *sepamos* ciertas, no puede aceptar esta concepción.

(...)

"Tengo la impresión de que tras suficiente clarificación de los conceptos en cuestión será posible conducir estas discusiones con rigor matemático, y de que el resultado será entonces que (bajo ciertas hipótesis que difícilmente pueden negarse —en particular la hipótesis de que existe absolutamente algo como el conocimiento matemático—) la concepción platónica es la única sostenible. Con ello me refiero a la concepción de que la matemática describe una realidad no sensible, que existe independientemente tanto de los actos como de las disposiciones de la mente humana, y que es sólo percibida por ella, aunque probablemente de forma incompleta".

(Kurt Gödel, "Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas" (Conferencia Gibbs), *Ensayos inéditos*, pp. 165—169.)

§ 1.27. El dilema de Benacerraf. En 1973, el filósofo francés, profesor de la Universidad de Princeton, Paul Benacerraf, publicó en el *Journal of Philosophy* un artículo titulado "Mathematical truth", que ha tenido una notable influencia en el desarrollo de la filosofía de la matemática en las últimas décadas. Este artículo se encuentra recogido en el ya citado recopilatorio *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, que editó el mismo Benacerraf, junto con Hilary Putnam, y ha sido publicado en castellano, en el año 2004, por la revista *Ágora*.

En dicho artículo, Benacerraf planteó la existencia de una disyuntiva fundamental en cuanto a dos de los objetivos básicos que persigue la filosofía de la matemática. Una disyuntiva que ha acabado siendo conocida como "dilema de Benacerraf", y que es la siguiente.

Sin duda, dos de los objetivos básicos de la filosofía de la matemática, en efecto, son la *semántica* y la *epistemología* de las teorías matemáticas. Es decir: por una parte, elaborar una buena teoría semántica, que dé cuenta del lenguaje en el que están expresadas las teorías matemáticas. Y por otra, encontrar una explicación epistemológica aceptable, que dilucide la clase conocimiento que tenemos de dichas teorías.

Pues bien: según argumenta Benacerraf, las filosofías ensayadas hasta entonces (hasta el momento de escribir él su artículo), sólo habían conseguido cumplir satisfactoriamente uno de estos dos objetivos *a expensas del otro*. Esto es: o bien tenían una buena semántica, pero una débil epistemología, o bien les sucedía exactamente lo contrario; pero ninguna habría conseguido cubrir con éxito los dos frentes.

El platonismo puro constituye un ejemplo típico de filosofía de la matemática con una buena semántica, al menos aparentemente, y una mala epistemología. Su semántica tiene de bueno que se adapta perfectamente al uso lingüístico habitual, y por lo tanto, cabe esperar que pueda ser explicada de forma por entero paralela a la del resto del lenguaje natural. Su epistemología es más bien poco convincente, como ya hemos argumentado de sobra.

Por el contrario, un ejemplo típico de filosofía de la matemática que proporciona una epistemología aceptable, pero falla en la explicación semántica, es la concepción formalista, de la que nos ocuparemos en el Módulo 3. De acuerdo con esta concepción, para decirlo con pocas palabras, la matemática es una mera manipulación de símbolos, o se debe representar como una mera manipulación de símbolos, sometidos a un complejo conjunto de reglas, convenientemente especificado.

La concepción formalista exige reconstruir las distintas teorías matemáticas, de tal modo que se explicite el entramado de reglas que corresponde a cada una. Y después de efectuada la reconstrucción, el significado de los términos matemáticos pasa a ser una complicada función, relacionada con el entramado de reglas correspondiente. En cualquier caso, algo bastante enrevesado, que poco tiene que ver con el uso lingüístico habitual que hacemos de esos términos.

Sin embargo, la fundamentación epistemológica de la matemática bajo la concepción formalista es excelente, porque la sencilla razón de que no hay compromiso ninguno con la existencia de los objetos matemáticos, ni de entidades abstractas. En efecto, como veremos, bajo esta concepción las teorías matemáticas se sustentan básicamente en la constatación de que determinadas manipulaciones simbólicas concuerdan con las reglas prefijadas, y punto.

He aquí por tanto dos filosofías de la matemática, platonismo y formalismo, que ejemplifican el dilema descrito por Paul Benacerraf: una de ellas consigue una buena semántica, a cosa de la epistemología, y en la otra sucede exactamente lo contrario.

El dilema de Benacerraf ha constituido un notable acicate para la investigación en filosofía de la matemática en las últimas décadas. Han sido varios los filósofos que han tenido como motivación de su trabajo el deseo expreso de salvar el escollo, tratando de confeccionar una teoría filosófica que cumpla satisfactoriamente los dos objetivos en cuestión. Así por ejemplo cabe citar a Hartry Field (*Science without Numbers*, p. 98 y p. 126, Nota 66), Philip Kitcher (*The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 59), Penelope Maddy (*Realism in Mathematics*, pp. 36–45) o Michael Resnik (*Mathematics as a Science of Patterns*, p. 83), autores a quienes trataremos en el Módulo 6 (cf. § 6.11–§ 6.14 y § 6.18–§ 6.19). Y también a Mark Steiner, de quien nos vamos a ocupar inmediatamente.

Hasta qué punto se haya conseguido o no, es decir, hasta qué punto el dilema de Benacerraf siga vigente, es algo incierto. Como tampoco ha faltado quien haya recusado el dilema desde el principio, tachándolo de “falso dilema”, o “dilema inexistente”, por distintas razones, en las que ya no vamos a entrar aquí. (Véase, por ejemplo, Maddy, P., “Perception and intuition in mathematics”, en la compilación de W. D. Hart (ed.) *The Philosophy of Mathematics*, pp. 114–141.)

§ 1.28. El platonismo en Mark Steiner. En el mismo año y revista en que apareció el artículo de Benacerraf, se publicó también un artículo de Mark Steiner, titulado "Platonism and the causal theory of knowledge", después reimpreso, con leves modificaciones, en su libro de 1975, *Mathematical Knowledge*.

Steiner fue el primero en reaccionar al reto de Benacerraf (que ya conocía por versiones del trabajo previas a la publicada), identificándolo específicamente como un "dilema", y proponiéndose la tarea de resolverlo. Además Steiner emprende una reivindicación del platonismo gödeliano, si bien en una versión ciertamente suavizada, que tiene diferencias importantes con respecto a la posición que acabamos de ver en el lógico austriaco.

Steiner parte de la consideración de la intuición matemática como "una facultad, análoga a la percepción sensorial, para adquirir conocimiento matemático" (*Mathematical Knowledge*, p. 121). Propone un estudio empírico serio de dicha facultad, para avanzar en nuestro conocimiento de la misma, y puntualiza que a través de esta percepción no se captarían objetos matemáticos individuales, sino *estructuras matemáticas* en su conjunto (p. 134). Esto es, que, por ejemplo, no se podría obtener una captación aislada del número 2, individualmente, sino sólo de la estructura completa de los números naturales, con su relación de orden entre ellos, y dentro de esa estructura, al número 2 como parte integrante de la misma.

En un libro más reciente, publicado en 1998, Steiner afronta a su vez el problema de la utilidad de la matemática para la ciencia natural: *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*. En este libro Steiner plantea una *"hipótesis empírica"* de alto nivel, para justificar el empleo que se hace de la matemática en el resto de las ciencias. A saber: la coincidencia entre las principales categorías cognitivas del ser humano y la estructura fundamental del universo en el que vivimos.

Así, según afirma Steiner,

> "el nuestro parece ser un universo intelectualmente asequible, un universo que permite a nuestra especie descubrir cosas sobre él"
> (Steiner, *The Applicability*, p. 8.)

Y eso explicaría que aplicando nuestras categorías cognitivas, y en especial los conceptos matemáticos, a la realidad que nos rodea, hayamos obtenido un éxito tan notable en física y en el resto de las ciencias naturales.

La tesis de fondo que subyace a esta filosofía es claramente *antropocéntrica*: el universo está estructurado de alguna manera en armonía con la especie humana, que se encuentra en una situación "privilegiada" para conocer la esencia de las cosas (*The Applicability*, p. 55).

Además, esta forma de platonismo tiene cierto corte *psicologista*, del tipo del que rechazaba Gödel en la "Conferencia Gibbs": los objetos matemáticos aparecen en definitiva como un reflejo, aunque muy elaborado, de la estructura de nuestras propias facultades cognitivas. Ello hace que, estrictamente hablando, no sean *"independientes"* de la mente humana. Aunque tampoco constituyan construcciones deliberadas, que podamos manejar a voluntad, ya que sus patrones fundamentales vendrían dados por la propia constitución fisiológica de nuestro sistema cognitivo.

Otro autor que ha defendido el platonismo en una línea cercana, y en el que Steiner se inspira en buena medida, es Charles Parsons, cuyos principales ensayos están recopilados en su libro *Mathematics in Philosophy: Selected Essays*, de 1983.

La crisis de fundamentos

§ 1.29. Antecedentes de la crisis. La crisis de fundamentos en filosofía de la matemática fue un episodio histórico que se produjo a principios del siglo XX, y que tuvo una influencia grande en el posterior desarrollo de esta rama de la filosofía.

No vamos a hacer en este apartado sino un bosquejo breve y superficial de lo que originó dicha crisis, y ello es así por dos razones: en primer lugar, porque las ulteriores aclaraciones y referencias a la misma, serán constantes a todo lo largo de la asignatura; y en segundo lugar, porque una explicación rigurosa exigiría conocimientos detallados de teoría de conjuntos, análisis matemático y lógica, que no cabe presuponer al conjunto de estudiantes de esta asignatura.

En cualquier caso, durante el siglo XIX se produjeron tres antecedentes fundamentales que contribuyeron, en mayor o menor medida, a crear las circunstancias históricas en las que tuvo lugar dicha crisis: la llamada *"aritmetización del análisis"*, la creación de la teoría de conjuntos por parte de Cantor, y la aparición de la moderna lógica matemática de Frege. Y en cada una de estas tres cuestiones vamos a detenernos brevemente.

§ 1.30. La aritmetización del análisis. La aritmetización del análisis consistió en un esfuerzo progresivo por perfeccionar el rigor en las definiciones y demostraciones matemáticas, a todo lo largo del siglo XIX, y que culminó con la reducción de los diversos *"campos numéricos"* a los números naturales y a determinadas combinaciones de números naturales. (Véase por ejemplo Grattan-Guinness, *Del cálculo a la teoría de conjuntos*, pp. 125—193, o Collette, *Historia de las matemáticas*, vol. 2, pp. 342—385.)

Efectivamente, en matemáticas se investigan varios tipos de números, además de los números naturales que ya conocemos. Entre ellos se encuentran, por ejemplo: los números *negativos* (como el -1, el -2, el -3, etc.); los números *fraccionarios* (como $\frac{1}{2}$, ó $\frac{2}{3}$); y otros aún más intrincados (como el número π, que está entre los llamados *"irracionales"*; o $\sqrt{-1}$, que está entre los denominados *"imaginarios"*).

Al estudio de todos estos tipos de números y de las operaciones entre ellos se dedica el llamado *"análisis matemático"*, que es la continuación natural de la teoría de números, o aritmética. (Una introducción asequible a los distintos campos numéricos puede verse en Pascoe, *Matemática moderna*, pp. 13–19.)

Pues bien: todos esos tipos de números, de los primeros a los últimos, se pueden representar exclusivamente en términos de números naturales y combinaciones de números naturales, según se terminó de demostrar en el siglo XIX. Precisamente de esta época es la frase que se atribuye al matemático alemán Leopold Kronecker: "Dios hizo los números naturales, todo lo demás es obra del ser humano" (cf. McCarty, "Constructivism in Mathematics", pp. 319–320, en la compilación de Irvine (ed.), *Philosophy of Mathematics*).

También en ese siglo se consiguió eliminar del lenguaje matemático los llamados *"números infinitésimos"* (*"cantidades infinitesimales"*, o *"diferenciales"*), ciertas entidades numéricas consistentes en cantidades infinitamente pequeñas pero *constantes*, que al ser incrementadas o restadas a otros números, producían a su vez números "infinitamente próximos" a cualquier número dado.

El estatuto de ese tipo de números había estado en litigio desde su introducción, hasta el punto de merecer las criticas del filósofo Berkeley, que en 1734 denunció la falta de rigor y la inconsistencia que los rodeaban, en su panfleto "The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician" (*The Works of George Berkeley*, vol. 3, pp. 3—60).

Durante el siglo XIX, el trabajo de matemáticos como Cauchy y Weierstrass eliminó la necesidad de apelar a ese tipo de números, elaborando definiciones alternativas de conceptos matemáticos fundamentales que hasta entonces estaban basados en ellos (conceptos como el de *límite*, o el de *continuidad*, que pasaron a ser caracterizados mediante las llamadas *"definiciones epsilónticas"*, que son las que todavía se usan).

Por cierto que muchos años después, en la década de 1960, Abraham Robinson inventaría una forma completamente distinta de volver a introducir los números infinitésimos, esta vez con todo rigor, utilizando el aparato proporcionado por la lógica moderna. El resultado fue una disciplina denominada *"análisis no estándar"*, cuyo uso, sin embargo, como el de sus nuevos "infinitésimos" (ahora llamados *"hiperreales"*), ha quedado restringido a un ámbito bastante especializado.

El caso es que a finales del siglo XIX la sensación por todos los logros conseguidos era exultante, hasta el punto proclamar uno de los matemáticos más eminentes de la época, Henri Poincaré, en el 2º Congreso internacional de matemáticos, celebrado en París con motivo de la Exposición Universal de 1900:

> "El análisis ha quedado actualmente reducido a los números enteros y a sistemas finitos o infinitos de enteros, relacionados entre sí por una red de relaciones de igualdad o desigualdad. Las matemáticas, decimos, han sido aritmetizadas (. . .). Podemos decir que hoy día se ha logrado un rigor absoluto." ("Du rôle de l'intuition et de la loqique en mathématiques", *Comptes Rendus du* 2^{me} *Congrès International des Mathématiciens, Paris, 1900*; citado en Dou, *Fundamentos de la matemática*, p. 58).

(Poincaré se refiere en esta cita a los números *enteros*, es decir, a los números naturales conjuntamente con los negativos, pero igualmente valdría tomar como base sólo a los naturales, ya que la reducción de aquéllos a éstos resulta inmediata.)

§ 1.31. La creación de la teoría de conjuntos. Poco antes de estas palabras de Poincaré, entre 1879 y 1884, Georg Cantor publicaba en los *Mathematische Annalen* su primer tratado, en seis partes, sobre lo que pronto sería conocido como *"Teoría de conjuntos"*: una disciplina completamente nueva, inventada por él, en la que partiendo de la noción de *conjunto* y la relación de *pertenencia*, edificaba toda una rama autónoma de las matemáticas por derecho propio.

Poco a poco se iría poniendo de manifiesto que dicha teoría proporcionaba las herramientas más eficaces para representar de una manera rigurosa la reducción de los distintos campos numéricos, a *conjuntos* de números naturales y a *conjuntos de conjuntos* de números naturales.

Por aquel entonces, Cantor manejaba una idea sumamente sencilla de lo que era un conjunto (o "multiplicidad", "conglomerado"; en alemán *"Menge"* o *"Vielheit"*, entre otros términos):

> "Un conjunto es cualquier colección de objetos distintos y bien definidos de nuestra intuición o nuestro pensamiento, reunidos en un todo".
> ("Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I", *Mathematische Annalen*, 1895; citado en Fraenkel, Bar-Hillel y Levy, *Foundations of Set Theory*, p. 15; una definición de corte similar puede leerse en sus *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*, de 1883, p. 137 de la ed. castellana).

Para nosotros, por ejemplo, un prototipo de conjunto podría ser un *rebaño de ovejas* (reales o ideales): una colectividad de ovejas que, como tal rebaño, constituye una unidad, un nuevo objeto, distinto de cada una de las ovejas que lo componen.

Otro ejemplo sería el conjunto de habitantes de Londres. Entre los elementos de este conjunto está la Reina Isabel II, por ejemplo, y otros muchos más, hasta cerca de 8 millones. Otro ejemplo de conjunto es el de las catedrales católicas de Londres, que en este caso tiene cuatro elementos: *Westminster*, *Saint Paul's*, *Saint George's* y *Southwark*. Otro ejemplo de conjunto es el de las llamadas "virtudes cardinales", cuyos elementos son también cuatro, pero en este caso constituyen objetos abstractos (prudencia, templanza, justicia y fortaleza). Y otro ejemplo de conjunto lo podemos formar de modo más heterogéneo, poniendo a la Reina Isabel II, la catedral de Murcia y la virtud de la templanza (conjunto este último de tres elementos, dispares entre sí).

§ 1.32. La lógica matemática de Frege. Así las cosas, el empeño de varios pensadores, como el matemático alemán Richard Dedekind, y sobre todo el mismo Frege, fue el de tratar de proporcionar un análisis de los propios números naturales en términos de nociones más básicas, al nivel que pueda estar la noción de *propiedad*, la de *conjunto*, o alguna equivalente.

Como veremos con más detalle en el Módulo 2, Frege tenía el proyecto de demostrar que la matemática era reductible a la lógica, y para ello una de las tareas fundamentales era la de representar los números naturales en términos que parecieran absolutamente abstractos y generales. Esto es, en términos *"puramente lógicos"*.

Ya con esa idea, Frege se había dedicado en primer lugar a renovar la teoría lógica existente, con la intención de dotarla de la profundidad y precisión necesarias para poder acometer dicha reducción. Así, en su obra *Begriffsschrift* (*Conceptografía*), de 1879, sentó las bases de la moderna lógica matemática, una disciplina incomparablemente más rica y potente que la lógica silogística, que era la que existía hasta entonces.

Hecho esto, en su segundo libro, *Die Grundlagen der Arithmetik* (*Los fundamentos de la aritmética*), de 1884, Frege planteó el proyecto filosófico de reducción de la teoría aritmética a la lógica, y elaboró una redefinición de los números naturales en términos absolutamente básicos.

Y ya en su obra magna, los *Grundgesetze der Arithmetik* ("Las leyes fundamentales de la aritmética", publicada en 2 volúmenes, el 1º en 1893 y el 2º en 1903), Frege desarrolló en detalle la derivación de los principales teoremas de la aritmética natural y del análisis matemático a partir de esos términos básicos. Para ello utilizó el aparato lógico-formal que él mismo había creado, así como el denominado *"principio de comprehensión"*, del que vamos a hablar inmediatamente.

§ 1.33. El principio de comprehensión. Dada la idea intuitiva de *conjunto* que se manejaba en ese momento, parecía natural suponer que era posible postular libremente la existencia de conjuntos, sin ningún tipo de restricción. Es decir, que enunciando cualquier condición precisa y significativa se determina un conjunto, a saber: el conjunto de todos los objetos que cumplan con la condición especificada.

Dicha suposición es la que se conoce como *"principio de comprehensión"*, y se puede resumir básicamente diciendo que "a cualquier condición precisa y significativa corresponde un conjunto".

El principio de comprehensión fue adoptado explícitamente por Frege, que lo colocó en una versión formalizada, como el 5º axioma de su sistema de los *Grundgesetze*; y al que caracterizó como ley "puramente lógica" (cf. *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 1, Prefacio, y secc. 20; Geach y Black (eds.), *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, p. 138; y cf. también Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, p. 210; y Fraenkel, Bar-Hillel y Levy, *Foundations of Set Theory*, p. 31). También Richard Dedekind, en su propia obra sobre los fundamentos de la aritmética, de 1888, parece asumir la vigencia de este principio y utilizarlo con la consiguiente libertad (*¿Qué son y para qué sirven los números?*, seccs. 1, 2 y 66, pp. 105–106 y 116 de la ed. española).

Por su parte, Cantor fue mucho más precavido al respecto, y además fue uno de los primeros en descubrir las contradicciones que se podían derivar de su propia teoría, si la formación de conjuntos no se restringía adecuadamente (cf. su célebre carta a Dedekind de agosto de 1899, recogida en la antología castellana *Fundamentos*, pp. 259–264; así como las pp. 65–73 y 274–277 de los estudios del profesor José Ferreirós, que acompañan dicha edición; y véase también Hallet, *Cantorian Set Theory*, pp. 33–34 y 126–128).

§ 1.34. El advenimiento de las paradojas. Y es que, en efecto, en el contexto que acabamos de dibujar, aparecieron tres argumentos distintos, relativos a la teoría de conjuntos, que mostraban que era posible derivar contradicciones flagrantes a partir de esa teoría naciente.

El primero de esos argumentos fue publicado en 1897 por el matemático italiano Cesare Burali-Forti, en el *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, y actualmente se conoce como *"paradoja de Burali-Forti"*, o *"paradoja del máximo número ordinal"* (cf. traducción al inglés del artículo original en van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, pp. 104—112).

El segundo argumento fue descubierto por el propio Cantor, que se inspiró en el anterior, y lo comunicó a Dedekind, en su carta de 1899 que acabamos de citar. Este argumento lleva el nombre de *"paradoja de Cantor"* o *"paradoja del máximo número cardinal"*. La carta en cuestión no se publicaría hasta 1932, en la edición de Ernst Zermelo de las *Obras completas* de Cantor (puede consultarse, en inglés y en español, en las obras recién señaladas).

Esas dos primeras paradojas, que no vamos a exponer aquí, afectaban a la formación de conjuntos muy grandes, en la parte más técnica o sofisticada de la teoría. Y no fueron percibidos como inconsistencias que afectaran al conjunto de la teoría hasta pocos años después, cuando apareció el tercero de los argumentos: la paradoja de Russell (cf. Garciadiego Dantan, *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de conjuntos*, pp. 54—74).

La paradoja de Russell fue formulada por Bertrand Russell, en la primavera de 1901, al encontrar una contradicción tan básica y elemental que echaba por tierra todos los fundamentos de la teoría. Una contradicción que invalidaba el 5º axioma formal de Frege, que éste había utilizado como uno de los pilares fundamentales de su sistema; y que obligaba a replantear profundamente la definición intuitiva en la que Cantor se había basado.

§ 1.35. La paradoja de Russell. Fue precisamente reflexionando sobre el argumento de Cantor de 1899, del que ya tenía noticia, como Russell llegó a formular su archiconocida derivación, que a continuación exponemos (cf. Russell, *La evolución de mi pensamiento filosófico*, p. 77).

Al menos aparentemente, hay conjuntos que no pertenecen a sí mismos, mientras que otros sí. Por ejemplo, el

$$\{\text{ conjunto de todos los seres humanos }\}$$

no es un ser humano, y por lo tanto, no pertenece a sí mismo. Pero el

$$\{\text{ conjunto de todas las cosas distintas de las manzanas }\}$$

es él mismo una *cosa distinta de las manzanas*, y por lo tanto, parece que sí debería pertenecer a sí mismo.

Así como el

$$\{\text{ conjunto de todos los conjuntos }\}$$

siendo él mismo un conjunto, parece que también debería pertenecer a sí mismo.

Consideremos ahora el primer tipo de conjuntos, esto es, aquellos que *no* pertenecen a sí mismos. Y sea R (por Russell), el conjunto formado por todos ellos. Es decir, sea por definición:

$$R \quad =_{def.} \quad \{\text{ conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos }\}$$

Si ahora suponemos que R pertenece a sí mismo (abreviadamente, $R \in R$), entonces por definición tendría que ser un *conjunto que no pertenece a sí mismo* (abreviadamente, $R \notin R$), al igual que el resto de elementos de R. Pero ello es imposible. Ahora bien, si suponemos que R *no* pertenece a sí mismo ($R \notin R$), entonces resulta que cumple la condición para pertenecer a R, por lo cual tendríamos que concluir que *sí* pertenece a sí mismo ($R \in R$). Lo cual tampoco puede ser.

De de cada suposición llegamos a la contraria, lo que constituye una contradicción:

$$R \in R \qquad \text{si y sólo si} \qquad R \notin R$$

Y esta derivación, que es la que se conoce como *"paradoja de Russell"*, basta para desacreditar definitivamente el principio de comprehensión, así como la noción intuitiva de *conjunto* en que dicho principio está basado: *no siempre* se determina un conjunto mediante la enunciación de una condición precisa y significativa. Así lo demuestra la definición de R, que a pesar de ser precisa y significativa no corresponde a un conjunto bien definido.

§ 1.36. La crisis de fundamentos. Russell comunicó su resultado a Frege, en una carta fechada en 1902, a la que éste contestó a los pocos días. En su contestación Frege admitía que:

> "Su descubrimiento de la contradicción me causó la mayor sorpresa y, diría incluso, consternación, ya que ha sacudido la base sobre la cual yo trataba de edificar la aritmética. Parece, entonces, (...) que mi 5º axioma es falso (...). Esto es aún más grave dado que, con la pérdida de mi 5º axioma, no sólo parecen desvanecerse los fundamentos de mi aritmética, sino los únicos posibles fundamentos de la aritmética también.
>
> (...)
>
> "Está a punto de aparecer el segundo volumen de mis *Grundgesetze*. Sin duda tendré que añadir un apéndice en cual tenga en cuenta su descubrimiento. ¡Si es que para entonces tengo ya la forma correcta de hacerlo!"
>
> (cf. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, pp. 124—128; y recogiendo más correspondencia posterior, Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, pp. 130 y siguientes; de estas cartas no hay versiones castellanas completas, al menos que yo sepa.)

Y efectivamente, en un Apéndice al citado libro Frege decía:

> "Difícilmente le puede acontecer a un científico algo más desafortunado que ver cómo se tambalea uno de los fundamentos de su obra, después de que el trabajo ha sido terminado.
>
> "Esta es la posición en la que me colocó una carta del Sr. Bertrand Russell, justo cuando la impresión de este volumen estaba a punto de ser concluida."
>
> (Apéndice al volumen 2 de los *Grundgesetze der Arithmetik*; *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, p. 234; tampoco traducido al castellano.)

A la reacción de Frege pronto se unió la de Dedekind, que ese mismo año decidió suspender la reedición de su libro sobre los fundamentos de la aritmética, por razones muy parecidas:

> "Cuando hace ocho años fui invitado a reemplazar la segunda edición de este escrito, entonces ya agotada, por una tercera, tuve escrúpulos en admitirlo porque entretanto se habían mostrado válidas ciertas dudas sobre la seguridad de importantes fundamentos de mi concepción."
>
> (Prólogo a la 3ª edición de *¿Qué son y para qué sirven los números?*, publicada en 1911 (1ª ed. pub. en 1888 y 2ª en 1893); p. 104 de la ed. española.)

Además, la derivación de Russell hizo llamar la atención sobre los otros dos argumentos anteriores, de Cantor y Burali-Forti, a los que hasta entonces no se había concedido la suficiente importancia. Así como hacia otro grupo de paradojas, las llamadas *"paradojas semánticas"*, entre las que destacaron las de *Richard* (1905), *Berry* (1906), *Grelling* (1908), y la vieja *paradoja del mentiroso*, cuyo interés volvió a suscitarse (cf. Beth, *Las paradojas de la lógica*, pp. 9—27, para todas ellas).

Esas otras paradojas no estaban directamente relacionadas con la teoría de conjuntos (ni surgieron, según parece, a consecuencia de las primeras, cf. otra vez Garciadiego Dantan, *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas"*, pp. 167—190); pero se asociaron enseguida a ellas, dentro del clima de inseguridad que se estaba creando, clima que acabaría siendo conocido históricamente como la "crisis de fundamentos".

Algún tiempo después, ya en la década de 1930, aparecería una sucesión de desconcertantes resultados en lógica, obtenidos en su mayor parte por una generación de lógicos más jóvenes, como Alfred Tarski, Alonzo Church y el propio Kurt Gödel. Estos resultados mostraban limitaciones en la aplicación del método de formalización suministrado por la nueva lógica, por lo que a veces se les denomina los *"resultados limitativos"*. Estos resultados constituyeron otro duro golpe para los estudiosos de los fundamentos de la matemática, y en especial para los seguidores de la escuela formalista, como veremos con mayor detenimiento en el Módulo 3.

Hacia la mitad del siglo XX, casi cinco décadas después de las reacciones de Dedekind y Frege, el gran matemático alemán Hermann Weyl todavía admitía que:

> "Estamos menos ciertos que nunca acerca de los fundamentos últimos de la matemática (y de la lógica). Como todo y como todos en el mundo en que vivimos, tenemos nuestra "crisis". La hemos tenido por casi cincuenta años. Aparentemente no parece obstaculizar nuestro trabajo diario, y sin embargo yo al menos confieso que ha tenido una influencia práctica considerable en mi vida matemática: ha encaminado mis intereses hacia campos que consideraba relativamente "seguros", y ha menoscabado constantemente el entusiasmo y la determinación con los que llevaba a cabo mi trabajo de investigación."
> ("Mathematics and logic", *American Mathematical Monthly*, 1946; citado en Fraenkel, Bar-Hillel y Levy, *Foundations of Set Theory*, p. 4.)

§ 1.37. Reconstrucción de la teoría de conjuntos. La teoría de conjuntos fue reconstruida poco después de la aparición de las paradojas, aunque adoptando formas mucho más sofisticadas. Bajo estos nuevos formatos, se ha seguido desarrollando hasta hoy día en que constituye sin duda una disciplina matemática respetada y fecunda.

Para la reelaboración de la teoría de conjuntos se ensayaron diversos sistemas, cuyas consecuencias prácticas vienen a ser aproximadamente equivalentes. Uno de ellos es la *teoría de tipos* de Russell, de la que hablaremos algo en el Módulo 2. Otros son los sistemas axiomáticos, y entre ellos la *teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel*, que es la que más corrientemente se usa (una introducción asequible a esta última es la *Teoría intuitiva de conjuntos*, de P. R. Halmos.)

Las teorías axiomáticas de conjuntos proceden fijando como punto de partida unos principios muy generales, que se llaman "axiomas", y derivando a partir de ellos toda la teoría posterior. Lo que tales principios enuncian son hechos de carácter muy general acerca de la naturaleza de los conjuntos; hechos que resultan bastante, o totalmente plausibles desde el punto de vista intuitivo, salvo el caso concreto de algunos axiomas especiales.

El más sencillo de todos los axiomas de la moderna teoría de conjuntos es el *axioma de extensionalidad*, que simplemente dice que si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son iguales. Otro axioma, menos evidente, es el *axioma de infinitud*, que postula la existencia de cierto conjunto infinito, dotado de cierta estructura (que viene a ser una réplica de la estructura de los números naturales). Es este axioma de infinitud, combinado con otros, el que permite en la moderna teoría de conjuntos la formación de conjuntos arbitrariamente grandes.

Un ejemplo de axioma que ha sido claramente discutido es el *axioma de elección*, del que hablaremos en el Módulo 4, al tratar del intuicionismo. Y otro axioma un tanto singular, que a veces también se discute, es el *axioma de regularidad* (o *axioma de fundamentos*); éste establece cierto requisito especial, casi con la única finalidad de impedir por decreto que pueda existir ningún conjunto que sea miembro de sí mismo.

La mayor parte de los axiomas recogen ideas sobre los conjuntos que ya se manejaban en los orígenes de la teoría (salvo el de regularidad, por ejemplo, que evidentemente es posterior). La diferencia es que en un momento inicial tales ideas se trataban como consecuencias naturales del concepto intuitivo de *conjunto*, mientras que ahora aparecen con el rango de estipulaciones necesarias. Es decir: ahora se entiende que son estos axiomas los que encierran en sí mismos la definición del concepto matemático de *conjunto* y regulan su uso, lo cual constituye un punto de vista bien distinto.

La paradoja de Russell no puede surgir en la moderna teoría de conjuntos, no sólo por la presencia del axioma de regularidad, sino porque resulta imposible, utilizando el resto de axiomas, introducir el conjunto de Russell (el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos). Así como también resulta imposible introducir el conjunto de todas las cosas que no son manzanas, o el conjunto de todos los conjuntos, etc. Estas "colecciones", se dice en el lenguaje de la moderna teoría de conjuntos, *no* constituyen conjuntos, por lo que no pueden formar parte de la teoría.

§ 1.38. Alcance y limitaciones de la teoría axiomática de conjuntos. Y es que en efecto, como vemos, en la teoría axiomática de conjuntos no se puede suponer sin más la existencia de un conjunto cualquiera; sino hay que *"demostrarla"* a partir de los axiomas del sistema que se esté utilizando. Un "conjunto" ha dejado de ser *cualquier colección de objetos reunidos en un todo*, para convertirse en *cualquier colección de objetos que satisfaga los axiomas de la teoría*. La noción de *conjunto* que subyace a la teoría axiomática, es pues muy distinta de la que se manejaba en los orígenes de la teoría.

Esta nueva noción de *conjunto* ya no destila la naturalidad propia de una "noción puramente lógica", que estaba en la base de los tratamientos de Cantor, Dedekind y Frege. La nueva noción de *conjunto* tiene un perfil de concepto eminentemente matemático, regido por postulados matemáticos.

Por lo demás, la teoría axiomática de conjuntos ha conseguido desarrollar hasta sus últimas consecuencias el tan ansiado proyecto de reducir, a partir de los elementos de dicha teoría, el resto de conceptos y teorías matemáticas. Hoy día se considera, en efecto, que la práctica totalidad de los objetos matemáticos (incluyendo los números de todos los campos numéricos), pueden ser representados en términos de conjuntos y combinaciones de conjuntos. Y a su vez, que la práctica totalidad de los teoremas matemáticos, pueden ser establecidos a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos.

Es más: la teoría axiomática de conjuntos se ha ido asentado como el principal pilar en el estudio de los fundamentos de la matemática, junto a la propia lógica. Y se ha convertido en el lenguaje común de las distintas ramas de la matemática, llegando a impregnar de “jerga conjuntista” hasta los libros de texto de matemáticas más elementales, correspondientes a la enseñanza primaria.

MÓDULO 2

El logicismo

El programa logicista de Frege

§ 2.1. Presentación de la posición logicista. El punto de vista *logicista* con respecto a una teoría matemática es aquel que defiende que el único fundamento de esa teoría reside en la lógica. O dicho con otras palabras: que tal teoría matemática consiste meramente en una elaboración, más o menos compleja, a partir del razonamiento lógico puro.

Esto se suele expresar de forma resumida diciendo que esa teoría matemática "se reduce a la lógica". Y el principal objetivo de los defensores del logicismo es mostrar cómo, en efecto, se puede llevar a cabo dicha reducción.

¿Qué cabe entender por "lógica" en este contexto? Aunque habría muchos matices que hacer según diferentes autores, podemos partir de la base, para entendernos, de que la lógica consiste en el conjunto de leyes más básicas y generales que regulan nuestro razonar y discurrir. En ese conjunto de leyes está incluido el *principio de no contradicción*, por ejemplo, que es el principio que nos obliga a rechazar que los enunciados "está lloviendo" y "no está lloviendo" puedan ser verdaderos al mismo tiempo.

Lo que viene a defender el logicismo, en resumidas cuentas, es que las entidades matemáticas existen como consecuencia directa de esas leyes generales. Esto es: que al igual que esas leyes obligan a que no pueda *llover y no llover* al mismo tiempo, obligan también a postular la existencia de determinadas entidades, entre las que se encuentran las matemáticas.

Una de las principales aspiraciones del logicismo es encontrar una caracterización alternativa de cada una de las entidades matemáticas, de tal forma que su naturaleza lógica se haga patente. O lo que es lo mismo: encontrar una caracterización alternativa de las diversas entidades matemáticas, en *"términos puramente lógicos"*.

§ 2.2. Las bases del programa logicista de Frege. El representante por excelencia del logicismo en la filosofía de la matemática contemporánea es Gottlob Frege. Frege fue un matemático alemán, profesor en la Universidad de Jena, profundamente preocupado por los fundamentos de la ciencia a la que se dedicaba.

Queriendo establecer si los enunciados matemáticos tenían o no algún apoyo empírico en sus demostraciones, Frege llevó a cabo una minuciosa investigación sobre la estructura y naturaleza de éstas. Y con el propósito de representar dicha estructura con el máximo rigor, acabó por elaborar un sistema de lógica totalmente nuevo, que es al que está dedicada su primera gran obra, la *Begriffsschrift* (*Conceptografía*), de 1879 (cf. el Prólogo a dicha obra, en *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Y otros estudios filosóficos*, pp. 7–10).

Con la *Conceptografía*, Frege inaugura la teoría que hoy conocemos como *"lógica de primer orden"*, en lo que supuso un avance gigantesco en la materia, sólo comparable al trabajo pionero de Aristóteles. Entre otros logros, Frege consiguió superar en dicha obra el análisis lógico de la proposición en términos de sujeto y predicado, que era el único que se conocía hasta Kant; introdujo los cuantificadores, la lógica de relaciones, y el análisis moderno del universal condicional; unificó la lógica de predicados y la lógica de enunciados en una teoría común, elaboró para dicha teoría el primer sistema formal axiomático, y la delimitó a su vez de la lógica de segundo orden.

El segundo libro de Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik* (*Los fundamentos de la aritmética*), de 1884, contiene el grueso de su contribución filosófica al estudio de los fundamentos de la matemática. En esta obra Frege expone su posición logicista: defiende largamente la tesis de que, en particular, la aritmética es reductible a la lógica; critica filosofías de la matemática "rivales"; y propone un análisis de lo que son los números naturales por medio de nociones absolutamente generales, es decir, en lo que parecían ser efectivamente "términos puramente lógicos".

Por último, en la obra magna de Frege, sus *Grundgesetze der Arithmetik* ("Las leyes fundamentales de la aritmética", publicada en 2 volúmenes, en 1893 y 1903, y hasta hoy no traducida al castellano), nuestro autor desarrolló en detalle la derivación de los principales teoremas de la aritmética elemental y del análisis matemático a partir de esos términos básicos, en el seno del aparato lógico-formal que él mismo había diseñado.

La principal obra de referencia sobre el proyecto logicista de Frege es debida, curiosamente, a un eminente intuicionista: Michael Dummett, que no obstante dedicó otras tres largas monografías a explorar distintos aspectos de las contribuciones filosóficas de este pensador (*Frege: Philosophy of Mathematics*, y otros tres títulos que pueden consultarse en la Bibliografía general; ninguno de ellos está disponible en castellano, por el momento).

Aunque Frege mantuvo correspondencia con algunos de los principales pensadores de su época, como Husserl, Hilbert, Russell o Wittgenstein, lo cierto es que la importancia de sus contribuciones no fue apreciada en su momento como se merecía. Tuvo que sufragar de su bolsillo la edición de su obra magna, los *Grundgesetze der Arithmetik*, y uno de sus alumnos, Rudolf Carnap, nos cuenta que en 1913 atendían sus clases sólo tres personas (cf. Carnap, *Autobiografía intelectual*, p. 32).

Hoy día, sin embargo, Frege es reconocido por el conjunto de su obra no sólo como el principal fundador de la lógica matemática, sino también de la filosofía de la matemática, la filosofía de la lógica y la filosofía del lenguaje contemporáneas. Así como en general, de toda la tradición que se conoce como *"filosofía analítica"*. Y dentro de esta tradición, del llamado *"giro lingüístico"*, que consiste en primar la revisión del lenguaje natural como medio de elucidación de los problemas filosóficos, en la idea de que, para enfocar correctamente los problemas, antes hay que intentar detectar los posibles engaños y confusiones producidos por las peculiaridades de nuestro lenguaje (cf. Dummett, *Frege: Philosophy of Language*, pp. 665–669). Un giro lingüístico que, en efecto, dominó la filosofía analítica a lo largo de todo el siglo XX, y que como ya dijimos conoce hoy un cierto declive, quizá en favor de cuestiones de índole epistemológica.

En su momento, la persona que más contribuyó a divulgar la obra de Frege y a promulgar su valía, fue Bertrand Russell. Irónicamente, el mismo que desbarataría su programa, con el descubrimiento de la paradoja que ya conocemos. En una carta al profesor Jean van Heijenoort, autorizando la publicación de la correspondencia entre ambos, Russell dice de su admirado colega:

> "Cuando pienso en actos de gracia e integridad, me doy cuenta de que no conozco ninguno comparable con la dedicación de Frege a la verdad. Estaba Frege dando cima a la obra de toda su vida, la mayor parte de su trabajo había sido ignorado en beneficio de hombres infinitamente menos competentes que él, su segundo volumen estaba a punto de ser publicado y, al darse cuenta de que su supuesto fundamental era erróneo, reaccionó con placer intelectual, reprimiendo todo sentimiento de decepción personal. Era algo casi sobrehumano y un índice de aquello de lo que los hombres son capaces cuando están dedicados al trabajo creador y al conocimiento, y no al crudo afán por dominar y hacerse famosos."
>
> (Bertrand Russell, Carta a Jean van Heijenoort del 23–11–1962, en van Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel*, p. 127; traducción tomada del extracto citado en Mosterín, *Los lógicos*, p. 61.)

§ 2.3. El análisis fregeano de los números naturales. La columna vertebral del programa logicista de Frege es el análisis de los números naturales, al cual está dedicada su obra de referencia en filosofía de la matemática, esto es, sus *Fundamentos de la aritmética* (cf. en especial las secciones de la 45 a la 83).

De dicha obra existen dos traducciones al castellano: la de la editorial Laia, debida al filósofo venezolano Carlos Ulises Moulines, y la de la Universidad Nacional Autónoma de Mexico, en la selección titulada *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Y otros estudios filosóficos*. Resulta preferible la primera, que es la que reproduciremos aquí en los fragmentos abajo citados.

¿Qué ocurre, se pregunta Frege, cuando hacemos un conteo del número de objetos que componen un determinado grupo? Frege razona que al contar los objetos de un grupo, los aspectos individuales de cada objeto nos resultan irrelevantes. Precisamente al efectuar el conteo lo único que tenemos en cuenta de cada objeto es que pertenezca al grupo que estamos considerando.

Así pues, lo importante es que haya algo común a todos los objetos que componen el grupo, cuyos elementos están siendo contados o enumerados. Es decir: que exista una propiedad común, en la que todos los objetos que estamos contando coincidan.

Por poner algunos ejemplos (distintos a los que utiliza Frege), cuando decimos:

"el archipiélago Balear consta de 5 islas"

"el Sistema Solar tiene 8 planetas"

"el Patio de los leones de la Alhambra tiene 124 columnas"

estamos basándonos en un *concepto común* en cada caso, que es el que caracteriza al grupo en cuestión. A saber, respectivamente:

el concepto *ser una isla del archipiélago Balear*

el concepto *ser un planeta del Sistema Solar*

el concepto *ser una columna del Patio de los leones de la Alhambra*

Por lo tanto, siguiendo el razonamiento de Frege, de lo que se predica el número en cuestión es de cada uno de esos conceptos, o propiedades, y no de los individuos que caen bajo ellos. Y la predicación, o atribución numérica, consiste en especificar cuántos individuos caen bajo cada uno de los conceptos seleccionados.

Es la estrategia de trasladar la cuestión inicial sobre la naturaleza ontológica de los números naturales al comportamiento lingüístico de las expresiones mediante las cuales nos referimos a ellos, el modo en que Frege inaugura el giro lingüístico del que hemos hablado (cf. Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, secc. 62, p. 86 de la ed. de Laia; y Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, pp. 111ss.).

De ese modo, los enunciados anteriores podrían ser parafraseados, respectivamente, como:

"el concepto *ser una isla del archipiélago Balear* está ejemplificado exactamente por 5 objetos"

"el concepto *ser un planeta del Sistema Solar* está ejemplificado exactamente por 8 objetos"

"el concepto *ser una columna del Patio de los leones de la Alhambra* está ejemplificado exactamente por 124 objetos"

Incluso en enunciados numéricos aparentemente más variables u ocasionales, también habría involucrado un concepto concreto y bien definido. Por ejemplo si yo pronuncio el enunciado

"Murcia tiene 400.000 habitantes"

y el día en que lo estoy pronunciando es el 28 de enero de 2004, entonces el concepto al que mi enunciado se refiere será

el concepto *ser un habitante de Murcia a fecha de 28.01.2004*

Y por lo tanto mi enunciado podría ser parafraseado diciendo

> "el concepto *ser un habitante de Murcia a fecha de 28.01.2004* está ejemplificado exactamente por 400.000 objetos"

(en este caso, personas, y que por cierto, en esa fecha eran en realidad 401.067 exactamente, según el Padrón municipal del Ayuntamiento de Murcia).

Este mismo análisis, por último, resulta también aplicable a los enunciados donde se atribuye el número 0. Es decir, a aquellos conteos en los que el resultado es que hay 0 objetos en el grupo. Como por ejemplo cuando voy a contar las asignaturas que me faltan para acabar el Grado, y descubro que no me falta ninguna. O en el enunciado

"Venus tiene 0 satélites"

(este ejemplo sí tomado tal cual de Frege), donde la predicación numérica no puede referirse, obviamente, a los satélites de Venus, que no los hay; sino al concepto o propiedad de *ser un satélite de Venus*, que tiene sentido por sí mismo, aunque no haya ningún objeto que lo cumpla. Y es de ese concepto del que se predica, precisamente, que no se encuentra ejemplificado por objeto alguno; o dicho en otras palabras, es de ese concpeto del que se predica que el número de objetos que lo ejemplifican es igual a 0.

§ 2.4. La noción de "extensión de un concepto" y la clasificación universal de todos los conceptos. En *Los fundamentos de la aritmética* Frege no habla en términos del "conjunto de objetos" que satisfacen una determinada propiedad, o concepto, sino que se refiere a la *"extensión del concepto"* (en alemán, *Umfang eines Begriffes*). Pero es claro que la extensión abarcada por un concepto, es decir, el dominio en el que ese concepto se extiende, coincide precisamente con el conjunto de todos los objetos que participan de él. Esto es, coincide precisamente con el conjunto de todos los objetos que satisfacen el concepto en cuestión.

Resulta curioso, en cualquier caso, que Frege rehúsa detenerse a explicar la noción de *extensión de un concepto*, dando su significado por sabido. Y lo hace en lo que cabría leer como un titubeo, casi imperceptible, presagio del desastre al que acabaría conduciendo la utilización de esa noción (cf. secc. 68, nota al pie nº 13; y secc. 107, hacia el final de la obra).

A continuación Frege pasa a considerar una forma de clasificación de todos los posibles conceptos, atendiendo al tamaño de sus extensiones, o conjunto de objetos que satisfacen a cada uno. Es decir: una forma de clasificación de todos los posibles conceptos atendiendo al número de objetos por los que cada uno de ellos se encuentra ejemplificado.

El primer grupo de conceptos, por lo tanto, será el de aquellos que no se encuentran ejemplificados por ningún objeto; es decir, el de aquellos conceptos con *extensión vacía.* Como por ejemplo, el concepto *ser un satélite de Venus.*

A continuación vendrá el grupo de conceptos que se encuentran ejemplificados exactamente por un objeto; es decir, el de aquellos conceptos con *extensión unitaria*, o que cuentan con un único objeto en su extensión. Un ejemplo de este otro grupo sería el concepto *ser un satélite natural de la Tierra*).

A continuación vendrá el grupo de conceptos con 2 objetos en su extensión; luego el de 3; y así sucesivamente.

Para designar a los conceptos que pertenecen a cada uno de estos grupos inventa Frege el término *"equinuméricos"* (en alemán, *gleichzahlig*), queriendo decir que tienen la misma cantidad de objetos en sus extensiones respectivas. O lo que viene a ser lo mismo, pero puesto en terminología más moderna: que corresponden a conjuntos con el mismo número de elementos (lo que hoy se conoce como *"conjuntos equipolentes"*).

Así pues, todos los conceptos del grupo 0 son equinuméricos entre sí. También son equinuméricos entre sí los conceptos del grupo 1. Y así sucesivamente.

§ 2.5. El Principio de Hume. En este punto, Frege nos hace notar una interesante observación, y es que para comprobar que dos conceptos son equinuméricos, o pertenecen al mismo grupo, no necesitamos contar el número de objetos que componen la extensión de cada uno. Basta con ir emparejando los elementos respectivos, a ver si conseguimos que no quede ninguno sin emparejar.

Es lo que se llama una *"correspondencia biunívoca"* (o *"biyectiva"*) entre dos conjuntos: un emparejamiento entre los elementos de uno y otro conjunto, en el que cada elemento tiene una única y exclusiva pareja en el otro, y no queda sin emparejar ningún elemento de uno ni otro.

Claro está que cuando es posible establecer este tipo de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos, es porque tienen el mismo tamaño, es decir, porque tienen el mismo número de elementos. Como el propio Frege explica, con toda claridad,

> "Si un camarero quiere estar seguro de que pone sobre la mesa igual número de cuchillos que de platos, (. . .) basta con que coloque a la derecha de cada plato un cuchillo, de modo que cada cuchillo de la mesa se encuentre justo a la derecha de un plato."
> (Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, secc. 70, p. 93 de la ed. de Laia.)

Y éste es el llamado *"Principio de Hume"*, que Frege retrotrae al conocido filósofo escocés (cf. *Los fundamentos de la aritmética*, secc. 63; Hume, *Tratado de la naturaleza humana* (1739), Parte 3ª, secc. 1ª, p. 173 de la ed. española; y para una formulación anterior, mucho más elaborada, cf. Galileo, *Dos nuevas ciencias* (1638), "Jornada 1ª", pp. 61–62 de la ed. en castellano). Este es el principio en el que se apoyará Frege para dar una definición de los números naturales que no utilice a los propios números naturales en la definición.

§ 2.6. La definición del cero. Hecho todo esto, Frege se encuentra ya en condiciones de proporcionar una definición exacta y contundente de lo que son los números naturales. Además, lo va a hacer de tal manera que la definición de cada nuevo número descanse sobre el anterior, para que la existencia infinita de todos ellos quede garantizada por la propia lógica del proceso.

Para ello empieza planteándose la definición del número 0, que va a ser la base de toda su construcción. Y la idea de Frege es muy sencilla: tomar como definición del 0 al conjunto de todos los conceptos que tienen una extensión vacía; es decir, al conjunto de todos los conceptos que tienen 0 objetos en su extensión.

El número 0 será por tanto identificado con un gigantesco conglomerado de conceptos. Pero un conjunto, o conglomerado de conceptos considerado como una unidad, es decir, considerado como un objeto en sí mismo.

Entre los conceptos pertenecientes a dicho conglomerado estará el de *ser un satélite de Venus*, por ejemplo; y todos los que, como él, no se encuentran ejemplificados por objeto alguno.

Una vez hecho esto, Frege da un paso más, porque necesita encontrar un procedimiento para poder caracterizar dicho conjunto de conceptos de una forma autónoma, sin mencionar en la definición al propio número 0, que es lo que está tratando de definir. A tal efecto Frege sugiere escoger, de entre todos los conceptos con extensión vacía, uno en particular, que venga a servir como representante canónico de todos ellos.

El concepto elegido por Frege para desempeñar este cometido es

el concepto *ser distinto de sí mismo.*

Es decir: aquella propiedad que satisface un objeto si y sólo si es diferente de sí mismo.

Resulta patente que no va a existir ningún objeto que pueda satisfacer dicho concepto. Y lo que es más interesante: se trata de un concepto que expresa una relación puramente "lógica", la negación de la relación de igualdad. Y además sabemos que no va a existir ningún objeto que lo satisfaga, por razones puramente lógicas también: es imposible que haya un objeto distinto de sí mismo, por razones parecidas, al menos en principio, a las que hacen imposible que llueva y no llueva a la vez, en el mismo lugar y al mismo tiempo. De ambas cosas decimos que son "lógicamente imposibles".

En resumidas cuentas, el concepto *ser distinto de sí mismo* es un concepto con extensión vacía. Y por consiguiente, cualquier otro concepto equinumérico a él, tendrá la extensión vacía también. Eso quiere decir que el conjunto de todos los conceptos equinuméricos al concepto *ser distinto de sí mismo* será precisamente el conjunto de todos los conceptos de extensión vacía.

Por lo tanto Frege puede dar ya una caracterización de ese conjunto, que es el que va a identificar con el número 0, sin necesidad de mencionar al propio 0 en la caracterización. A saber:

> el número 0 es el conjunto de todos los conceptos equinuméricos al concepto *ser distinto de sí mismo.*

O lo que es lo mismo, pero puesto en la terminología de Frege:

> el número 0 es la extensión del concepto *ser equinúmerico al concepto: "ser distinto de sí mismo".*

Ésa la verdadera "esencia", para Frege, del número 0. Y el hecho de que los términos de la definición, y la forma de construcción de la misma, aparezcan como "puramente lógicos", sin apelación a noción empírica alguna, es la prueba de que la naturaleza de este número, como entidad u objeto en sí mismo, es "puramente lógica" también.

§ 2.7. La definición del uno. Frege identifica al número 1, a su vez, con el conjunto de todos los conceptos de extensión unitaria, es decir, con el conjunto de todos los conceptos que tienen exactamente 1 elemento en su extensión.

El número 1 será definido, por lo tanto, como otro gigantesco conjunto, o conglomerado de conceptos, también considerado como un todo en sí mismo. Un conglomerado entre los que estará el concepto *ser un satélite natural de la Tierra*; y todos los demás conceptos que, como él, están ejemplificados exactamente por 1 objeto.

Una vez hecho esto, Frege tiene que buscar también un procedimiento para poder caracterizar dicho conjunto de conceptos de una forma autónoma, sin mencionar en la definición al propio número 1, que es lo que está tratando de definir ahora.

Para conseguirlo, Frege elige también un representante canónico de los conceptos con extensión unitaria. Y el concepto elegido en este caso es uno que se apoya en la construcción precedente, y que es ni más ni menos que

el concepto *ser idéntico al número 0*

Donde, por "número 0", se entiende el objeto que se acaba de definir anteriormente; es decir: el conjunto de todos los conceptos con extensión vacía.

Para entender bien la definición de Frege en este punto tenemos que recalcar lo siguiente. Una vez que hemos admitido la formación de aquel gran conglomerado de conceptos que constituía el número 0, reuniendo a todos los conceptos de extensión vacía en un todo, o en una unidad, adjudicamos al objeto así formado una entidad por sí mismo, que es la identificamos con el número 0.

Sólo hay, por lo tanto, un objeto que sea el número 0, de acuerdo con esta construcción. Y se trata precisamente de ese gran conjunto o conglomerado de conceptos vacíos. Al igual que si decimos, por ejemplo,

"ser idéntico a la Luna"

sólo habrá un objeto que satisfaga eso, a saber, la propia Luna.

Por consiguiente, el concepto *ser idéntico al 0* tiene exactamente 1 elemento en su extensión, que es el propio 0. Y al tener exactamente 1 elemento en su extensión, dicho concepto nos puede servir a su vez como representante de todos los conceptos que tienen también en su extensión exactamente 1 elemento; esto es, como representante de todos los conceptos de extensión unitaria.

En resumidas cuentas, el conjunto de todos los conceptos equinuméricos al concepto *ser idéntico al 0* será precisamente el conjunto de todos los conceptos de extensión unitaria.

Y es así como Frege puede dar una caracterización de tal conjunto, que es el que va a identificar con el número 1, sin necesidad de mencionar al propio 1 en la caracterización. A saber:

> el número 1 es el conjunto de todos los conceptos equinuméricos al concepto *ser idéntico al 0.*

O lo que viene a ser lo mismo, pero puesto en la terminología de Frege:

> el número 1 es la extensión del concepto *ser equinumérico al concepto "ser idéntico al 0".*

Ésa es la verdadera "esencia", para Frege, del número 1. Y el hecho de que los términos de la definición, y la forma de construcción de la misma, basada en la previa construcción del 0, aparezcan también aquí como "puramente lógicos", sin apelación a nociones empíricas, es la prueba de que este otro número natural tiene una naturaleza puramente lógica también.

§ 2.8. La definición del dos y de los restantes números naturales. Después de aceptada la construcción de los números 0 y 1 como objetos en sí mismos, pasamos a definir el número 2, partiendo del concepto

ser idéntico al 0 ó al 1

Obviamente el 0 y el 1 son dos objetos distintos, y son los únicos que satisfacen el concepto de *ser idéntico al 0 ó al 1*. Por lo que dicho concepto puede ser tomado como representante de todos los demás conceptos que tengan también exactamente 2 objetos en su extensión. Al igual que si decimos, por ejemplo,

ser idéntico a la Luna o al Sol

habrá en esta ocasión dos objetos exactamente que satisfagan la condición en cuestión, a saber: la Luna y el Sol.

Es inmediato entonces plantear la definición:

> el número 2 es el conjunto de todos los conceptos equinuméricos al concepto *ser idéntico al 0 ó al 1*

O lo que es lo mismo:

> el número 2 es la extensión del concepto *ser equinumérico al concepto "ser idéntico al 0 ó al 1"*

Y así, resulta claro cómo se pueden seguir construyendo los restantes números naturales, sucesivamente, hasta el infinito.

Es importante notar que este procedimiento de definición de los números naturales garantiza que éstos no se acaben nunca; esto es, que siempre se pueda seguir definiendo números naturales cada vez mayores. Esta propiedad de la construcción de Frege se consigue haciendo reposar la definición de cada número natural, como acabamos de ver, en las definiciones de los números naturales anteriores. Así se consigue que la construcción lógica elaborada sirva de respaldo a la existencia de infinitos números naturales.

§ 2.9. Lectura de Frege (Los fundamentos de la aritmética). Reproducimos a continuación algunos fragmentos de la Introducción y Conclusión de la obra que venimos comentando, *Los fundamentos de la aritmética.*

Cuando Frege habla aquí de "número" a secas, se refiere a los números naturales, a cuya exploración está dedicada la obra. Y cuando menciona los números "quebrados" se refiere obviamente a los fraccionarios (para ése y los restantes campos numéricos, véase la referencia indicada en el Módulo 1, p. 26).

Un juicio "analítico" es para Frege, aquél cuya verdad depende únicamente de leyes lógicas generales y definiciones. Y un juicio "a priori" es el que puede ser probado sin ninguna apelación a los hechos (cf. secc. 3 de *Los fundamentos de la aritmética*).

> "A la pregunta de qué es el número uno, o de qué denota el signo '1', se suele responder: pues una cosa. Y si se hace notar entonces que el enunciado
>
> "el número uno es una cosa"

no es una definición, porque a un lado se halla el artículo determinado y al otro, el indeterminado, y que tal enunciado sólo expresa que el número uno pertenece a las cosas, pero no nos dice qué cosa es, entonces quizá quien nos ha formulado la pregunta nos invitará a que escojamos una cosa cualquiera, a la que decidamos llamar "uno". Pero si todos tuviesen derecho a entender bajo este nombre lo que quisieran, resultaría que el enunciado anterior sobre el uno se referiría a cosas distintas para distintas personas; no habría ningún contenido común a tales enunciados. (...)

"La mayoría de matemáticos tampoco dispondrán de una respuesta satisfactoria a tales preguntas. ¿Pero no es vergonzoso para la ciencia que se halle en este estado de confusión ante el objeto que más le atañe y que es, aparentemente, tan simple? Todavía menos podrá decirse lo que es el [concepto general de] número. Cuando un concepto que está en la base de una gran ciencia ofrece dificultades, es, sin duda, tarea ineludible investigarlo detenidamente y superar estas dificultades, especialmente porque resultará difícil llegar a clarificar completamente los números negativos, quebrados o complejos, mientras siga siendo defectuosa la comprensión de los fundamentos del edificio de la aritmética.

(...)

"Y para refutar la ilusión de que, con relación a los números enteros positivos no existe ninguna dificultad, sino que hay un acuerdo general, me ha parecido bien comentar algunas opiniones de filósofos y matemáticos sobre las cuestiones que aquí entran en consideración. Veremos cuán poco acuerdo puede hallarse, hasta el punto de que aparecen afirmaciones exactamente contrapuestas. (...)

"En consecuencia, mis argumentaciones serán, ciertamente, más filosóficas de lo que a muchos matemáticos puede parecerles adecuado; pero una investigación fundamental del concepto de número resultará siempre algo filosófica. Esta tarea es común a la matemática y a la filosofía.

"Si la colaboración entre estas dos ciencias, a pesar de algunos intentos por ambas partes, no está tan desarrollada como sería de desear y como sería, sin duda, posible, radica esto, según creo, en el predominio de consideraciones psicológicas en filosofía, que penetran incluso en la lógica. (...) Parece incluso que algunos piensan que los conceptos nacen en el alma individual como las hojas en los árboles, y creen que pueden averiguar su esencia investigando su surgimiento y tratando de explicarlo psicológicamente a partir de la naturaleza del alma humana. Pero esta concepción lo aboca todo a lo subjetivo y, si se prosigue hasta el fin, suprime la verdad. Lo que se llama historia de los conceptos es o bien una historia de nuestro conocimiento de los conceptos, o bien de los significados de las palabras. Es frecuente que sólo a través de una gran labor intelectual, que puede durar siglos enteros, se consiga conocer un concepto en su pureza, despojándolo de envolturas extrañas que lo escondían al ojo de la mente.

(...)

"Ahora bien, si las matemáticas no deben admitir ningún auxilio por parte de la psicología, en cambio, no pueden negar su estrecha conexión con la lógica. (Gottlob Frege, Introducción a *Los fundamentos de la aritmética*, pp. 13–19 de la ed. de Laia.)

"Espero haber hecho verosímil en esta obra la idea de que las leyes aritméticas son juicios analíticos y que, por consiguiente, son a priori. La aritmética, por tanto, sería solamente una lógica más extensamente desarrollada, y cada enunciado aritmético sería una ley lógica, aunque una ley derivada. Las aplicaciones de la aritmética en la explicación de la naturaleza serían elaboraciones lógicas de hechos observados; calcular sería deducir. Las leyes numéricas no necesitan (...) una confirmación práctica para ser aplicables en el mundo exterior; pues en el mundo exterior, la totalidad de lo espacial, no hay conceptos ni propiedades de conceptos, ni números. O sea, que las leyes numéricas no son propiamente aplicables a las cosas externas: no son leyes naturales. Pero sí, en cambio, son aplicables a juicios válidos para cosas del mundo exterior: son leyes de las leyes naturales. No afirman una conexión entre fenómenos naturales, sino una conexión entre juicios (...)."
(Gottlob Frege, Conclusión a *Los fundamentos de la aritmética*, secc. 87, p. 111 de la ed. de Laia.)

§ 2.10. Fracaso del programa de Frege. Frege pretendía definir los números naturales como entidades puramente lógicas. Y parecía haberlo logrado, en efecto, con su laboriosa construcción, partiendo únicamente de la ideas de *concepto* y de *extensión de un concepto*.

En *Los fundamentos de la aritmética* Frege dedujo de su definición las propiedades más inmediatas de los números naturales. Y en su obra magna, los *Grundgesetze der Arithmetik* ("Las leyes fundamentales de la aritmética"), llevó a cabo, como ya hemos dicho, una derivación formal rigurosa de los principales resultados de la aritmética natural y del análisis.

Frege mantiene un punto de vista claramente platónico con respecto a los conceptos y a las extensiones de los conceptos. Las extensiones de los conceptos, en particular, es decir, los conjuntos de objetos que caen bajo cada concepto, tienen la consideración de objetos en sí mismas. La extensión de cada concepto es tratada en su conjunto como una unidad, es decir, como un nuevo objeto.

Los números naturales, de hecho, aparecen caracterizados como objetos, pero como objetos que consisten en las extensiones de determinados conceptos.

En *Los fundamentos de la aritmética* Frege adopta implícitamente al principio de que si podemos formular de forma precisa un concepto, también podemos asumir la existencia de su *extensión*, es decir, del conjunto de objetos que lo satisfacen. Dicho en otras palabras, que a cualquier condición precisa y significativa corresponde un conjunto: es el famoso *principio de comprehensión*, del que ya hemos hablado.

El uso de la noción de *extensión de un concepto* por parte de Frege, va íntimamente ligado a la utilización de ese principio; es el mismo principio que luego aparecerá formulado como el 5º axioma formal de los *Grundgesetze*, aunque expresado allí de forma distinta, en términos del recorrido de una función (*Wertverlauf einer Funktion*; véanse: Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, seccs. 69, 76, 77; *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 1, seccs. 3, 9 y 20; así como Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, p. 210; y Fraenkel, Bar-Hillel y Levy, *Foundations of Set Theory*, p. 31).

Al aparecer la paradoja de Russell, el principio de comprehensión quedó completamente desacreditado. Y la existencia de aquellos gigantescos conjuntos, o conglomerados de conceptos, que Frege había dado por sentada basándose en el mencionado principio, se vino abajo. Como también se vino abajo, por las mismas razones, el conjunto de la "totalidad (...) de todas las cosas que pueden ser objeto de mis pensamientos", que había sido postulado con naturalidad por Richard Dedekind en 1888, para demostrar la existencia de un conjunto infinito (*¿Qué son y para qué sirven los números?*, secc. 66, p. 116 de la ed. española).

De este modo, todo el sistema formal construido por Frege en sus *Grundgesetze* se reveló inconsistente, y sus largas y trabajosas derivaciones resultaron invalidadas de un plumazo.

Tras algunos intentos infructuosos por encontrar una solución con la que salvar su sistema, Frege acabó por darse cuenta de que resultaba imposible llevar a cabo la reducción de los números naturales a términos puramente lógicos (al menos por la ruta que él había explorado).

En sus últimos manuscritos, poco antes de morir, Frege escribe, pesimista y frustrado:

> "Mis esfuerzos por aclarar lo que sean los números han conducido a un completo fracaso."
> (1924.)
>
> "(...) Esta expresión ["la extensión de un concepto"] parece designar un objeto a causa del artículo determinado; pero no hay objeto alguno al que así pudiéramos designar correctamente. De aquí han surgido las paradojas de la teoría de conjuntos (...). Y tratando de fundamentar lógicamente los números, yo mismo he caído en esa trampa, al querer considerar los números como conjuntos. (...) Las dificultades a las que nos arrastra esta idiosincrasia del lenguaje son incalculables. (...) En el lenguaje de las matemáticas se pueden evitar aquellos rasgos del lenguaje hablado que, como hemos visto, conducen a errores lógicos. Sin embargo, la influencia del lenguaje hablado es tan grande, que no siempre son evitados."
> (1924/1925.)
>
> "(...) Me he visto obligado a abandonar la opinión de que la aritmética sea una rama de la lógica y por tanto que todo en la aritmética pueda ser probado lógicamente."
> (1924/1925. Gottlob Frege, *Posthumous Writings* ("Escritos póstumos"), pp. 265, 269–270 y 278 resp.; traducción castellana tomada en parte de las citas contenidas en el Prólogo de la edición de *Los fundamentos de la aritmética* de la editorial Laia, p. 12, reproducidas luego en Mosterín, *Los lógicos*, pp. 61–62.)

Otras propuestas logicistas

§ 2.11. El programa logicista en Russell. A pesar del fracaso aparente del programa logicista y de la profunda crisis de fundamentos que desencadenó, el logicismo ha seguido, y sigue hoy día, contando con defensores convencidos. Es decir, ha seguido contando con filósofos dedicados a buscar la manera de reformular el planteamiento de Frege de algún modo que lo haga invulnerable a las paradojas, y a encontrar nuevos argumentos que sustenten la reductibilidad de la aritmética a la lógica.

Curiosamente, el primero de estos filósofos fue el propio Bertrand Russell. Russell plantea una filosofía logicista muy similar a la de Frege, pero desarrollada en gran parte después del descubrimiento de las paradojas; y desarrollada con la firme determinación de llevarla a término a pesar de las paradojas, es decir, resolviéndolas.

A ello dedicó Russell su obra cumbre, escrita conjuntamente con su antiguo profesor, el también matemático y filósofo inglés Alfred North Whitehead: *Principia Mathematica* ("Los principios de la matemática"; publicada en 3 volúmenes, entre 1910 y 1913, y una 2ª edición entre 1925 y 1927; traducción española parcial en Whitehead y Russell, *Principia Mathematica: hasta el *56*).

Los *Principia Mathematica*, además de contener una propuesta detallada para salvar la tesis logicista de las paradojas, desempeñaron también un importante papel en la sistematización y difusión de la nueva lógica formal, convirtiéndose durante muchos años en el principal tratado de referencia sobre la misma.

No hay que confundir esta obra con otra anterior, escrita por Russell como autor único, y titulada en inglés *The Principles of Mathematics* (publicada en 1903, y una 2ª ed. en 1937; y ésta sí traducida al castellano en su totalidad, y en dos versiones distintas, bajo el título *Los principios de la matemática*, cf. la Bibliografía general). Para la fecha de publicación de esta obra anterior, la posición de Russell ante las paradojas no estaba claramente fijada, y su teoría de tipos tan sólo aparece en un Apéndice y formulada de un modo rudimentario. Otro libro de Russell en el que expone su doctrina logicista a un nivel más divulgativo (y escrito por cierto en la cárcel, en 1919), es su *Introducción a la filosofía matemática*, que también está disponible en traducción completa a nuestra lengua.

§ 2.12. El Principio del Círculo vicioso. Siguiendo una sugerencia de Henri Poincaré, Russell diagnostica que el origen de las paradojas es el llamado *"Principio del Círculo vicioso"*:

> "Lo que quiera que involucre la totalidad de una colección no debe ser parte de esa colección."
> (*Principia Mathematica*, vol. 1, p. 37; y con distinta traducción en *Principia Mathematica: hasta el *56*, p. 94).

De acuerdo con este principio, en otras palabras, resulta inaceptable definir un objeto matemático en términos de un conjunto de objetos entre los que se encuentre el objeto definido. Cuando esto ocurre, no quedan correctamente caracterizados ni el objeto que queremos introducir, ni el conjunto de objetos al que pertenece. Las definiciones que proceden de ese modo reciben la denominación de *"definiciones impredicativas"*; y es su presencia en los comienzos de la teoría de conjuntos, según Russell y Poincaré, la causante de las paradojas.

Supongamos, por ejemplo, que la familia Martínez tiene contratado un jardinero a su servicio, jardinero que no tiene ningún parentesco con ellos. En ese caso, la expresión

"el jardinero de la familia Martínez"

no es impredicativa, porque la familia que se utiliza como referencia para identificar al tal jardinero, la familia Martínez, es un conjunto de personas al cual el jardinero no pertenece. Mientras que sí lo sería, sin embargo, la expresión

"el padre de la familia Martínez"

porque dicho padre es necesariamente un miembro de la familia en cuestión, que es la que se está empleando para describirlo.

Claro está que al padre de la familia Martínez lo podemos describir de muchas otras maneras: tendrá una cara, un nombre de pila, un lugar de nacimiento, unos padres a su vez, etc. Es decir: disponemos de otras descripciones, al margen de aquella que hace referencia a la familia de la que es el padre, y a la que por tanto pertenece.

El problema ocurre cuando un objeto matemático sólo puede ser caracterizado por referencia a un conjunto de objetos del cual es uno de sus miembros. Entonces es cuando debemos rechazar, según Russell, que el objeto haya sido correctamente definido, y cuando quedamos desautorizados a postular su existencia.

Así ocurre con

"el conjunto de todas las cosas distintas de las manzanas"

por ejemplo. Este objeto, como conjunto de cosas, se determina por referencia a "todas las cosas que no son manzanas". Y a su vez, el conjunto de "todas las cosas que no son manzanas" se determina por referencia a "todas las cosas", pues es necesario tener delimitado el conjunto de todas las cosas, para poder seleccionar, de entre ellas, las que no son manzanas.

Ahora bien, el supuesto "'conjunto de todas las cosas distintas de las manzanas", si ha de ser él mismo un objeto, será miembro del conjunto de "todas las cosas". Y es por ello que su definición es impredicativa, y resulta ilegítimo, de acuerdo con el principio del círculo vicioso, postular la existencia de un conjunto basándose en dicha definición.

Por lo mismo, siguiendo este principio, tampoco es válido postular la existencia de

"el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos"

al ser impredicativa la condición que se utiliza para delimitar el alcance del conjunto definido. En efecto, dicha condición hace mención al "conjunto de todos los conjuntos", para poder delimitar en él, a los que no pertenecen a sí mismos. Pero a ese conjunto de todos los conjuntos ha de pertenecer el propio conjunto que se intenta caracterizar, por lo que, aplicando el principio del círculo vicioso, dicha caracterización es ilegítima. Es así como el principio del círculo vicioso bloquea la aparición de la paradoja de Russell: porque aplicando este principio, la expresión "el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos" resulta una definición inaceptable.

Por el contrario, muchos otros conjuntos ordinarios siguen siendo válidos de acuerdo con este principio. Como el "conjunto de todas las manzanas", por ejemplo, que se define por apelación a las manzanas, sin que el propio conjunto así introducido sea él mismo una manzana, evidentemente, ni haya sido necesario apelar a ninguna otra totalidad a la que dicho conjunto pertenezca.

§ 2.13. La teoría de tipos. En los *Principia Mathematica* Russell desarrolla un sistema teórico enormemente original, que respeta a la perfección el principio del círculo vicioso; y por tanto está libre, al menos aparentemente, de la amenaza de las paradojas. Se trata de la *"teoría de tipos lógicos"*.

La teoría de tipos consiste en una estratificación del universo de discurso en una jerarquía de niveles, perfectamente diferenciados. En realidad se trata de una doble jerarquía estratificada. La primera jerarquía de niveles corresponde a la denominada *"teoría simple de tipos"*, y consiste esencialmente en la diferenciación de estratos que a continuación se describe:

tipo 0: individuos (objetos simples)

tipo 1: conjuntos de individuos

tipo 2: conjuntos de conjuntos de individuos

...

Esto es: hay un tipo 0, en el que están contenidos todos los individuos. A continuación hay un tipo 1, en el que están contenidos todos los conjuntos de objetos del tipo 0, es decir, todos los conjuntos de individuos. A continuación hay un tipo 2, en el que están todos los conjuntos que contengan objetos del tipo 1, es decir, todos los conjuntos entre cuyos elementos haya conjuntos de individuos. Y así sucesivamente.

Por ejemplo, si entre los individuos del tipo 0 tenemos ovejas, entonces en el tipo 1 tendremos rebaños de ovejas. En el tipo 2 tendremos conjuntos de rebaños de ovejas, por ejemplo, el conjunto de todos los rebaños que pastan en España. En el tipo 3 tendremos conjuntos de conjuntos de rebaños; por ejemplo: el conjunto formado por el conjunto de rebaños de España, el conjunto de rebaños de Italia, y el conjunto de rebaños de Portugal. Y así sucesivamente.

Otro ejemplo lo podemos tomar a partir de las unidades militares. Así, podemos tomar como individuos del tipo 0 a los soldados. A continuación, en el tipo 1 podemos situar a los *pelotones*, que son unidades integradas por varios soldados. En el tipo 2 podemos colocar a las *compañías*, que son unidades formadas por varios pelotones. En el tipo 3 estarían los *batallones*, teniendo en cuenta que un batallón es una unidad militar integrada por varias compañías. En el tipo 4 estarían los *regimientos*, que son unidades formadas por varios batallones. A continuación vendrían las *brigadas*, luego las *divisiones*, y después los *cuerpos de ejército*; y así podríamos seguir definiendo e inventando nuevos tipos indefinidamente.

A esta jerarquía simple de tipos se superpone luego otra, la *teoría ramificada de tipos.* La teoría ramificada de tipos distingue dentro de cada tipo una nueva escala infinita, de *órdenes*, de acuerdo con el nivel a que pertenezcan los objetos utilizados en la definición de cada objeto dado. Sin entrar en detalles sobre el engranaje técnico de este sistema, baste decir que sus reglas de funcionamiento restringen la formación de aquellas expresiones que no respeten la estructura lógica de la jerarquía de tipos.

Así, la jerarquía de tipos impide la formación de expresiones que indiquen, por ejemplo, que un determinado objeto del tipo 1 pertenece a otro del tipo 0. Ello es imposible, dado que en el tipo 0 sólo hay individuos, y son estos, por tanto, los que pueden en todo caso pertenecer a los objetos del tipo 1, que son conjuntos de individuos, pero no al revés. En general, la expresión

$$\text{“}A \in B\text{”}$$

es decir, “A pertenece a B”, sólo es aceptable cuando el tipo del objeto A es inferior al del objeto B.

Cuando una expresión infringe las reglas del sistema, se considera que está mal formada, o que no significa nada, y queda fuera de la teoría. Eso es lo que ocurre, en particular, con la expresión “$R \in R$”, ya que cualquiera que sea el objeto R siempre tendrá el mismo tipo que sí mismo. Y es de esta manera que la teoría de tipos evita que la paradoja de Russell se pueda llegar a producir.

§ 2.14. La derivación de la aritmética dentro de la teoría de tipos. Dentro de este marco teórico, Russell propone una definición de los números naturales directamente inspirada en la definición que había elaborado Frege. El número 1, por ejemplo, está representado por el conjunto de todos los conjuntos unitarios, es decir, por el conjunto de todos los conjuntos con 1 elemento.

Sin embargo, como en la teoría de Russell los conjuntos vienen distribuidos por tipos, los conjuntos unitarios, en particular, serán distintos en cada uno de los tipos de la jerarquía. Por lo tanto, el conjunto de todos los conjuntos unitarios será a su vez distinto en cada uno de los tipos. Y el número 1 que define Russell, aparece así “ramificado” en una infinidad de objetos distintos, cada uno de ellos perteneciente a uno de los tipos de la jerarquía.

Es decir, que en cada tipo lógico, al menos a partir de un determinado nivel, habrá un objeto que haga las veces de “número 1”, y que se comporte como tal. Pero que será distinto al objeto que haga ese mismo papel en el tipo siguiente. Así, aplicando el ejemplo de las unidades militares, el número 1 del tipo 1 sería el pelotón *unitario*, esto es, el pelotón formado por un solo soldado. El número 1 del tipo 2 sería la compañía unitaria (la compañía formada por un solo pelotón). El número 1 del tipo 3 sería el batallón unitario (el batallón formado por una sola compañía). Y así sucesivamente.

Para fundamentar la existencia de los infinitos números naturales, Russell se ve obligado a postular un *axioma de infinitud*, mediante el cual estipula por decreto que existen infinitos objetos. Apoyándose en este principio Russell demuestra la existencia de infinitos tipos lógicos, y demuestra la existencia de infinitos números naturales dentro de cada uno de esos tipos. Además, Russell se ve obligado también a introducir un artificioso *axioma de reducibilidad*, que estipula cierta forma de coordinación, nada evidente, entre los distintos órdenes de cada tipo (cf. *Principia Mathematica: hasta el *56*, pp. 112–117). Y para poder desarrollar el análisis matemático, ha de echar mano del polémico *axioma multiplicativo*, o *axioma de elección*, que ya hemos mencionado, y sobre el que volveremos a hablar en el Módulo 4.

Todos esos ingredientes dotan a la teoría de tipos de un grado de artificialidad que es el que hace dudar de la naturaleza puramente lógica de la dicha teoría.

§ 2.15. La derivación de la aritmética en la teoría axiomática de conjuntos. En la moderna *teoría axiomática de conjuntos*, de la que ya hemos hablado (cf. § 1.37, p. 32), y en la que también se lleva a cabo una reconstrucción de la aritmética natural, así como de la práctica totalidad de las teorías matemáticas, está presente asimismo un grado de artificialidad, que podemos considerar aproximadamente similar al de la teoría de tipos lógicos de Russell.

La construcción de conjuntos, en general, aparece mediatizada por el engranaje de la teoría: la existencia de cada conjunto hay que demostrarla a partir de los axiomas. Aquellos conjuntos gigantescos que habían postulado Frege y Dedekind no pueden definirse, porque no hay forma de hacerlo utilizando los axiomas de la teoría.

En su lugar, para definir a los números naturales, la teoría axiomática de conjuntos escoge unos determinados conjuntos, aparentemente sin nada de particular, pero que técnicamente resultan los más convenientes para desarrollar la teoría. De este modo, el 0 resulta ser el conjunto vacío; $\varnothing$, el 1 es un conjunto cuyo único elemento es el 0 (es decir, $\{ 0 \}$, el conjunto unitario del 0); el 2 es el conjunto cuyos únicos elementos son el 0 y el 1 (es decir, $\{ 0, 1 \}$); y así sucesivamente. A partir de aquí se edifica la llamada *"teoría de los ordinales y cardinales"*, debida al gran matemático y lógico John von Neumann.

En la teoría axiomática de conjuntos también resulta necesario el axioma de infinitud, que se postula sin más; y que tiene el efecto de asegurar que la construcción de los números naturales pueda continuarse hasta el infinito. En la teoría axiomática de conjuntos está presente asimismo el axioma de elección. Y se suele utilizar también el axioma de regularidad, que ya comentamos, para impedir que ningún conjunto pueda ser miembro de sí mismo.

La formulación de esos axiomas queda muy lejos de hacerlos aparecer como verdades lógicas. Más bien revisten el aspecto de postulados matemáticos, que obedecen a una utilidad matemática también. Y es así como son considerados por la mayor parte de autores.

§ 2.16. Otros logicistas notables. La filosofía logicista de la matemática ha tenido otros defensores notables, además de Frege y Russell, y los sigue teniendo. El propio Alfred Whitehead, por supuesto, compartía las tesis que plasmó con Russell en su gran obra conjunta. Y el matemático alemán Richard Dedekind también abrazó una forma de logicismo en su obra de 1888, *¿Qué son y para qué sirven los números?*, a la que ya nos hemos referido.

Después,otros filósofos y lógicos notables, como Carnap, Hempel, Church, Wittgenstein o Quine, han defendido el logicismo en algún momento de su carrera, contribuyendo con sus esfuerzos a profundizar en esta concepción filosófica. Ello no obstante, Wittgenstein por ejemplo cambió radicalmente su visión sobre la fundamentación de la matemática a partir de cierto momento de su vida, adoptando el tipo de perspectiva convencionalista de la que nos ocuparemos en el Módulo 5.

En la actualidad, dos defensores tenaces de la filosofía logicista de la matemática son los profesores Bob Hale y Crispin Wright, cuyas principales aportaciones están contenidas en los siguientes tres libros (ninguno de ellos, por desgracia, traducido aún a nuestra lengua):

C. Wright, *Frege's Conception of Numbers as Objects*, de 1983.

B. Hale, *Abstract objects*, de 1987.

B. Hale y C. Wright, *The Reason's Proper Study: Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, de 2001.

La línea general que siguen estos dos autores es tratar de formular un *principio de abstracción*, que permita estipular la existencia de objetos abstractos, de cualquier tipo, siempre que cumplan unos determinados criterios. Dicho principio sería aplicable también para legitimar la existencia de los objetos matemáticos, como objetos abstractos que son; y substituiría al peligroso principio de comprehensión, que era el que usó Frege, y que tan mal destino tuvo. La formulación de ese principio de abstracción aparece ligada a la investigación del comportamiento lingüístico de los términos que se utilicen para denotar al objeto en cuestión. Así como de la estructura lógica subyacente, siguiendo una metodología de inspiración claramente fregeana también.

No obstante, las dificultades para encontrar una versión satisfactoria de dicho principio son muy arduas, y está por ver cuál sea la recepción que se prodigue a esta propuesta a largo plazo. Una concisa crítica de esta línea de investigación puede encontrarse en el artículo de Dummett, "La existencia de los objetos matemáticos", en la revista *Teorema* 17(2), 1998, pp. 5–24.

MÓDULO 3

El formalismo

Las bases del método formal axiomático

§ 3.1. Presentación de la posición formalista. El punto de vista *formalista* con respecto a una teoría matemática es aquel según el cual esa teoría consiste únicamente en un conjunto de manipulaciones simbólicas, efectuadas de acuerdo con ciertos patrones constantes. Es decir: de tal modo que lo que subyace a la teoría es un entramado de reglas para operar con los signos matemáticos, y transformarlos de una determinada manera, pero sin que dichos signos tengan contenido alguno, ni se refieran a ningún dominio particular de objetos.

La teoría matemática es en definitiva, según esta filosofía, "pura forma", carente de contenido, y de ahí la denominación de *"filosofía formalista"*.

Lo que hay en el fondo de una teoría matemática, según esto, es un mero juego de símbolos. Aprender la teoría consiste en interiorizar las reglas de ese juego, adquiriendo el dominio en su uso. Y cuando calificamos un enunciado matemático como "verdadero", lo que estamos haciendo en realidad es señalar que dicho enunciado resulta conforme con las reglas del juego correspondientes a la teoría en cuestión.

El primer objetivo de la filosofía formalista, en consecuencia, es el de reformular las distintas teorías matemáticas mediante una descripción explícita y detallada del sistema de reglas que supuestamente subyace a cada una de ellas. Una vez que tengamos a la vista esos sistemas resultará patente, de acuerdo con esta filosofía, que en ellos se encierra todo el interés suscitado por las teorías matemáticas correspondientes.

El segundo objetivo básico de los formalistas es analizar las propiedades de tales sistemas, principalmente con vistas a mostrar su consistencia, esto es, la coherencia de las reglas recopiladas, unas respecto a otras.

§ 3.2. Las bases del método formal axiomático. Para describir adecuadamente las reglas o patrones simbólicos que subyacen a una teoría matemática, así como para el estudio de sus propiedades, el formalismo contemporáneo utiliza el llamado "método formal axiomático", que es el que vamos a describir en el presente apartado. Este método consiste a su vez en una combinación de dos métodos o procedimientos matemáticos, de distinto origen y naturaleza: el método formal y el método axiomático.

El método axiomático es muy antiguo, remontándose a Aristóteles, que fue quien lo concibió, y a Euclides, que fue el primero en elaborar un tratado completo de acuerdo con sus dictados. El método axiomático consiste esencialmente en reducir una teoría a un conjunto limitado de *"postulados"* (o *"axiomas"*), a partir de los cuales se pueda deducir posteriormente cualquier enunciado que pertenezca a la teoría. El tratado escrito por Euclides mediante la utilización del método axiomático es la obra *Elementos*, de la que ya hemos hablado (cf. p. 16) y que enseguida vamos a comentar un poco más.

El método formal, por su parte, se basa en la elaboración de un lenguaje artificial, completamente especificado de antemano, que permita representar con la máxima claridad la estructura lógica de los enunciados matemáticos y de sus demostraciones. La creación del método formal fue debida principalmente a Frege, como ya hemos visto, a finales del siglo XIX.

Para entender mejor la relación entre ambos métodos, así como el papel que desempeñaron en la gestación del ideario formalista, tenemos que detenernos antes a bosquejar un episodio singular en la historia de la matemática, acaecido en la primera mitad del siglo XIX. Un episodio tan sorprendente y revelador, que resulta de inexcusable referencia para cualquier introducción a la filosofía de la matemática que se precie: el descubrimiento de la geometría no euclídea. Para una introducción muy asequible a esta cuestión, complementaria a la exposición que se va a hacer aquí, puede consultarse el artículo de Poincaré, "Las geometrías no euclidianas", en su libro *Filosofía de la ciencia*, pp. 145–161 (también recogido en su otro libro, *Ciencia e hipótesis*, pp. 89–103).

§ 3.3. Los Elementos. La geometría es la parte de las matemáticas que se encarga del estudio del espacio y sus propiedades. Es decir: del estudio de nociones como *punto*, *recta*, *plano*, *ángulo*, las figuras geométricas, sus transformaciones, y las relaciones entre todos ellos.

El primer gran tratado de geometría fueron los *Elementos* de Euclides, del siglo III antes de Cristo. Se conocen también como los "Elementos de geometría", y están dedicados principalmente a desarrollar esta rama de las matemáticas, aunque también contienen aportaciones a otras partes, basadas en el uso de un lenguaje geométrico o parcialmente geométrico (tal es el caso, por ejemplo, de la demostración de la infinitud de los números primos, a la que nos referimos en su momento).

Euclides se propuso exponer de forma sistemática todo el conocimiento acumulado en la geometría de su tiempo. Para ello confeccionó una lista de conceptos básicos, a los que caracterizó mediante definiciones escuetas, y enunció un reducido número de postulados fundamentales, como base para llevar a cabo posteriormente todas las demostraciones de la obra (cf. *Elementos*, Libro I, Definiciones, Postulados y Nociones comunes, pp. 189–201 del vol. 1 de la edición española).

Partiendo únicamente de dicha plataforma, Euclides procedió entonces a definir nuevos conceptos en términos de los anteriores, y a demostrar un larguísimo número de enunciados geométricos, siempre sobre la base de los axiomas establecidos al principio.

De este modo, los *Elementos* de Euclides se convirtieron no sólo en el primer tratado escrito siguiendo el método axiomático, sino también en su principal y más lograda referencia hasta finales del siglo XIX.

§ 3.4. Los cinco postulados de Euclides. De los postulados fundamentales en los que se basó Euclides, hay un primer grupo de cinco, de contenido puramente geométrico, y a continuación un segundo grupo de principios de carácter más general. Son esos cinco primeros postulados, los que se conocen habitualmente como *"los cinco postulados de Euclides"*.

Sin entrar en mayores detalles sobre el papel que juega cada uno, conviene que los tengamos a la vista, si bien los presentaremos en una formulación ligeramente modificada, transcritos a nuestro lenguaje actual:

1. Por cualesquiera dos puntos distintos pasa una única recta.
2. Cualquier segmento determina una única recta, que contiene a todos sus puntos.
3. Dado un punto cualquiera, y un segmento que lo tenga como extremo, existe un único círculo con dicho punto como centro y dicho segmento como radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si dos rectas distintas son cortadas por una tercera, formando a uno de los lados ángulos internos cuya suma es menor que dos rectos, al prolongarlas indefinidamente se cortarán por ese lado.

(cf. Euclides, *Elementos*, Libro I, Postulados, pp. 197–198 del vol. 1 de la edición española; y para una versión similar a la nuestra, Dou, *Fundamentos de la matemática*, p. 20.)

Un pequeño comentario marginal resulta obligado con respecto al cuarto postulado: los ángulos rectos no los definió Euclides, naturalmente, como aquellos que miden 90°, en cuyo caso resultaría absurdo introducir como postulado el hecho de que sean todos iguales. La definición de Euclides procede a partir de las rectas *perpendiculares*, caracterizando éstas como aquellas que al cortarse forman ángulos adyacentes de la misma magnitud, y definiendo entonces el ángulo recto como cada uno de esos ángulos adyacentes, o contiguos, así formados.

§ 3.5. El axioma de las paralelas. Además, llama inmediatamente la atención la mayor complejidad del quinto postulado con respecto a los otros cuatro. De hecho, aunque estos cinco postulados fueron recibidos como verdades evidentes, y como descripciones indubitables acerca del espacio físico real, y así permanecerían hasta comienzos del siglo XIX, una pequeña duda existió siempre con respecto al quinto de ellos.

Ya Ptolomeo, en el siglo II después de Cristo, intentó demostrarlo deduciéndolo de los otros cuatro. Y desde entonces, durante los dieciséis siglos posteriores, se sucedieron innumerablemente los intentos de hacer lo mismo.

El problema es que en tales intentos de demostración del quinto postulado a partir de los otros cuatro, se solía infiltrar alguna otra proposición geométrica, tampoco deducible de ellos, y que al final resultaba ser, en la mayor parte de los casos, una formulación equivalente al quinto postulado, esto es, al postulado que se quería demostrar. Lo que se encontraba, en definitiva, no era una prueba del quinto postulado, ni una demostración del quinto postulado a partir de los otros axiomas; sino sencillamente, otra forma distinta de expresar el quinto postulado.

Una de esas proposiciones equivalentes al quinto postulado de Euclides es la que dice que

Los ángulos internos de un triángulo suman 180º.

Otra, quizá la más sencilla de entender, establece que

Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una paralela.

El hecho de que estas formulaciones sean equivalentes al quinto postulado de Euclides se traduce en que utilizando el quinto postulado de Euclides se puede demostrar cualquiera de estas otras formulaciones, y a la inversa, que utilizando cualquiera de ellas se puede demostrar a su vez el quinto postulado de Euclides.

No es difícil, de hecho, percibir la conexión entre las tres versiones, aunque se trata de un detalle poco relevante para nosotros, y en el que no nos detendremos aquí (cf. por ejemplo Hilbert, *Fundamentos de geometría*, pp. 32–33, recordando que las rectas paralelas son aquellas que estando en el mismo plano nunca se cortan, que 180º es la suma de dos rectos, y que dos rectas cortadas por una tercera formarán un triángulo si y sólo si *no* son paralelas).

La proposición de las paralelas (la segunda de las dos que hemos mencionado como equivalente al quinto postulado de Euclides) está inspirada en la Proposición 31 del propio Libro I de los *Elementos* (p. 241 de la ed. española). Su primera formulación explícita se debe a Proclo, en el siglo V después de Cristo, y posteriormente fue popularizada por el matemático escocés John Playfair, a partir de 1795. Tanto ha llegado a generalizarse el uso de esta formulación, que el quinto postulado de Euclides ha pasado a ser conocido como "el axioma de las paralelas", y las más de las veces aparece recogido tal cual enunciando esa proposición, equivalente a la que Euclides originalmente formuló.

§ 3.6. El descubrimiento de la geometría hiperbólica. Después de tantos intentos por demostrar que el quinto postulado era deducible de los cuatro primeros, el trabajo de algunos matemáticos audaces durante la primera mitad del siglo XIX consiguió establecer un hecho ciertamente sorprendente: que el quinto postulado de Euclides no sólo era *independiente* de los otros cuatro, sino que resultaba posible apartarse del mismo, utilizando en su lugar principios incompatibles con él, y desarrollar de forma sistemática toda una geometría alternativa a la geometría euclídea (o euclidiana), mediante la utilización de esos otros principios.

Posiblemente el primero en llegar a la conclusión de que el axioma de las paralelas no era una verdad física a priori, y que incluso cabía plantear una verificación empírica de su validez, fue el monumental matemático alemán Carl Friedrich Gauss, a principios del siglo XIX.

Frustrado por sus propios esfuerzos en demostrar la deducibilidad del axioma de las paralelas a partir de los otros cuatro postulados, Gauss empezó a explorar la posibilidad de una geometría distinta, en la que tal axioma fuera sencillamente rechazado. De este modo Gauss se convirtió en el principal precursor de la geometría no euclidiana. Aunque nunca llegó a publicar sus trabajos sobre esta materia, por temor al ridículo y a la incomprensión que generarían, como explica en su correspondencia (cf. Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, vol. 3, capítulo 36, "La geometría no euclídea", p. 1150).

Además, Gauss llegó a realizar una medición real de la suma de ángulos internos de un gran triángulo, formado por los vértices de tres montañas cercanas a su ciudad, con la intención de comprobar si la suma era efectivamente de 180º. Aunque la medición efectuada vino a dar un resultado superior, no fue concluyente, porque la diferencia era muy pequeña, y quedaba comprendida en la probabilidad de error observacional correspondiente a los instrumentos de medida utilizados.

Poco tiempo después de los primeros trabajos de Gauss sobre el particular, apareció la primera teoría geométrica que desarrollaba de forma sistemática una premisa contraria al quinto postulado. Fue publicada en 1829 por el matemático ruso Nikolai Lobachevsky, y tres años después, de forma independiente, por el húngaro Janos Bolyai.

La geometría de Lobachevsky y Bolyai, similar a la que había ideado Gauss, es lo que se conoce hoy día como *"geometría hiperbólica"*. Es un sistema geométrico que parte de la premisa de que por un punto exterior a una recta pasa *más de una* paralela. A partir de esta suposición se demuestra que pasan en realidad un número infinito de ellas. Y que la suma de los ángulos internos de un triángulo, utilizando esa premisa inicial, tiene que ser forzosamente menor de 180º.

El "plano hiperbólico" se suele representar no como un plano, sino como una superficie curva, semejante a la de una silla de montar a caballo. Ello se hace así para conseguir acomodar nuestras intuiciones geométricas a este otro sistema, que tanto se aparta, en principio, de ellas.

§ 3.7. El descubrimiento de la geometría elíptica. Por si eso fuera poco, dos décadas más tarde apareció otro sistema de geometría distinto a la euclidiana, y distinto también a la explorada por Lobachevsky y Bolyai. Es lo que se conoce hoy día como *"geometría elíptica"*, y fue descubierta por un discípulo de Gauss, Bernhard Riemann, que la hizo pública por primera vez al leer su tesis de habilitación como profesor en la Universidad de Gotinga, en 1854.

En la geometría elíptica el quinto postulado de Euclides se sustituye por la suposición contraria a la adoptada por la geometría hiperbólica, esto es, por la suposición de que por un punto exterior a una recta no pasa *ninguna* paralela. A partir de dicha suposición resulta inmediato concluir que en la geometría elíptica no existen las rectas paralelas en absoluto: todas las rectas se cortan en algún punto. También cae el primer postulado, ya que hay parejas de puntos por los que pasan infinitas rectas distintas, y no sólo una. Por último, la suma de los ángulos internos de un triángulo resulta ser en este sistema mayor de 180º.

El "plano elíptico", que tampoco concuerda con nuestras intuiciones geométricas inmediatas, se suele representar a su vez como una superficie curva, pero similar en este caso a la de una esfera.

Con posterioridad Riemann elaboró otra teoría geométrica todavía más general, que es la llamada "geometría riemanniana". En la geometría riemanniana quedan comprendidos una infinidad de espacios geométricos distintos, el abanico de los llamados "espacios de curvatura variable", entre los cuales las geometrías anteriores aparecen como casos particulares, los más sencillos posibles: la geometría hiperbólica y la geometría elíptica, que constituyen espacios de curvatura fija (o constante), y geometría euclidiana, que constituye un espacio de curvatura cero, esto es, un espacio sin curvatura.

Precisamente uno de esos espacios de curvatura variable de la geometría riemanniana fue el adoptado por Einstein, a principios del siglo XX, para su teoría general de la relatividad. De lo cual se deduce que si la teoría general de la relatividad es una descripción correcta del espacio físico de nuestro universo, éste no constituirá un espacio euclidiano, sino un espacio de curvatura variable de la geometría riemanniana.

§ 3.8. La naturaleza de los postulados geométricos. El descubrimiento de la geometría no euclídea ha supuesto, en palabras del filósofo y matemático Hilary Putnam,

> "el evento más importante en la historia de la ciencia para el epistemólogo."
> (Putnam, *Philosophical Papers*, vol. 1, p. x).

Para muchos filósofos de la matemática, en efecto, la sola existencia de las geometrías no euclidianas demuestra el carácter empírico de esta rama de las matemáticas. Es decir: demuestra que la geometría es una ciencia empírica, como el resto de ciencias de la naturaleza, cuyas verdades sólo se pueden establecer por medio de la experiencia.

Pero ésa es sólo una reacción posible ante la aparición de las geometrías no euclidianas. Otra reacción posible es considerar que los postulados de los distintos sistemas geométricos no son verdaderos ni falsos, sino simples construcciones simbólicas, que después se pueden intentar aplicar o no a distintos dominios. Esto es: que el valor de los axiomas reside en el marco teórico que constituyen por sí mismos. Tal es la posición que adopta la escuela formalista. Para esta escuela, la existencia de las geometrías no euclídeas es uno de sus principales apoyos y fuentes de inspiración. Y es que esta escuela, como veremos, encaja como un guante con la situación de coexistencia pacífica de sistemas axiomáticos incompatibles entre sí, pero valiosos, y dignos de interés matemático, cada uno en sí mismo. Que es justo la situación producida tras el advenimiento de las geometrías no euclidianas.

Finalmente, una tercera reacción posible ante la existencia de estos nuevos sistemas, es la de seguir manteniendo a la geometría euclídea como única geometría verdadera de la matemática pura, sobre la base de que sólo ella concuerda con nuestras intuiciones constitutivas acerca del espacio. Esta última podría ser aproximadamente la opinión de Frege, por ejemplo, que siempre consideró a la geometría y a la aritmética como ramas de la matemática esencialmente distintas, y nunca se propuso efectuar una reducción lógica de aquélla (cf. su correspondencia con Hilbert, en Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, esp. p. 43).

§ 3.9. Una nueva concepción del método axiomático. El descubrimiento de la geometría no euclídea, además de obligar a un profundo replanteamiento sobre la naturaleza de los principios geométricos, originó también una nueva forma de concebir el método axiomático distinta a la que se había considerado hasta entonces.

De acuerdo con la antigua concepción del método axiomático, debida a Aristóteles y Euclides, los axiomas de una teoría constituyen las verdades más básicas y evidentes de la misma. Es decir: los axiomas constituyen las verdades más elementales, a partir de las cuales se deriva todo lo demás.

Sin embargo, tras la aparición de las geometrías no euclídeas, ocurrió que la geometría euclidiana seguía teniendo un interés intrínseco como teoría geométrica, junto con las otras teorías descubiertas. Nadie dudaba de que la construcción axiomática elaborada por Euclides mediante sus cinco postulados siguiera siendo valiosa, aún después de que la verdad supuestamente "evidente e indubitable" de su quinto postulado hubiera quedado en entredicho. En otras palabras: con la aparición de las geometrías no euclídeas se puso de manifiesto que la teoría de Euclides tenía una importancia como construcción axiomática en sí misma, esto es, como procedimiento sintético para representar un determinado sistema geométrico, con independencia de que se tratara de un sistema geométrico verdadero o no.

Y así surge la nueva concepción del método axiomático: considerando que los axiomas de una teoría no tienen por qué ser necesariamente proposiciones verdaderas, o universalmente verdaderas, sino que pueden ser cualesquiera enunciados de la teoría, siempre que hayan sido escogidos de tal forma que cualquier otro enunciado de la teoría resulte derivable de ellos.

§ 3.10. Definiciones implícitas. Por añadidura, de acuerdo con esta nueva concepción, ya no es necesario empezar la construcción axiomática de una teoría definiendo sus objetos básicos, como había intentado hacer Euclides. Al contrario, lo propio a esta nueva concepción del método axiomático es considerar que son los propios axiomas, por sí mismos, los que proporcionan implícitamente la definición de tales objetos.

Ello tiene a su vez esta consecuencia: si la teoría no define los objetos de los que trata, sino que sólo los caracteriza implícitamente mediante la estipulación de una lista de axiomas, entonces cualquier conjunto de individuos que satisfaga los axiomas de la lista podrá considerarse un legítimo objeto de la teoría en cuestión. Es por ello que las teorías axiomáticas no tienen un dominio de objetos definido, sino que son aplicables a cualesquiera dominios de objetos en los que se cumplan los axiomas de la teoría. Así, cuando un conjunto de objetos satisface los axiomas de una teoría axiomática decimos, según esta nueva concepción, que dicha teoría es "verdadera acerca de esos objetos", o que dicha teoría "se encuentra realizada" (o "tiene un modelo") en ese dominio de objetos. El valor de la teoría como construcción axiomática aparecerá así desligado de cualquier interpretación particular de sus postulados, así como de cualquier pretensión de ser universalmente verdadera.

Tal es la concepción del método axiomático que se encuentra a la base del ideario formalista, y tal es la concepción que será preconizada por la citada escuela no sólo para la geometría, sino para todas las teorías matemáticas.

§ 3.11. Combinación con el método formal. El método axiomático así concebido encuentra un complemento feliz en el método formal, que como ya dijimos consiste en el diseño de un lenguaje artificial íntegramente especificado de antemano, para representar la estructura lógica de los enunciados matemáticos y de sus demostraciones.

Hoy sabemos que el método formal es en buena medida independiente del método axiomático: en efecto, existen sistemas formales completos para la lógica de primer orden, y sistemas formales a la medida de diversas teorías matemáticas, que no contienen axiomas en absoluto. Esto se consigue sustituyendo los axiomas por unas llamadas "reglas de inferencia", que vienen a desempeñar una función equivalente a los axiomas, con lo que al final la potencia demostrativa es la misma.

Frege no conocía este recurso, que se descubrió algún tiempo después. Frege utilizaba axiomas, y axiomas formales, y en este sentido se puede decir que fue uno de los primeros en utilizar el método formal axiomático. Sin embargo, Frege no fue un formalista, porque para él no tenía sentido elaborar un sistema de axiomas en cuya verdad no se creyese firmemente (cf. otra vez su correspondencia con Hilbert, en Frege, *Phil. and Math. Correspondence*, p. 43). Frege creía en la verdad de los axiomas que utilizó para su formalización de la aritmética, incluido el axioma 5º (hasta el momento en que Russell demostró que dicho axioma daba lugar a contradicción). No digo esto para polemizar sobre la interpretación del pensamiento de Frege, sino para que sirva como ejemplo de cara a comprender la idiosincrasia de la filosofía formalista; y su particular manera de concebir el método axiomático, que tan distinta resulta a la mentalidad que reinaba hasta entonces.

Lo característico de la filosofía formalista de la matemática es que aspira a reducir las teorías matemáticas a mecanismos de transformación de símbolos, sin ninguna pretensión sobre su posible significado o verdad. Lo que propugna esta filosofía es sacar a la luz esos mecanismos de transformación. Y su aspiración última es que el método formal axiomático permita reemplazar, al menos teóricamente, cualquier teoría matemática por una representación formal suya.

El método formal axiomático en sí mismo admite otros usos, y otras intenciones, y por consiguiente su interés no debe vincularse exclusivamente a los destinos de la filosofía formalista de la matemática, ni a los de ninguna otra.

El programa formalista de Hilbert

§ 3.12. Los cinco axiomas de Peano. El principal precursor de la escuela formalista contemporánea fue el matemático italiano de la Universidad de Turín, Giuseppe Peano. Junto con Gottlob Frege y Richard Dedekind, Peano fue el otro matemático notable que se dedicó a investigar los fundamentos de la aritmética a finales del siglo XIX (una monografía comparativa de sus propuestas respectivas la tenemos en Gillies, *Frege, Dedekind and Peano on the Foundations of Arithmetic*).

Peano publicó en 1889 una pequeña obra escrita en latín, y titulada *Arithmetices principia: nova methodo expositia* ("Los principios de la aritmética expuestos con un nuevo método"). En este libro Peano lleva a cabo una reconstrucción de la aritmética elemental, en un lenguaje completamente formalizado que había desarrollado él mismo, de forma independiente de Frege, y que también constituyó una contribución importante en los orígenes de la nueva teoría lógica.

En *Los principios de la aritmética* Peano trata de derivar toda la aritmética a partir de nueve axiomas fundamentales. De esos nueve axiomas, hay cuatro que regulan la relación de igualdad, y cinco de contenido propiamente aritmético. Son estos últimos, los axiomas aritméticos en los que se basa Peano para su construcción, los que se conocen habitualmente como *"los cinco axiomas de Peano"*.

Transcritos a nuestro lenguaje actual y ligeramente reformulados, podemos presentar los cinco axiomas de Peano de la manera siguiente:

1. El cero es un número.
2. Todo número tiene un sucesor, que es otro número.
3. Dos números con sucesores iguales son iguales.
4. El cero no es el sucesor de ningún número.
5. Si una propiedad se aplica al cero, y al sucesor de cualquier número que la tenga, entonces se aplica a todos los números.

(cf. Peano, *Los principios de la aritmética*, p. 59; y para una presentación similar a ésta, Garrido, *Lógica simbólica*, p. 319.)

Los números así descritos son nuestros números naturales, qué duda cabe. Recordemos que el sucesor de un número no es más que el siguiente, como ya dijimos (cf. p. 17). Y en cuanto al último de los axiomas de Peano, es el llamado *"principio de inducción matemática"* (o *"principio de inducción completa"*). Que por cierto, nada tiene que ver, y no debe ser confundido, con la *inducción empírica* por la cual proyectamos nuestra experiencia pasada para formular hipótesis acerca del mundo exterior.

La inducción matemática se usa como principio de razonamiento en matemáticas para multitud de pruebas y demostraciones, especialmente en aritmética, así como también en la metateoría de la propia lógica formal, curiosamente. Aunque a primera vista no lo parezca, se trata en realidad de un principio estrictamente equivalente a aquel *principio del menor número*, que mencionamos en su momento (p. 18).

Estos cinco axiomas que Peano expone en lenguaje formalizado, los tomó en realidad de una obra anterior, precisamente la de Dedekind de 1888, *¿Qué son y para qué sirven los números?* (Definición 71, p. 118 de la ed. española). Sin embargo, mientras que Dedekind intentaba, partiendo de su caracterización, definir el concepto de *número natural* en términos de nociones más básicas, Peano consideraba que la única definición posible de los números naturales era la que se encerraba en esos axiomas, y que no cabía ir más allá:

> "He representado mediante signos todas las ideas que aparecen en los principios de la aritmética, de modo que cualquier proposición quede enunciada exclusivamente mediante estos signos.
>
> "(...) Los axiomas (...) expresan las propiedades fundamentales de los signos que carecen de definición."
>
> (Peano, *Los principios de la aritmética*, pp. 31–33.)

En otro librito de Peano publicado ese mismo año, venía a decir lo mismo pero aplicado a los conceptos básicos de la geometría:

> "Tenemos, por tanto, una serie de entes llamados puntos. Estos entes no están definidos. El lector puede entender (...) cualquier categoría de entes (...). Los axiomas serán satisfechos o no dependiendo del significado asignado a los signos no definidos."
>
> (Peano, *I principi di geometrìa: lògicamente esposti*, citado en la Introducción a Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, p. XXVII.)

§ 3.13. David Hilbert: los Fundamentos de la geometría. Peano sentó con las citadas obras, las bases de lo que habría de ser la concepción formalista de las matemáticas. Pero el representante por excelencia de esta escuela sería sin duda el gran matemático alemán David Hilbert.

La primera contribución de Hilbert a los fundamentos de la matemática es su obra de 1899, *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos de la geometría*, disponible en edición española, aunque con traducción algo deficiente). Por aquel entonces Hilbert era ya un matemático muy conocido, aunque apenas se había ocupado de la geometría hasta ese momento.

En los *Fundamentos de la geometría* Hilbert se propone reconstruir el sistema axiomático de la geometría euclídea, mejorando la estructura diseñada por Euclides 2.000 años atrás. Como el propio Hilbert explica con toda claridad al comienzo de la obra:

> "La Geometría, lo mismo que la Aritmética, necesita solamente para su consecuente construcción de unas pocas y sencillas proposiciones fundamentales.
>
> "Estas proposiciones fundamentales se llaman *axiomas* de la Geometría. El poner de manifiesto los axiomas de la Geometría y el averiguar sus conexiones, es problema que se encuentra discutido desde tiempos de Euclides en numerosos y excelentes tratados de la literatura matemática. (. . .)
>
> "La presente investigación es un nuevo ensayo para construir la Geometría sobre un sistema *completo de axiomas, lo más sencillo posible*, deduciendo de él los más importantes teoremas, de manera tal, que en ese proceso aparezcan con la máxima claridad la interpretación de los distintos grupos de axiomas y el alcance de las consecuencias que aisladamente se deriven de cada uno de ellos."
>
> (Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, p. 1.)

Aunque Hilbert no había sido ciertamente el primero que se propusiera mejorar el edificio axiomático construido por Euclides, sí fue el que consiguió un resultado más logrado, y sus *Fundamentos de la geometría* se convirtieron con rapidez en un clásico.

Hilbert, a diferencia de Euclides, estaba en disposición de demostrar la independencia del axioma de las paralelas con respecto a los demás axiomas. La propia existencia de las geometrías no euclídeas, que desarrollaban de forma coherente proposiciones contrarias al axioma de las paralelas, bastaba para establecer que dicho axioma era independiente del resto.

§ 3.14. La necesidad de una prueba de consistencia. Sin embargo Hilbert, a diferencia de Euclides —y a semejanza de Peano— no sintió en su obra ninguna necesidad de definir los conceptos básicos de la geometría, como *punto*, *recta* y *plano*. Por el contrario, introdujo estas nociones sencillamente como "sistemas de entes" cuya caracterización se encuentra contenida en los propios axiomas (*Fundamentos de la geometría*, p. 3).

Como el propio Hilbert decía a un colega, en 1891,

> "Uno debería ser capaz de decir siempre, en lugar de 'puntos', 'rectas' y 'planos', 'mesas', 'sillas' y 'jarras de cerveza'."

(cf. Reid, *Hilbert*, citado en la Introducción a Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, p. XXIX.)

No debe sorprendernos por tanto, que Hilbert dedicara una sección, nada más terminar la exposición de los axiomas, a investigar su consistencia, esto es, a investigar si el conjunto de axiomas descrito pudiera resultar contradictorio (Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, sección 9, pp. 38–41).

Nada parecido se le hubiera ocurrido a Euclides, desde luego, porque Euclides pensaba que sus axiomas eran universalmente verdaderos. Sin embargo a Hilbert, al considerar los axiomas como meras estipulaciones arbitrarias, le surge inmediatamente la duda de si, en sus más lejanas consecuencias, esas estipulaciones podrían entrar en contradicción unas con otras.

El peligro de que una teoría sea contradictoria radica naturalmente, en el hecho de que de una contradicción se sigue cualquier cosa. Por consiguiente, en el caso de que de una teoría resulte derivable una contradicción, a partir de esa contradicción será derivable también cualquier otra proposición que queramos, con lo que la teoría en cuestión quedará invalidada.

La necesidad de una prueba de consistencia es característica de la filosofía formalista de la matemática, y constituye la permanente "espada de Damocles" de esta posición filosófica. Si las teorías matemáticas se consideran construcciones gratuitas, sin ningún anclaje en una realidad predeterminada, entonces necesitamos una prueba especial que nos garantice que se trata de construcciones consistentes.

§ 3.15. De la geometría a la aritmética. En la sección 9 de los *Fundamentos de la geometría* Hilbert proporcionó una prueba de la consistencia de su sistema de axiomas, bajo la suposición previa de que el análisis matemático de los números reales fuera consistente también. Esto es: proporcionó una prueba de la consistencia de la geometría *relativa* a la consistencia de la teoría de los números reales.

Quedaba pendiente, por lo tanto, la cuestión de demostrar la consistencia del análisis matemático. Y en definitiva, la cuestión de demostrar la consistencia de la aritmética de los números naturales, de la cual depende el primero.

Hilbert asistió al 2º Congreso internacional de matemáticos celebrado en París en el año 1900 (al que ya nos hemos referido, cf. p. 27), y en una memorable ponencia enunció los que a su juicio eran los principales problemas matemáticos pendientes para el siglo que comenzaba. Son los llamados *"problemas de Hilbert"*, como todavía se conocen, y que en efecto, tuvieron una influencia indudable en el desarrollo de la matemática posterior.

El segundo de esos problemas era precisamente el de demostrar la consistencia de la aritmética:

> "Sobre todo deseo designar a éste como el problema más importante entre las numerosas cuestiones que pueden formularse con respecto a los axiomas, *demostrar que no se contradicen entre sí, es decir, que mediante un número finito de inferencias lógicas basadas en ellos, nunca se pueden obtener resultados contradictorios.* En la geometría, la demostración de la consistencia de los axiomas (...) se reduce al teorema de la consistencia de los axiomas aritméticos. En cambio, se necesita un método directo para demostrar la consistencia de los axiomas aritméticos."

(Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, citado en Alcolea Banegas, *Logicismo, formalismo, intuicionismo*, pp. 77–78; la lista completa de los problemas de Hilbert puede consultarse en la Introducción a Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, pp. XVII–XVIII.)

Muy poco tiempo después de que Hilbert pronunciara esas palabras, se descubre la paradoja de Russell, y ésta a su vez llama la atención sobre los argumentos paradójicos de Cantor y Burali-Forti. La naciente teoría de conjuntos queda en entredicho, y con ella algunos de los intentos más serios de fundamentación de la aritmética, como los de Dedekind y Frege.

Se produce una sensación de desconcierto: es la *crisis de fundamentos* de la ya hemos hablado, y que como ahora vemos afectó también a la geometría, en la medida en que la consistencia de sus axiomas había sido establecida presuponiendo la consistencia de la aritmética, cuyos fundamentos aparecían ahora como dudosos. La necesidad de una prueba de consistencia de la aritmética empezó a convertirse en algo perentorio.

§ 3.16. De la aritmética a la lógica matemática: el programa de Hilbert. La preocupación por las paradojas llevó a Hilbert a interesarse paulatinamente por los lenguajes formalizados y por la nueva lógica matemática, a los que no había prestado atención anteriormente, y que estaban del todo ausentes de hecho, de sus *Fundamentos de la geometría.*

Combinando su filosofía anterior con el instrumental de la lógica matemática recién descubierta, es como se configura la filosofía formalista de Hilbert, que acaba por adoptar la forma de un "programa de investigación" muy concreto sobre los fundamentos de la matemática: el *programa de Hilbert.* Este programa se puede resumir sinópticamente en términos de sus tres objetivos principales: *formalización*, *consistencia* y *automatización.*

En efecto el programa de Hilbert abarca esencialmente dos ambiciones iniciales: la formalización de todas las teorías matemáticas, transformándolas en sistemas axiomáticos representados por medio de lenguajes lógicos, y el estudio de las propiedades de dichos sistemas, buscando en particular establecer una prueba de consistencia de los mismos.

Y a éstas se une un tercer objetivo, más lejano, que es la búsqueda de un método complementario que permitiese automatizar la prueba de teoremas y la solución de problemas matemáticos, dentro de ese contexto lógico formal. Es decir: un procedimiento que permitiese decidir mecánicamente cualquier conjetura matemática formulada en el interior de una teoría, una vez que se dispusiera de una representación formal adecuada de la misma. Éste es el famoso *"problema de la decisión"* (en alemán, *Entscheidungsproblem*), que Hilbert plantea por ejemplo en *Pensamiento axiomático* (p. 21).

§ 3.17. Matemática y metamatemática. La mayor parte de los enunciados de las teorías matemáticas son para Hilbert *"enunciados ideales"* (en alemán, *ideale Aussagen*), es decir: enunciados que tratan de objetos abstractos, como colecciones infinitas, etc. La legitimidad de tales teorías no proviene de que existan en realidad esos objetos, sino únicamente de que se trate de teorías consistentes.

Precisamente para garantizar la consistencia de las teorías matemáticas es para lo que resulta conveniente formalizarlas, a fin de poder desarrollar la prueba de consistencia de los sistemas formales obtenidos con mayor rigor.

Al estudio de las propiedades de los sistemas formales lo llama Hilbert *"teoría de la prueba"* o *"teoría de la demostración"* (*Beweistheorie*), y también *"metamatemática"* (*Metamathematik*), dado que se trata en definitiva de una "matemática acerca de la matemática".

Los enunciados pertenecientes a la metamatemática son, estos sí, *"enunciados reales"* (*reale Aussagen*), porque sus objetos de estudio son objetos concretos, a saber, los propios signos que conforman las teorías formalizadas, sus propiedades y las transformaciones definidas entre ellos.

Para el cultivo de la metamatemática Hilbert decreta el uso de un *método finitista* (o *finitismo*), que garantice más allá de toda duda posible la seguridad de las demostraciones de consistencia que se quiere obtener.

Lo que se pretende mediante el método finitista es restringir los procedimientos de demostración usados en la metamatemática, de tal manera que no tenga cabida en ella el tipo de tratamiento abstracto propio de los enunciados ideales, comunes a la matemática propiamente dicha. Ello ha de ser así necesariamente, dado que es la prueba de consistencia suministrada por la *metamatemática* la que ha de dar legitimidad a las teorías abstractas de la *matemática* a secas.

No vamos a entrar aquí en una descripción del método finitista, lo cual sería muy largo y complicado, empezando porque Hilbert no dio nunca una caracterización precisa del mismo. Es una forma de *constructivismo*, cercana al *intuicionismo* que estudiaremos en el Módulo 4. Pero con la importante diferencia de que mientras el intuicionismo quiere extender a toda la matemática la limitación al uso de estos métodos restrictivos, en el formalismo se prescriben sola y exclusivamente para la consecución de una prueba de consistencia, que permita que el resto de teorías matemáticas se desarrollen libremente.

§ 3.18. Difusión del programa formalista. La filosofía formalista de Hilbert aparece por primera vez, en una versión rudimentaria, en una conferencia de 1904 titulada "Sobre los fundamentos de la lógica y de la aritmética" (publicada en 1905, y después recogida como Apéndice VII de los *Fundamentos de la geometría* en ediciones posteriores de la obra, cf. pp. 250–263 de la edición española).

Dicha conferencia le valió las críticas de Poincaré y del joven matemático holandés L. E. J. Brouwer, creador del intuicionismo, que ya en su tesis de doctorado atacó duramente a Hilbert y a toda la matemática clásica. El desarrollo de la filosofía formalista de la matemática, de hecho, se produjo en gran medida en debate con las otras dos escuelas fundacionales, el logicismo y el intuicionismo, y muy en particular con esta última.

La siguiente publicación de Hilbert sobre fundamentos corresponde a otra conferencia, la llamada "conferencia de Zurich", pronunciada en 1917 y publicada un año después en los *Mathematische Annalen*, bajo el título "Pensamiento axiomático" (publicada en español como libro con ese mismo título, y con traducción más lograda en la antología *Fundamentos de las matemáticas*, pp. 23–35).

A continuación publicó "Nueva fundamentación de la matemática", aparecida en 1922, y que corresponde a tres conferencias dadas ese año en Copenhague y Hamburgo. Este es un trabajo importante, en el que ya aparece expresado el programa formalista con toda claridad (no se encuentra incluido entre los Apéndices a *Fundamentos de la geometría*, pero hay traducción castellana en la citada antología *Fundamentos de las matemáticas*, pp. 39–62).

Otra contribución notable fue su conferencia “Acerca del infinito”, pronunciada en 1925, y recogida después como Apéndice VIII de los *Fundamentos de la geometría*, (cf. pp. 264–287 de la edición española, y con traducción mejorada en *Fundamentos de las matemáticas*, pp. 83–121).

La misma compilación *Fundamentos de las matemáticas*, que venimos citando, incluye otros dos trabajos representativos del formalismo de Hilbert: “Los fundamentos lógicos de las matemáticas” y “La fundamentación de la teoría elemental de números”, procedentes de conferencias impartidas en 1922 y 1925 respectivamente. Y los Apéndices IX y X de sus *Fundamentos de la geometría* recogen asimismo artículos procedentes de conferencias de Hilbert: “Los fundamentos de la matemática” y “Problemas en la fundamentación de la matemática”, pronunciadas respectivamente en 1927 y 1928.

También en 1928 Hilbert publicó junto con Wilhelm Ackermann, sus *Grundzüge der theoretischen Logik* (*Elementos de lógica teórica*), tratado de lógica matemática que acabaría por convertirse en una de las grandes obras de referencia de la nueva disciplina.

Finalmente, Hilbert escribió junto a Paul Bernays su obra cumbre en el desarrollo de su filosofía de la matemática: los *Grundlagen der Mathematik* (“Fundamentos de la matemática”), publicados en dos volúmenes, el primero en 1934 y el segundo en 1939 (pero no traducidos lamentablemente al ingés ni al castellano, al menos que yo sepa).

Por lo demás, a la obra escrita de Hilbert hay que añadir la enorme autoridad que ejerció como matemático eminente, así como su carismática personalidad, lo que hizo que la influencia de su programa en el campo de los fundamentos de la matemática fuese muy grande.

§ 3.19. Lectura de Hilbert (“Acerca del infinito”). Reproducimos a continuación un fragmento del artículo de Hilbert “Acerca del infinito”, que es una de sus referencias clásicas y más citadas.

La teoría de los números transfinitos de Cantor, a la que se refiere Hilbert al principio de este fragmento, es una parte esencial de la teoría de conjuntos, en la que se describen los conjuntos infinitos, y se clasifican por distintos tamaños. “El paraíso que Cantor creó para nosotros” que Hilbert menciona hacia el final, es la propia teoría de conjuntos así como todo el dominio de objetos matemáticos comprendidos en ella.

> “(...) Cantor ha logrado desarrollar con éxito estas ideas, dando forma a una teoría de los números transfinitos y a un cálculo completo para los mismos. De este modo y como culminación del trabajo conjunto de Frege, Dedekind y Cantor, el infinito alcanzaría vertiginosamente el pináculo del éxito en las matemáticas.
>
> Sin embargo, la reacción a todo ello no tardó en hacerse sentir y asumió formas en extremo dramáticas. (...) Los principios y métodos utilizados para la formación de conceptos permitían el surgimiento de contradicciones. Las primeras inconsistencias se presentaron de manera aislada, pero adquirieron gradualmente mayor gravedad al surgir las llamadas paradojas de la teoría de conjuntos. Fue, en especial, la contradicción descubierta por Zermelo y Russell la que, al ser dada a conocer al mundo matemático, tuvo prácticamente el efecto de una catástrofe en nuestra disciplina.

A causa de estas paradojas, tanto Dedekind como Frege abandonan la posición que habían sustentado hasta entonces e inclusive la rama misma de la investigación que los había ocupado por tanto tiempo. De hecho, durante años Dedekind se mostró renuente a autorizar una nueva edición de su fundamental tratado *Was sind und was sollen die Zahlen?* ("¿Qué son y para qué sirven los números?"), mientras que Frege se vio obligado, como él mismo reconoce en una nota al final de los *Grundgesetze der Arithmetik* ("Las leyes fundamentales de la aritmética"), a admitir como errónea la tendencia general de ésta, su obra más importante.

A consecuencia de todo esto, también la teoría de los números transfinitos de Cantor es objeto de severos y apasionados ataques provenientes de los más diversos ámbitos. La reacción es tan radical y en ocasiones tan desmesurada que pone en tela de juicio muchos de los conceptos fundamentales y muchas de las argumentaciones y los métodos más importantes de las matemáticas, llegándose al grado de sugerir una prohibición total de sus aplicaciones.

Ciertamente no faltaron los defensores de lo que parecía derrumbarse, pero las medidas de protección y las soluciones que sugieren son más bien débiles, además de que se trata, en general, de llevarlos a la práctica en puntos que no son los más apropiados. Se ofrecen demasiados remedios para las paradojas; pero los métodos de clarificación propuestos distan de tener homogeneidad.

Lo primero que tenemos que hacer es percatarnos con toda claridad de que, a la larga, las paradojas nos colocan en una situación absolutamente intolerable. Imaginemos simplemente lo que sucedería si en el paradigma de verdad y confiabilidad científicas que las matemáticas representan, las construcciones conceptuales y las inferencias que nos son familiares nos condujeran a absurdos. ¿En dónde podríamos buscar la certeza y la verdad si el pensamiento matemático mismo falla?

Por fortuna, existe una vía enteramente satisfactoria que con absoluto apego al espíritu de nuestra disciplina nos permite escapar de las paradojas. Las consideraciones y metas que orientan este camino son las siguientes:

1. Queremos examinar con todo cuidado aquellas construcciones conceptuales y aquellos métodos de investigación que enriquezcan nuestra disciplina, queremos cultivarlos, apoyarlos y servirnos de ellos siempre que se presente la más ligera posibilidad de obtener un resultado. Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.
2. Es absolutamente necesario alcanzar en los modos de inferencia el mismo grado de seguridad que la que existe en la teoría ordinaria elemental de los números, en la que todo el mundo confía plenamente y en la que una paradoja o una contradicción sólo pueden surgir por nuestra falta de atención."

(Hilbert, "Acerca del infinito", *Fundamentos de las matemáticas*, pp. 93–94.)

§ 3.20. Lectura de Hilbert ("Los fundamentos de la matemática"). Sigue un extracto de otro artículo de Hilbert, "Los fundamentos de la matemática", en el que expone con toda claridad su filosofía formalista y las líneas maestras de su programa.

> “Es para mí un gran honor, y al mismo tiempo una necesidad, completar y ampliar mis ideas sobre los fundamentos de la matemática, ideas que durante cinco años he venido desarrollando y a las que, desde entonces, sin interrupción, me he dedicado con el máximo interés. Con este nuevo fundamento de la matemática, que propiamente puede designarse como una teoría de la demostración, persigo una finalidad importante, ya que deseo eliminar definitivamente los problemas relativos a los cimientos de la matemática, tal y como ahora están planteados, convirtiendo cualquier enunciado matemático en una fórmula concreta que pueda ser expuesta y derivada con todo rigor, y reformulando las definiciones e inferencias matemáticas de tal modo que sean irrefutables, y que proporcionen además una imagen adecuada de esta ciencia en su conjunto. Creo poder alcanzar completamente tal meta por medio de mi teoría de la demostración, aunque para desarrollarla del todo todavía resta por hacer mucho trabajo.
>
> ”La matemática, como cualquier otra ciencia, no puede ser fundada únicamente en la lógica; antes bien, como condición para el uso de inferencias lógicas y la realización de operaciones lógicas, algo debe sernos dado en nuestra facultad de representación, ciertos objetos extralógicos concretos que están intuitivamente presentes como experiencia inmediata previa a todo pensamiento. Para que la inferencia lógica resulte fiable, debe ser posible escrutar estos objetos exhaustivamente en todas sus partes. Y en efecto, el que estos objetos estén presentes, el que difieran unos de otros, y el que unos sigan a otros o estén concatenados con otros, es algo dado a la intuición inmediatamente, junto con los propios objetos, sin que pueda ser reducido a ninguna otra cosa, ni requiera ser reducido. Esta es la posición filosófica básica que yo veo como un requisito para las matemáticas y, en general, para todo el pensamiento, comprensión y comunicación científicos. Y en matemáticas, en particular, lo que está bajo consideración son los propios signos concretos, cuya forma, de acuerdo con la concepción que hemos adoptado, resulta inmediatamente clara y reconocible. Esto es verdaderamente lo mínimo que se debe presuponer; ningún científico puede prescindir de ello, y por consiguiente todo el mundo debe aceptarlo, conscientemente o no.
>
> ”Presentaré a continuación la idea fundamental de mi teoría de la demostración.
>
> ”Todas las proposiciones que integran la matemática son transformadas en fórmulas, de tal modo que la propia matemática se convierte en un inventario de fórmulas. Éstas difieren de las fórmulas habituales en matemáticas sólo en que, además de los signos usuales, también aparecen en ellas los signos lógicos [transcritos a notación y terminología actual]:
>
> | $\rightarrow$ | $\wedge$ | $\vee$ | $\neg$ | $\forall$ | $\exists$ |
> |---|---|---|---|---|---|
> | si, entonces | y | o | no | para todo | existe |
>
> Ciertas fórmulas, que sirven como los ladrillos de construcción del edificio formal de la matemática, son llamadas axiomas. Una prueba es una figura que

debe ser reconocible como tal por nuestra capacidad perceptiva; consiste en inferencias que conforman con el esquema

$$\frac{\begin{array}{c} S \\ S \to T \end{array}}{T}$$

donde cada una de las premisas, esto es, la fórmula S y la fórmula $S \to T$ de la figura, o bien es un axioma, o bien se obtiene por sustitución a partir de un axioma, o bien coincide con la última fórmula de una inferencia anterior en la prueba, o se obtiene de una tal fórmula por sustitución. Decimos que una fórmula es demostrable cuando es o bien un axioma o bien la última fórmula de una demostración.

"Los axiomas y las proposiciones demostrables, es decir, las fórmulas que resultan de este procedimiento, son reproducciones de los pensamientos que conforman la matemática ordinaria tal y como se ha desarrollado hasta ahora.

(. . .)

"Donde quiera que se utilice el método axiomático, se presenta la cuestión de probar la consistencia de los axiomas. En geometría y en las teorías físicas esta prueba se lleva a cabo con éxito por medio de una reducción a la consistencia de los axiomas aritméticos. Este sistema falla obviamente en el caso de la propia aritmética. Haciendo posible este último paso (. . .) nuestra teoría de la prueba se convierte en la clave de bóveda del método axiomático."
(Hilbert, "Los fundamentos de la matemática", Apéndice IX a los *Fundamentos de la geometría*, pp. 288–299, con traducción en parte distinta a la aquí ofrecida.)

§ 3.21. Fracaso del programa de Hilbert: los resultados limitativos. Como ya hemos dicho, el programa formalista de Hilbert ejerció una notable influencia sobre los matemáticos y lógicos de su tiempo, constituyendo un importante acicate para la exploración de la nueva lógica formal, estrenada unas décadas atrás. La teoría de la prueba inaugurada por Hilbert constituye hoy, de hecho, una de las ramas principales de esta disciplina, aunque su cultivo ya no esté estrictamente sujeto al seguimiento del método finitista.

Y en efecto, en la década de 1930, la lógica formal conoció una sucesión de resultados, extraordinariamente brillantes y significativos, que vendrían a establecer definitivamente los límites del alcance de la disciplina.

Lo que ocurre es que estos resultados fueron esencialmente *negativos*, es decir, fueron resultados que mostraban limitaciones inherentes a los métodos formales de la nueva lógica. Por eso se les conoce a veces como los *"resultados limitativos"*.

Los resultados limitativos supusieron un duro revés a las aspiraciones del programa formalista, y en el caso de uno de ellos en particular, el segundo teorema de incompletitud de Gödel, la imposibilidad prácticamente absoluta de completarlo.

No podemos detenernos aquí a explicar con detalle el contenido de los resultados limitativos, lo cual requiere por sí solo toda una asignatura aparte. Nos contentaremos con hacer un pequeño esbozo de tres de ellos, los más significativos: el teorema de Church y los dos teoremas de incompletitud de Gödel. (Una exposición detallada de estos y otros resultados limitativos, como el llamado "teorema de Tarski" y los "modelos no estándar de Skolem", se puede encontrar en el libro de Machover, *Set theory, logic and their limitations.*)

§ 3.22. El teorema de Church. El teorema de Church data de 1936, y establece que *la lógica de primer orden es indecidible.* Esto equivale a decir que en la lógica de primer orden no puede existir un procedimiento mecánico para verificar si una fórmula es derivable de otra o no. De ahí se deduce, que aunque hayamos formalizado completamente una teoría matemática, nunca existirá un procedimiento mecánico mediante el cual verificar cuáles son exactamente las proposiciones derivables de los axiomas.

En otras palabras: que aunque hayamos formalizado completamente una teoría matemática, nunca podremos fabricar un automatismo que se encargue por sí solo de encontrar las pruebas de todos sus teoremas. Tendremos que seguir buscando éstas, con paciencia y con ingenio, una a una.

La única excepción a tal circunstancia es que se tratara de una teoría inconsistente. En ese caso resultaría posible derivar de sus axiomas absolutamente cualquier proposición formulable en el lenguaje de la teoría, lo cual la convertiría en mecánicamente decidible, de una manera trivial. Pero es obvio que este tipo de teorías matemáticas carecen por entero de interés.

Todo ello, en fin, resulta extensible a cualquier programa de ordenador posible, que al fin y al cabo no es más que un conjunto de instrucciones mecánicas, aunque muy elaborado. Tampoco podrá existir nunca un programa de ordenador capaz de encontrar las pruebas de todos los teoremas de una teoría matemática que sea consistente, es decir: la capacidad de encontrar pruebas de cada programa concreto estará siempre limitada a un fragmento incompleto de la teoría en cuestión.

Y es por esto, entre otras razones, que como decíamos en su momento (p. 17) el surtido de conjeturas no decididas en matemáticas es virtualmente inagotable.

El problema de la decisión, uno de los objetivos más lejanos y ambiciosos que se había fijado el programa formalista, recibe así por efecto del teorema de Church una respuesta negativa.

§ 3.23. Los dos teoremas de incompletitud de Gödel. Por su parte, los dos teoremas de incompletitud de Gödel aparecieron simultáneamente en un memorable artículo, titulado "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los 'Principia Mathematica' y sistemas afines" y publicado en 1931 en la revista *Monatshefte für Mathematik und Physik* (disponible en castellano como libro suelto con ese título, y con distinta traducción en las *Obras completas* de Gödel, pp. 55–89).

Estos dos teoremas fueron, del conjunto de principales resultados limitativos, los primeros en aparecer cronológicamente, y al mismo tiempo los más importantes y devastadores para el programa formalista, especialmente el segundo de ellos.

El primer teorema de incompletitud de Gödel establece que *cualquier teoría formal para la aritmética que sea recursivamente axiomatizable es incompleta.* Una teoría formal es recursivamente axiomatizable cuando existe un procedimiento mecánico para identificar sus axiomas, es decir, cuando existe un procedimiento mecánico para determinar qué fórmulas del lenguaje formal corresponden a los axiomas de la teoría y qué otras no.

Lo que establece el primer teorema de incompletitud de Gödel es que cualquier teoría formal para la aritmética que cumpla ese elemental requisito es necesariamente incompleta, esto es, que deja fuera de la teoría algunas verdades aritméticas, que no resultan derivables de sus axiomas.

Podemos trasladar a un lenguaje formal apropiado los cinco axiomas de la aritmética de Peano, por ejemplo, o una extensión apropiada de estos axiomas, y el resultado será una teoría formal que comprenderá una gran parte de los enunciados aritméticos verdaderos. Pero sea cual sea la teoría formal que estemos manejando, siempre habrá una parte de esos enunciados verdaderos que se quede fuera de ella.

El segundo teorema de incompletitud, por su parte, es de un calado aún mayor, y se suele contar entre los mayores descubrimientos matemáticos de todo el siglo XX. Lo que establece este teorema, cuya prueba se apoya en el primero, es que *la consistencia de la aritmética no puede ser demostrada dentro de la propia aritmética.*

El segundo teorema de incompletitud afecta a cualquier teoría formal de la aritmética que sea recursivamente axiomatizable y que contenga un fragmento suficientemente representativo, como los cinco axiomas de Peano, por ejemplo. Y establece dicho que para demostrar la consistencia de tal teoría hace falta utilizar principios de razonamiento más fuertes que los contenidos en esa teoría, y en particular, que el propio principio de inducción matemática, que corresponde al quinto axioma de Peano.

Por razones técnicas, sencillas de entender, pero en las que no entraremos aquí, si la prueba de consistencia de la aritmética exige principios de razonamiento más fuertes que la inducción matemática, entonces la posibilidad de encontrar una prueba finitista de consistencia es prácticamente nula. El programa formalista de Hilbert, tal y como originalmente había sido diseñado, resulta imposible de realizar. (Véase por ejemplo Dummett, "El significado filosófico del teorema de Gödel", en su libro *La verdad y otros enigmas*, pp. 265–281.)

§ 3.24. Un episodio más en la crisis de fundamentos. La opinión de que el programa de Hilbert se había mostrado inviable cundió rápidamente entre la mayoría de los especialistas, y así se mantiene. Aunque los nervios provocados por el descubrimiento de Gödel dieron lugar a reacciones diversas en los primeros momentos. El propio Gödel, al final de su artículo niega sorprendentemente que su resultado suponga un obstáculo definitivo al programa de Hilbert (cf. Gödel, *Obras completas*, pp. 88–89). Y al publicar Hilbert y Bernays el primer volumen de sus *Grundlagen der Mathematik* tres años después, añadieron una aclaración muy reveladora, que recuerda a aquella nota precipitada de Frege años atrás, aunque en este caso Hilbert se resistía a admitir las consecuencias del resultado en cuestión:

> "(...) me gustaría manifestar que la opinión, temporalmente extendida, de que ciertos resultados de Gödel implican que mi teoría de la demostración no es posible, ha resultado ser errónea. De hecho, esos resultados demuestran únicamente que para obtener una prueba adecuada de la consistencia uno debe utilizar el método finitista de una forma más afinada de la que se necesita cuando se trata el formalismo elemental."
>
> (Hilbert y Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, citado en la Introducción a Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, p. LI.)

A pesar de estos gestos, poco a poco se iría haciendo patente que la crisis de fundamentos no sólo no había quedado resuelta con el programa de Hilbert como éste había esperado, sino que lejos de ello, se prolongaba, al constatarse el fracaso de su programa; y conocía así un episodio más.

§ 3.25. Otras vertientes formalistas. Al margen del fracaso del programa de Hilbert en su diseño original, al menos por lo que respecta a la obtención de una prueba finitista de consistencia y los demás resultados limitativos, la filosofía formalista de la matemática continuó extendiéndose, siendo su influencia durante todo el siglo XX, vasta y generalizada.

En efecto, hoy en día el formalismo como filosofía de la matemática ha penetrado profundamente en la mentalidad reinante, junto al propio platonismo puro, con el que a veces se alterna de forma singular. Como dicen Davis y Hersh,

> "(...) el típico matemático en activo es platónico entre semana y formalista los domingos. Es decir, mientras está haciendo matemáticas está convencido de tratar con una realidad objetiva, cuyas propiedades se esfuerza por determinar. Pero después, cuando se le desafía a que dé una descripción filosófica de tal realidad, le resulta más fácil fingir que no cree en ella para nada.".
> (Davis y Hersh, *Experiencia matemática*, p. 237).

Además de Peano, Hilbert, y sus respectivos colaboradores, otras figuras notables del formalismo han sido John von Neumann y Haskell Brooks Curry. También ha tenido mucho efecto sobre el llamado *"grupo Bourbaki"*, sociedad de matemáticos cuyos trabajos se publican de forma conjunta bajo el pseudónimo común de "Nicolas Bourbaki", y que fue fundada en 1935 por Jean Dieudonné, André Weil y otros matemáticos, en su mayoría franceses.

Georg Kreisel y Solomon Feferman han contribuido asimismo a desarrollar variantes del programa formalista, y en particular el método finitista, en líneas de trabajo cercanas al *constructivismo* que estudiaremos en el Módulo 4.

Por último, una esforzada defensa del formalismo hilbertiano, tratando de mostrar con argumentos filosóficos y técnicos que los teoremas de Gödel no suponen una refutación definitiva del mismo, ha sido la desarrollada por el profesor Michael Detlefsen en su libro *Hilbert's Program: An Essay on Mathematical Instrumentalism* ("El programa de Hilbert: Un ensayo sobre el instrumentalismo matemático"), de 1986 (atención al ejemplar de este libro que está depositado en la Biblioteca Luis Vives, porque en su cubierta exterior no aparece el nombre del autor, sino sólo el del editor de la colección editorial a la que pertenece: "Jaakko Hintikka").

Y para cerrar el Módulo terminaremos volviendo a citar al filósofo español Jesús Mosterín, esta vez por la encendida defensa del formalismo que hace en la Introducción a su *Teoría axiomática de conjuntos*:

> "Así como la fantasía musical del hombre produce sinfonías diversas, así también nuestra imaginación matemática concibe teorías distintas. (...) En el campo matemático hay sitio para muchos juegos. Y todos ellos son peligrosos, pues no está asegurada la consistencia de ninguno. Pero más vale arriesgarse

que aburrirse. La misión de este libro no es sino la de presentar uno de esos juegos. Ojalá el lector lo encuentre divertido."
(Mosterín, *Teoría axiomática de conjuntos*, p. 31.)

MÓDULO 4

El intuicionismo

El intuicionismo de Brouwer y Heyting

§ 4.1. Presentación de la posición intuicionista. El punto de vista *intuicionista* en filosofía de la matemática es aquel según el cual las teorías matemáticas consisten en la elaboración, manipulación y transformación de *construcciones mentales*.

Un ejemplo de este tipo de construcciones puede estar representado por la operación imaginaria de alinear cerillas sobre una superficie plana, formando una fila. La construcción consistente en colocar una sola cerilla puede ser identificada con el número 1, la construcción consistente en colocar dos cerillas alineadas puede ser identificada con el número 2, la construcción consistente en colocar tres cerillas con el número 3, y así sucesivamente.

La construcción consistente en no colocar ninguna cerilla, por su parte, podría ser identificada con el número 0.

El enunciado "$2+2 = 4$", por ejemplo, expresa bajo este punto de vista, la coincidencia entre dos procesos de construcción en principio distintos: aquel que consiste en colocar dos cerillas alineadas, y a continuación otras dos, y aquel que consiste en alinear directamente cuatro cerillas.

La naturaleza de estas construcciones no es física, sino mental. Lo importante es nuestra imagen ideal del proceso, que puede ser visualizada con cerillas, palillos, palotes, o con cualquier otro tipo de objeto.

Todo enunciado matemático debe ser traducible, según el punto de vista intuicionista, a la realización de construcciones de este tipo. Y la principal aspiración de esta escuela consiste en reconstruir las teorías matemáticas, hasta donde sea posible, siguiendo este punto de vista; es decir, en términos pura y exclusivamente constructivos.

§ 4.2. Infinito actual e infinito potencial. Uno de los aspectos donde más claramente se manifiesta la adopción del punto de vista intuicionista es en la concepción matemática del *infinito*.

Según una vieja distinción aristotélica, cabe diferenciar el *infinito actual*, como la presencia simultánea de una infinidad de objetos, del *infinito potencial*, como mera posibilidad de obtener más y más objetos de una manera indefinida (cf. Aristóteles, *Física*, Libro III, párrafo 206b, pp. 204–206). Se trata de dos conceptos completamente diferentes.

Por ejemplo, la construcción consistente en colocar imaginariamente cerillas alineadas, y que se acaba de describir, es un caso claro de infinito potencial, porque proporciona una pauta que se puede prolongar indefinidamente, esto es, que no se acaba nunca. Sin embargo, no llega a ser en ningún momento infinito actual o infinito en acto, porque en ningún momento llegamos a tener ante nosotros una construcción que correspondiese a esa totalidad infinita ya terminada.

Así, para los intuicionistas los números naturales son "infinitos", sólo en el sentido en que la elaboración de las construcciones que corresponden a cada uno de ellos, puede prolongarse indefinidamente. O dicho de otro modo: que sería posible construir, en principio, un número natural tan grande como queramos.

Por el contrario, lo que resulta inaceptable desde el punto de vista intuicionista es considerar al conjunto de todos los números naturales como una totalidad ya acabada, por la sencilla razón de que no existe ninguna construcción que corresponda a la *totalidad* de los números naturales. Lo único de lo que disponemos es de construcciones concretas que representan a cada uno de ellos.

§ 4.3. Verdad y falsedad bajo la óptica intuicionista. Otro de los aspectos donde la peculiaridad de esta posición filosófica aparece con especial viveza, es su concepción acerca de lo que hace verdaderos o falsos a los diversos enunciados matemáticos. Y es que bajo el prisma intuicionista, la verdad de un enunciado matemático reside en el hecho de que nosotros tengamos en nuestro poder, o estemos en disposición de tener, una determinada construcción matemática acorde a lo que dicho enunciado señala.

Y análogamente, lo que hace que un enunciado matemático sea falso, bajo esta perspectiva, es el hecho de que nosotros tengamos o estemos en disposición de tener una construcción matemática que *refute* lo dicho por ese enunciado. Refutación que se concibe a su vez como aquella construcción que, de ser aplicada a cualquier construcción hipotética que efectuase lo que dicta ese enunciado, condujera inmediatamente a una contradicción.

Esto se suele resumir diciendo que, desde el punto de vista intuicionista, la verdad de un enunciado p equivale al hecho de que *se ha probado* p, y la falsedad de p equivale al hecho de que *se ha refutado* p. Lo cual casa especialmente bien con la metafísica antirrealista acerca de las entidades matemáticas, que subyace a esta escuela: lo que hace que los enunciados matemáticos sean verdaderos o falsos no es ningún tipo de estructura o realidad exterior ajena a nosotros, sino que es precisamente el repertorio de pruebas y refutaciones (en definitiva, de construcciones) que nosotros mismos hayamos sido capaces de elaborar.

Una consecuencia inmediata de esta postura, es que algunos enunciados matemáticos resultan no ser ni verdaderos ni falsos. A saber, aquellos sobre los que no tenemos prueba ni refutación en un momento dado: las conjeturas matemáticas no decididas, que estudiamos en su momento. Y una consecuencia de esto, a su vez, es que nos vemos forzados a rechazar una de las leyes lógicas más básicas y arraigadas, el principio de tercio excluso, como vamos a ver enseguida.

§ 4.4. Matemática intuicionista y matemática clásica. Los matemáticos intuicionistas denominan *"matemática clásica"* al corpus de teorías, conceptos y resultados matemáticos habitualmente aceptados, y desarrollados al margen de los cánones de su singular filosofía. Y es que ocurre que, en efecto, como consecuencia de la adopción del punto de vista constructivo y la consiguiente restricción a la noción de infinito potencial, un importante número de conceptos y resultados de la matemática ordinaria tienen que ser reformados o abandonados, porque son sencillamente imposibles de mantener dentro de esos cánones.

En una palabra: que para ser fiel a la filosofía intuicionista resulta que hay que renunciar a una porción considerable de la matemática clásica.

Un ejemplo son los distintos tipos de infinito que se estudian en la teoría de conjuntos, de tamaños arbitrariamente grandes, y de los que hablamos en el Módulo 1 (p. 20). Como decíamos entonces, el conjunto de los números naturales es sólo el más pequeño de entre estos conjuntos infinitos, es decir, es el infinito más pequeño que se estudia en dicha teoría.

En la matemática intuicionista, sin embargo, sólo se admite como válido el infinito de los números naturales, y aún éste entendido exclusivamente como infinito potencial. Por consiguiente, el tratamiento matemático de esos otros conjuntos arbitrariamente grandes, que no pueden ser representados desde un punto de vista constructivo, es criticado y rechazado por parte de los intuicionistas, que lo consideran inadmisible, ilegítimo, carente de sentido.

De la misma manera, el tratamiento de los números reales y del análisis matemático que se lleva a cabo dentro de la escuela intuicionista, presenta profundas diferencias con el de la matemática clásica. Casi todas las nociones básicas reciben definiciones distintas a las habituales, aparecen distinciones nuevas, y son muchos los teoremas de la matemática clásica que no se pueden demostrar. Otro ejemplo, muy sencillo, de teorema de la matemática clásica que los intuicionistas rechazan, lo vamos a ver a continuación, en § 4.5.

Existen también, curiosamente, algunos resultados válidos para la matemática intuicionista y que son sin embargo contradictorios con la matemática clásica, pero esto hay que entenderlo como una consecuencia de la interpretación que se da en esta escuela a los distintos términos matemáticos, y que tan alejada está de su acepción ordinaria.

§ 4.5. La lógica intuicionista y la lógica clásica: el caso de los enunciados existenciales. También la estructura lógica de los enunciados y nuestra propia lógica deductiva deben ser reformadas para que reflejen adecuadamente el tipo de razonamiento que se practica dentro de la escuela intuicionista. El resultado es lo que se denomina *"lógica intuicionista"*, cuyas diferencias con la lógica habitual, la *lógica clásica*, son muy profundas.

En particular, todos los enunciados matemáticos, como ya hemos dicho, deben ser traducibles a la afirmación de que se ha llevado a cabo efectivamente una construcción, o al menos que se ha mostrado la posibilidad de llevarla a cabo. De este modo, según la composición lógica del enunciado en cuestión, siempre lo podremos identificar con la declaración de que es posible efectuar una determinada construcción matemática.

Tomemos por ejemplo los enunciados *existenciales*, esto es, aquellos enunciados que afirman la existencia de un objeto con ciertas características. Pues bien, su significado intuicionista será obviamente la afirmación de que es posible efectuar una construcción que responda a las características del objeto en cuestión.

Así, el enunciado

“Existe un número natural que multiplicado por sí mismo es igual a 49”

equivale a la afirmación de que se puede construir un número natural que, una vez realizadas las manipulaciones correspondientes a multiplicarlo por sí mismo, dé como resultado una construcción coincidente con la del número 49. En este caso el enunciado es verdadero, y la tal construcción existe, ya que como no es difícil adivinar se trata del número 7.

Sin embargo, en

“Existe un número natural que multiplicado por sí mismo es igual a 51”

nos encontramos con que resulta imposible llegar a efectuar dicha construcción, porque no hay ningún número natural que multiplicado por sí mismo, esto es, elevado al cuadrado, sea igual a 51.

Por otra parte, en el caso de aquellos enunciados matemáticos que expresan la existencia de infinitos objetos de unas determinadas características, a lo que equivale su significado desde el punto de vista intuicionista es a la afirmación de que se puede elaborar una construcción mediante la cual generar una sucesión indefinida de objetos de esas características. Es decir: que se puede elaborar una construcción mediante la cual generar una sucesión de objetos de esas características, que sea potencialmente infinita.

Por ejemplo, el enunciado

“Existen infinitos números primos”

debe ser interpretado desde el punto de vista intuicionista como la afirmación de que tenemos un procedimiento para generar números primos cada vez mayores, indefinidamente (es decir, un procedimiento que, dado cualquier número natural n, nos permite calcular un número que sea primo y mayor que n). En este caso concreto, como ya sabemos, existe tal procedimiento.

Y por su parte, el enunciado

“Existen infinitos primos gemelos”

asevera que poseemos un procedimiento para generar números primos gemelos de forma indefinida, cosa que hasta el momento no se ha conseguido, como también comentamos en su momento (cf. p. 16).

Por cierto que el mismo *principio del menor número* que enunciamos en § 1.21, resulta ser no admisible para los intuicionistas, que rechazan su validez y no lo consideran un teorema matemático aceptable. Y ello es sobre la base de que no existe un procedimiento para determinar, con carácter general, cuál sea el menor número de un conjunto de naturales arbitrariamente propuesto (no vacío), o cuál sea el menor número que cumpla una condición arbitraria dada (no vacua).

Así por ejemplo, no se sabe determinar en la actualidad cuál será el menor número natural que se repite trece veces seguidas en la expansión decimal de π. Se ha encontrado una secuencia de trece 8 seguidos (en la posición 2.164.164.669.332), pero no sabemos si habrá cifras menores que también se repitan trece veces, en alguna posición aún más alta. Por consiguiente, no se sabe determinar cuál es el menor número natural n que cumple con la condición de aparecer trece veces seguidas en la expansión decimal de π.

Entonces, el hecho de aplicar el *principio del menor número* nos obligaría a aceptar que existe un menor número natural que cumple con esa condición, la condición de aparecer trece veces seguidas en π, aun sin saber cuál es (es decir, aun sin saber si se trata del número 8, o de un número menor). Y éste es justamente el razonamiento que, desde el punto de vista intuicionista, resulta inaceptable: no se puede aceptar, bajo los cánones intuicionistas, que exista tal número, en tanto en cuanto no seamos capaces de determinar cuál es, o tengamos algún procedimiento que nos permita encontrarlo.

§ 4.6. Negaciones y disyunciones. Por su parte, la negación de enunciados como los anteriores no debe interpretarse simplemente como que carecemos de la construcción en cuestión, lo cual sería una forma demasiado trivial de entender la operación lógica de negación.

En su lugar, lo que los intuicionistas proponen, como ya hemos adelantado, es que la negación de un enunciado matemático sea entendida como una refutación del mismo, es decir: como la declaración de que se ha conseguido llevar a cabo una construcción que muestra que lo que propone dicho enunciado es absurdo, y por tanto imposible.

Así por ejemplo, el significado intuicionista del enunciado

“No existe un número natural que multiplicado por sí mismo sea igual a 51”

equivale a afirmar que estamos en posesión de una prueba de que no existe tal número, esto es, de que no puede existir una construcción dentro de la serie de los números naturales que cumpla con esas características.

A su vez, ese argumento debe constituir él mismo un razonamiento constructivo, es decir, debe consistir en la descripción de un proceso constructivo para retrotraer cualquier construcción hipotética que estableciese el enunciado en cuestión, a un absurdo básico inmediatamente reconocible, como pueda ser por ejemplo la identidad “$1 = 2$”. En otras palabras: que tenemos una construcción que transformaría cualquier prueba hipotética de ese resultado en una prueba de que $1 = 2$. En el caso que acabamos de mencionar esto resulta sencillo, porque basta con comprobar que siendo el cuadrado de 7 igual a 49, y el de 8 igual a 64, no puede existir ningún otro número natural cuyo cuadrado esté situado entre ambos.

Por otra parte, muy distinto resulta el caso de este otro enunciado

“No existen infinitos primos gemelos”

En este caso, el significado intuicionista de tal enunciado consistiría en una refutación de la existencia de infinitos primos gemelos: es decir, en una prueba de que nunca va a ser posible demostrar que los primos gemelos sean infinitos.

Ahora bien, la conjetura de los primos gemelos, como sabemos, tampoco ha sido a fecha de hoy refutada. Es decir, no conocemos a fecha de hoy ningún argumento, ni constructivo ni de ningún tipo, que pruebe que la existencia de infinitos primos gemelos sea absurda.

Y visto así lo que significan para los matemáticos intuicionistas los enunciados existenciales y las negaciones, vamos a describir por último el caso de los enunciados disyuntivos o *disyunciones*. Una disyunción es un enunciado en el cual se plantea una alternativa entre distintas posibilidades, normalmente dos, que constituyen lo que se llama *"disyuntos"*:

"O se mantienen las actuales medidas de protección, o se extinguirá el lince ibérico"

Pues bien: a lo que equivalen este tipo de enunciados en matemáticas, según la escuela intuicionista, es a la afirmación de que se ha llevado a cabo, o se ha mostrado cómo llevar a cabo, al menos una de las construcciones correspondientes a los enunciados que componen la disyunción. O lo que es lo mismo: que para aseverar una disyunción es necesario contar con la capacidad de producir al menos la construcción correspondiente a uno de los disyuntos.

§ 4.7. El rechazo al principio de tercio excluso. Y es así como llegamos finalmente a la razón por la cual una ley lógica tan básica y fundamental como el *principio de tercio excluso* resulta ser rechazado por parte de los intuicionistas, *inválido* en su sistema de lógica, y no utilizable de manera general en el cultivo de las matemáticas que se hace dentro de esta escuela:

> "La creencia en la validez universal del principio de tercio excluso en matemáticas es considerada por los intuicionistas como un fenómeno en la historia de la civilización del mismo tipo que la vieja creencia (...) en la rotación del firmamento alrededor de la Tierra."
> (Brouwer, *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, p. 7.)

El principio de tercio excluso es, en efecto, aquella ley lógica que nos permite afirmar en cualquier circunstancia la disyunción entre un enunciado y su propia negación, como por ejemplo en

"O está lloviendo o no está lloviendo"

Si podemos afirmar una oración así con independencia del tiempo que haga, es porque en dicho enunciado ya quedan recogidas las dos posibilidades existentes. O dicho de otro modo, porque el enunciado en cuestión "excluye una tercera posibilidad", que es de donde le viene el nombre al principio lógico que estamos comentando. Bien entendido, naturalmente, que contamos con una definición precisa del concepto de *lluvia*, que trace una división exacta entre lo que es estar lloviendo y lo que no.

Pues bien, es muy sencillo comprobar que, en efecto, el principio de tercio excluso resulta inadecuado cuando lo trasladamos al lenguaje intuicionista de las construcciones matemáticas.

Para ello basta con tomar, por ejemplo, el enunciado

"O existen infinitos primos gemelos o no existen infinitos primos gemelos"

Éste es un enunciado disyuntivo, y lo que afirma es por tanto que se ha efectuado o se está en condiciones de efectuar una determinada construcción, a saber, la que corresponde a uno de los dos disyuntos por lo menos.

Sin embargo, como ya hemos insistido varias veces, en el momento actual no tenemos a nuestra disposición ni una construcción que nos permita generar primos gemelos de forma infinita, o indefinida, ni tampoco una demostración de que tal construcción sea imposible de fabricar. No estamos en condiciones de aseverar ninguno de los dos disyuntos del citado enunciado, y es por eso que, de acuerdo con la concepción intuicionista, tampoco estamos en condiciones de aseverar la disyunción.

La clave para entender esto se halla en que para los intuicionistas el enunciado disyuntivo sobre los primos gemelos no trata, a diferencia de la disyunción sobre si está lloviendo, de una realidad objetiva externa a nosotros, sino que trata sobre nuestras propias construcciones mentales.

Es por ello mismo que, de acuerdo con la filosofía intuicionista, mientras no consigamos establecer mediante esas construcciones que se da alguno de los dos disyuntos del enunciado en cuestión, (cosa que puede que no ocurra nunca), resulta equivocado, o carente de sentido, afirmar que uno de los dos está ya predeterminado como verdadero antes de nosotros saberlo.

Se rompe por tanto, en definitiva, con otra ley lógica elemental, íntimamente emparentada con el principio de tercio excluso: el llamado *"principio de bivalencia"*. Según este otro principio, todo enunciado tiene un valor de verdad predeterminado, verdadero o falso, con independencia de que nosotros lo conozcamos o no. Dicho principio tampoco resulta válido, en efecto, dentro de la concepción intuicionista, ya que, por ejemplo, no podemos afirmar que el enunciado "Existen infinitos primos gemelos" tenga ya un valor de verdad predeterminado, mientras no estemos en condiciones de producir una de las dos construcciones correspondientes.

Y como éstas, hay muchas otras diferencias, en fin, entre la lógica clásica y la lógica intuicionista, que afectan a otras leyes, y a la estructura lógica de otros enunciados, como los enunciados condicionales y los enunciados universales. Pero nosotros no entraremos ya a examinarlas aquí con más detalle (una introducción asequible es la "Lógica intuicionista" de García Suárez, en Garrido (ed.), *Lógica y lenguaje*, pp. 178–189).

§ 4.8. El intuicionismo de Brouwer y Heyting. El principal fundador y figura de referencia en la escuela de matemática intuicionista fue sin duda el matemático holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer, que sentó los cimientos de esta doctrina en su tesis de doctorado, publicada en 1907 y titulada "Over de grondslagen der wiskunde" ("Sobre los fundamentos de la matemática").

En esa primera obra Brouwer destaca ya la importancia que tiene para las matemáticas nuestra *"intuición del tiempo"*, esto es, nuestra capacidad de percibir el paso del tiempo, y la repetición de secuencias temporales. Una idea de raigambre kantiana, que está en el origen, para Brouwer, de nuestra concepción de los números naturales, y a partir de ahí, de toda la matemática. Lo cual explica la denominación de "intuicionismo", escogida por Brouwer, pocos años después, para dar nombre a su propia filosofía (cf. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, pp. 127ss., 147ss.).

Aunque la tesis doctoral de Brouwer estaba escrita en holandés y su impacto inicial fue muy pequeño, sus publicaciones posteriores, y la fama que ganaría rápidamente Brouwer como matemático notable, atrajeron una considerable atención hacia él, y hacia su particular manera de entender la naturaleza de la matemática.

Brouwer entró con fuerza en el debate producido a principios de siglo, a raíz de la manida crisis de fundamentos que siempre acabamos comentando. Hilbert criticó duramente sus posiciones, por la gran renuncia que entrañaban a enormes fragmentos de la matemática clásica, y que contribuía claramente a magnificar la sensación de crisis producida por el descubrimiento de las paradojas. Otros matemáticos manifestaron su interés o su simpatía con la forma de hacer matemáticas de Brouwer, como ocurrió por ejemplo con el caso del eminente matemático alemán Hermann Weyl.

Con el tiempo, sin embargo, la escuela intuicionista continuaría existiendo, como existe hoy día, pero restringida a un círculo bastante minoritario de matemáticos que se interesan por ella, aunque curiosamente en ese círculo cabe encontrar siempre algunos de los matemáticos más distinguidos del momento (cf. Fraenkel, Bar-Hillel y Levy, *Foundations of Set Theory*, p. 215).

La obra de referencia más importante de Brouwer son sus *Cambridge Lectures*, de las que hemos hecho una mención en la sección anterior, y que fueron publicadas póstumamente, a partir de sus notas para unas series de conferencias impartidas entre 1946 y 1951. El grueso de sus publicaciones en filosofía de la matemática, sin incluir las *Cambridge Lectures* pero sí su tesis doctoral, se encuentran recopiladas en el primer volumen de sus *Collected Works, vol. 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*.

Una referencia esencial para el intuicionismo brouweriano es el denso y erudito ensayo de van Stigt titulado *Brouwer's Intuitionism* ("El intuicionismo de Brouwer"), publicado en 1990.

Y otro tratado de referencia inexcusable son los *Elements of Intuitionism* ("Elementos del intuicionismo") de Michael Dummett, cuya segunda edición se publicó en el año 2000, y que contiene una larga exposición filosófica actualizada, gran parte de la cual ha tenido su origen en el trabajo del propio Dummett. Desafortunadamente, ninguna de estas obras ha sido traducida al castellano hasta el momento.

Sí disponemos de traducción castellana del manual de *Introducción al intuicionismo* que publicó en 1956 el discípulo y principal continuador de la obra de Brouwer, el también holandés Arend Heyting, y del cual ha sido extraído el fragmento que vamos a reproducir a continuación.

También hay un extenso capítulo dedicado al intuicionismo en el libro de Jesús Alcolea *Logicismo, formalismo, intuicionismo*, que venimos recomendando.

§ 4.9. Preliminares a la lectura de Heyting. La *Introducción al intuicionismo* de Heyting es un curioso tratado de matemática intuicionista escrito en forma de diálogo, cuyos personajes representan distintos puntos de vista en filosofía de la matemática, de los que habían protagonizado el debate durante la primera mitad del siglo XX.

Entre esos personajes está "For", que representa el punto de vista formalista, "Clas", que representa a la matemática clásica, e "Int", en representación del intuicionismo, que es obviamente el que más habla a lo largo de la obra.

En el fragmento que vamos a reproducir a continuación, Heyting propone considerar las definiciones de dos números naturales, k y l. Según la definición de k, éste será el mayor número primo tal que $k-1$ sea también primo, si es que lo hay, y el número 1 en caso de que no exista tal número. Esto exige una pequeña explicación.

Sea cual sea k, es claro que será el sucesor de $k-1$, es decir: que k y $k-1$ son números contiguos. Por lo tanto, si uno de ellos es par, el otro será impar. Pero el único número par que es primo es el 2, ya que todos los demás números pares son obviamente divisibles por 2, por lo que no pueden ser primos. Por consiguiente no puede haber ninguna pareja de números primos que sean contiguos, a excepción de las que forman los tres primeros números naturales, el 1, el 2 y el 3.

Los únicos primos contiguos que hay son los números 1, 2 y 3. A partir del 3 ya no vuelve a haber dos números primos consecutivos. Así pues, los dos mayores primos contiguos son el 2 y el 3. O lo que es lo mismo: el mayor número primo k tal que $k-1$ es también primo sí existe en este caso, y es el número 3.

Por otra parte, Heyting considera la definición de l como el mayor número primo tal que $l-2$ sea también primo, si es que lo hay, y el número 1 en caso de que no exista tal número. En este caso hay 2 unidades entre l y $l-2$, con lo que es inmediato que se trata de dos primos gemelos.

Con respecto a los primos gemelos, sin embargo, no sabemos si son infinitos o no. Si fueran infinitos, no habría ningún par de primos gemelos que fueran los mayores de todos, ya que la serie de primos gemelos no tendría fin. En tal caso, dada la definición del número l, tendríamos que concluir que $l = 1$.

Sin embargo, si los primos gemelos fueran finitos, entonces sí habría un último par, mayor de todos, y en tal caso l sería igual al mayor de los componentes de ese par.

Mientras que no sepamos si los primos gemelos son infinitos o no, es decir, mientras no esté resuelta la conjetura de los primos gemelos, no estaremos en condiciones de especificar el valor de l, lo cual aduce Heyting para rechazar esa definición.

§ 4.10. Lectura de Heyting (<u>Introducción al intuicionismo</u>).

> "Clas.— ¿Cómo está usted, señor In? ¿No se ha escapado al campo en un día de verano tan hermoso?
> "In.— Se me habían ocurrido algunas ideas, y he estado trabajando sobre ellas en la biblioteca.
> "Clas.— ¡Qué laboriosa abeja! ¿Y cómo le ha ido la cosa?
> "In.— Bastante bien. ¿Bebemos algo?
> "Clas.— Gracias. Apuesto a que ha estado trabajando sobre esas aficiones suyas, el rechazo del tercio excluso, y todo eso. Nunca he comprendido por qué la lógica debería ser fiable en cualquier otra cosa, pero no en las matemáticas.
> "In.— Ya hemos hablado de eso con anterioridad. La idea de que para la descripción de ciertos tipos de objetos puede ser más adecuado otra lógica, en vez de la ordinaria, ha sido sugerida algunas veces. Pero fue Brouwer el primero que descubrió un objeto que efectivamente requiere una clase distinta de lógica, a saber, la construcción mental matemática (. . .). Y la razón es que en matemáticas, desde el comienzo mismo tratamos de lo infinito, mientras que la lógica corriente está hecha para razonar acerca de colecciones finitas.
> "Clas.— Lo sé, pero a mi entender la lógica es universal, y se aplica a lo infinito tanto como a lo finito.
> "In.— Debería usted tener en cuenta cuál era el programa de Brouwer (. . .): éste consistía en investigar las construcciones mentales matemáticas como tales, sin hacer referencia a cuestión alguna acerca de la naturaleza de los objetos construidos, tal como la de si existen independientemente de nuestro conocimiento de ellos. Y que este punto de vista conduce inmediatamente a rechazar

el principio de tercio excluso es algo que como mejor puedo demostrar es mediante un ejemplo.

"Comparemos dos definiciones de números naturales, digamos k y l:

"*Definición 1.*

$$k = \begin{cases} \text{el mayor número primo tal que } k-1 \text{ también sea primo, si lo hay} \\ \\ 1, \text{ en caso de que no exista tal número} \end{cases}$$

"*Definición 2.*

$$l = \begin{cases} \text{el mayor número primo tal que } l-2 \text{ también sea primo, si lo hay} \\ \\ 1, \text{ en caso de que no exista tal número} \end{cases}$$

"La matemática clásica desdeña completamente la obvia diferencia de carácter entre estas dos definiciones. El número k puede ser efectivamente calculado ($k = 3$), mientras que no poseemos ningún método para calcular l, ya que no se sabe si la sucesión de pares de primos gemelos (...) es finita o no. De ahí que los intuicionistas rechacen la Definición 2 como definición de un número entero: consideran que sólo está bien definido un número entero cuando se da un método para calcularlo. Ahora bien, este modo de razonar lleva a rechazar el principio de tercio excluso, ya que si la sucesión de números primos gemelos fuese o bien finita o bien infinita, entonces la Definición 2 sí definiría un número entero.

"CLAS.— A eso puede objetarse que el grado de nuestros conocimientos acerca de la existencia o inexistencia del último par de primos gemelos es puramente contingente, y carece de trascendencia para las cuestiones relativas a la verdad matemática. O bien existe una infinidad de tales pares, en cuyo caso será $l = 1$, o bien el número de primos gemelos es finito, y entonces l será el mayor de ellos, es decir, el mayor número primo tal que $l - 2$ sea también primo. En cualquiera de los casos concebibles, l está definido; ¿qué importa que podamos o no calcularlo realmente?

"IN.— El argumento que emplea usted es de índole metafísica. Si "existir" no significa "haber sido construido", entonces ha de poseer algún significado metafísico. Y no puede ser la incumbencia de la matemática investigar semejante significado, o decidir si es sostenible o insostenible. No ponemos ninguna objeción a que un matemático privadamente admita la teoría metafísica que le plazca, pero el programa de Brouwer entraña que estudiemos las matemáticas como algo más simple y más inmediato que la metafísica: en el estudio de las construcciones mentales matemáticas, "existir" ha de ser sinónimo de "haber sido construido".

"CLAS.— Eso quiere decir, que mientras no sepamos si existe o no un último par de primos gemelos, la Definición 2 no será una definición de un número entero, pero que en cuanto se resuelva ese problema se convertirá en tal definición repentinamente. Supongamos que el 1 de enero de 1976 se demuestra

que existe una infinidad de primos gemelos. A partir de ese momento, $l = 1$. Pero antes de esa fecha, ¿era $l = 1$ o no? (...).
"In.— Todo enunciado matemático afirma el hecho de que cierta construcción matemática ha sido efectuada. Resulta patente que antes de que la construcción haya sido realizada, no había sido realizada. Aplicando esto a su ejemplo, lo que vemos es que antes del 1 de enero de 1976 no había sido probado que $l = 1$. Pero no era a esto a lo que usted se refería. Me parece a mí que para poder aclarar el sentido de su pregunta tiene usted que referirse otra vez a conceptos metafísicos: a un mundo de objetos matemáticos que existiesen independientemente de nuestro conocimiento, y en el cual $l = 1$ sería verdadero en algún sentido absoluto. Pero yo repito que las matemáticas no deberían depender de conceptos tales como ése. Todos los matemáticos (...) están convencidos de hecho de que en algún sentido las matemáticas se refieren a verdades eternas, pero cuando tratamos de definir con precisión tal sentido, nos encontramos enredados en un laberinto de dificultades metafísicas. La única forma de eludir esas dificultades es desterrarlas de las matemáticas. A esto es a lo que me refería al decir que nosotros estudiamos las construcciones matemáticas como tales, y que para ese estudio la lógica clásica resulta inadecuada."
(Heyting, *Introducción al intuicionismo*, pp. 13–14, con traducción en parte distinta a la aquí ofrecida.)

Desarrollos posteriores de intuicionismo y constructivismo

§ 4.11. El intuicionismo y otras escuelas constructivas. El intuicionismo es la principal escuela de matemática constructiva, es decir, que identifica la existencia de los objetos matemáticos con la posibilidad de cierta construcción, pero no es la única. Junto al intuicionismo existen otras escuelas y corrientes, que difieren a la hora de especificar el tipo de construcciones que son aceptables para representar a los distintos objetos matemáticos, los modos de inferencia permitidos para razonar sobre ellas, etc.

Entre estas otras escuelas destacan el *constructivismo recursivo*, iniciado por el matemático ruso Andrei Markov en la década de 1930, y el llamado *"constructivismo de Bishop"*, fundado en 1967 por el estadounidense Errett Bishop, con la publicación de su libro *Foundations of Constructive Analysis* ("Fundamentos de análisis constructivo"). Esta última resulta la más restrictiva de las tres, con la singularidad de que todos sus teoremas resultan compatibles con las otras dos escuelas, el intuicionismo y el constructivismo recursivo.

Además, el constructivismo se presenta en muchas otras variantes y corrientes distintas. Una de ellas es la tradición de *matemática predicativa*, que tiene su origen en la sugerencia de Poincaré de evitar las definiciones impredicativas, según vimos (cf. p. 48).

Poincaré fue en buena medida un precursor del intuicionismo de Brouwer, aunque su filosofía de la matemática fluctúa a veces con posiciones convencionalistas, afines a las que defendía para la ciencia natural. De él se pueden consultar en castellano *Ciencia y método*, *La ciencia y la hipótesis* y la recopilación *Filosofía de la ciencia*, todas las cuales contienen secciones dedicadas a la filosofía de la matemática. Y existe además una extensa monografía escrita en castellano, dedicada exclusivamente a su filosofía de la matemática: *La filosofía de la matemática de H. Poincaré*, del profesor Javier de Lorenzo.

También está disponible en nuestra lengua la *Filosofía de la matemática y de la ciencia natural* de Hermann Weyl, continuador de la tradición predicativista de Poincaré, aunque esta obra en concreto está escrita más bien como una introducción general a la disciplina.

El propio finitismo desarrollado por Kreisel o Feferman al que nos referimos en el Módulo 2 (p. 72) está englobado dentro de las variantes del constructivismo, porque el método finitista en sí mismo es al fin y al cabo una forma de constructivismo, aunque la función que se le quiera dar dentro del programa formalista sea muy ajena a la filosofía intuicionista de la matemática.

Y el constructivismo no se agota en estas variantes, sino que hay otras.

Un excelente compendio de matemática constructiva "de amplio espectro" es el manual de Troelstra y van Dalen *Constructivism in Mathematics: An Introduction*, publicado en 2 volúmenes en 1988. Y un año antes se publicó otro más breve, cuyo título da buena cuenta de la diversidad de enfoques que existe en este terreno: *Varieties of Constructive Mathematics*, de Bridges y Richman. Una diversidad que a la postre constituye también un obstáculo para la credibilidad de esta opción en filosofía de la matemática.

§ 4.12. Intuicionistas estrictos y simpatizantes: las dos tesis de Kreisel. En 1962, Kreisel publicó un artículo titulado "Foundations of intuitionistic logic" ("Fundamentos de lógica intuicionista"), en el cual distinguía dos aspectos o tesis claramente diferenciables en la matemática intuicionista, uno *negativo* y otro *positivo* (cf. Nagel, Suppes y Tarski (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the 1960 International Congress*, p. 198).

La tesis positiva es que la noción intuicionista de *construcción matemática* proporciona una base clara y legítima para desarrollar teorías matemáticas a partir de ella, de forma sistemática. La tesis negativa vendría a decir que ésa es la única vía posible para cultivar las matemáticas, y que por consiguiente la matemática clásica debe ser rechazada.

Pues bien, la mayor parte de los estudiosos del intuicionismo de hoy en día vienen a suscribir, junto con el propio Kreisel, su tesis positiva, pero no la negativa. Es decir: manifiestan un interés por el punto de vista intuicionista, y lo que resulta de su desarrollo, pero no creen que sea el único inteligible o legítimo. Entre los intuicionistas estrictos cabía contar como ejemplo notable al filósofo Michael Dummett, pero lo cierto es que la mayor parte de los pensadores interesados por el tema deberían ser clasificados más bien como simpatizantes, o "filointuicionistas".

Y otro tanto cabe hacer extensible al resto de escuelas y corrientes constructivas, tal y como explican por ejemplo los autores de los manuales antes mencionados, nada más comenzar los mismos (cf. Troesltra y van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, p. viii; Bridges y Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*, pp. v-vi).

Yo mismo he dedicado una parte de mi tarea profesional de investigación a la semántica de la lógica intuicionista, sin considerarme intuicionista en absoluto.

§ 4.13. Defensa moderna del intuicionismo en Michael Dummett. El filósofo británico Michael Dummett (fallecido en 2011) llevó a cabo una defensa renovada de la posición intuicionista, reformulando en buena medida los argumentos filosóficos sobre los que se había venido sosteniendo.

Hay que decir que la filosofía original de Brouwer era de un idealismo extremo, de acuerdo con el cual las construcciones matemáticas son construcciones mentales individuales, que sólo existen como tales en la mente de un matemático aislado, y que resultan necesariamente distorsionadas al ser transmitidas mediante el lenguaje, y comunicadas a otros matemáticos (cf. Alcolea, *Logicismo, formalismo, intuicionismo*, pp. 117–124, o van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, pp. 203–210).

Este aspecto excesivamente individualista o *solipsista* de la filosofía de Brouwer fue puesto en duda por muchos de sus seguidores, empezando por su discípulo Heyting (cf. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, pp. 274–279). Y es también rechazado por Dummett, que hace de la comunicabilidad lingüística uno de los aspectos esenciales de las construcciones mentales intuicionistas (cf. Dummett, *Elements of Intuitionism*, p. 270), y que justo basa su defensa en el intuicionismo en su mayor capacidad para explicar el lenguaje matemático como una actividad social compartida, determinada exhaustivamente a partir del uso que de él se hace.

Además, Dummett también ha situado al intuicionismo como un caso paradigmático de filosofía idealista (o antirrealista) acerca de un fragmento de nuestro discurso, en este caso el discurso matemático. Y ha aplicado la comparación, en particular, al campo de las teorías del significado, contraponiendo la semántica intuicionista (o *verificacionista*), a la semántica *realista*: la primera se basa en la noción de *prueba matemática* (demostración) para dar las condiciones del significado, mientras que la segunda se basa en la noción de *verdad*. Así, es la semántica intuicionista la que ofrece, según Dummett, el prototipo de teoría del significado por la que se debería regir cualquier fragmento de nuestro lenguaje sobre el cual queramos adoptar una actitud antirrealista (cf. Dummett, *La verdad y otros enigmas*, en esp. pp. 321–322; y “What is a theory of meaning (II)”, en Evans y McDowell (eds.), *Truth and meaning*, en esp. pp. 110–111).

En castellano contamos con la traducción de una de las compilaciones de artículos de Dummett, *La verdad y otros enigmas*, en la que se incluye uno de sus artículos clásicos sobre el tema, “Las bases filosóficas de la lógica intuicionista” (de 1975), del cual están extraídos los fragmentos que vamos a reproducir a continuación. (También puede consultarse, por ejemplo, el trabajo de Ponte Azcárate, M., “Michael Dummett: una defensa del anti-realismo en las matemáticas”, en *Laguna: Revista de filosofía* 9, 2001, pp. 151–162.)

§ 4.14. Lectura de Dummett (“Las bases filosóficas de la lógica intuicionista”).

> “El problema que me ocupa en esta ocasión es el siguiente: ¿qué razón convincente puede existir para repudiar, dentro del razonamiento matemático, los cánones de la lógica clásica en favor de los de la lógica intuicionista? No estoy interesado aquí, por lo tanto, en las justificaciones de la matemática intuicionista desde un punto de vista ecléctico, es decir, desde un punto de vista en el que se admite a la matemática intuicionista como una forma legítima e interesante de matemática junto con la matemática clásica (...). Tampoco me interesa aquí la interpretación de los escritos de Brouwer o Heyting: el

problema es qué formas de justificación de la matemática intuicionista son sostenibles, no cuáles tenían en mente determinados autores, por muy eminentes que fueran. (. . .)

"Cualquier justificación para adoptar una y no otra lógica como la lógica para las matemáticas debe depender de cuestiones de *significado*.

"(. . .) El significado de un enunciado matemático determina y está determinado de manera exhaustiva por su *uso*. El significado de este tipo de enunciado no puede ser, ni contener como ingrediente, nada que no esté manifiesto en el uso que de él hagamos, y que descanse únicamente en la mente del individuo que aprehende dicho significado: si dos individuos están de acuerdo por entero en cuanto al uso que debe hacerse del enunciado en cuestión, entonces están de acuerdo en cuanto a su significado. La razón es que el significado de un enunciado consiste exclusivamente en su papel como instrumento de comunicación entre individuos."
(Dummett, "Las bases filosóficas de la lógica intuicionista", en su libro *La verdad y otros enigmas*, pp. 296–297, con traducción en parte distinta a la aquí ofrecida.)

"(. . .) en la teoría del significado que subyace al platonismo, la comprensión que un individuo tiene del significado de una oración consiste en su conocimiento de qué condición debe cumplirse para que la oración sea verdadera, aun cuando la condición sea tal que no pueda, en general, reconocerse que se cumple cuando así ocurre.

"(. . .) Cuando la oración es tal que estamos en posesión de un procedimiento de decisión efectivo, no hay, de nuevo, problema alguno: la comprensión de la condición bajo la cual la oración es verdadera puede decirse que resulta manifestada a través del dominio de ese procedimiento de decisión, ya que el individuo es capaz, a través de ese medio, de situarse en una posición en la cual pueda reconocer si la condición para la verdad de la oración se da o no. Y nosotros podemos suponer razonablemente que, en esta posición, el individuo está expresando mediante su comportamiento lingüístico su reconocimiento de que la oración es, respectivamente, verdadera o falsa. Sin embargo, cuando la oración en cuestión es una para la que no hay procedimiento de decisión efectivo, como sucede con la inmensa mayoría de oraciones de cualquier teoría matemática interesante, la situación es diferente. Dado que la oración en este caso no es, por hipótesis, decidible mediante un procedimiento efectivo, la condición que debería, en general, cumplirse para que sea verdadera, no es tal que nosotros seamos capaces de reconocer que se cumple, o de situarnos en una posición en la que lo podamos reconocer. Por lo tanto, los comportamientos en los que se exhibe una capacidad para discernir la oración como verdadera allí donde la condición para su verdad puede ser efectivamente reconocida, no serán más que una manifestación incompleta del conocimiento de la condición para la verdad de la oración en cuestión: tan sólo muestran que la condición puede ser reconocida en algunos casos, no que tengamos una comprensión de en qué consiste, en general, que se cumpla esa condición, incluyendo los casos

en los que somos incapaces de reconocer que se cumple. Es evidente, de hecho, que el conocimiento que se atribuye a alguien que se supone que entiende la oración es un conocimiento que trasciende la capacidad de ser manifestado mediante el uso de dicha oración. La teoría platónica del significado no puede ser una teoría en la cual el significado esté completamente determinado por el uso."
(Dummett, ibídem, pp. 305–307, con traducción en parte distinta a la aquí ofrecida.)

§ 4.15. Las tres escuelas fundacionales. Cada una de las tres escuelas fundacionales en filosofía de la matemática comprendían, como hemos visto, dos ingredientes principales: una tesis filosófica sobre la naturaleza de la matemática, y un proyecto de investigación de carácter marcadamente técnico, que consiste en llevar a efecto dicha tesis, con lo que esto significa en cada caso. Dos ingredientes distintos, pero complementarios, y que muy bien pueden resultar fructíferos por separado.

En el caso del logicismo, el proyecto de llevar a cabo una reducción de la aritmética a la lógica fracasó, al menos en su formulación original, debido a las paradojas de la teoría de conjuntos. Pero en absoluto se puede considerar que haya sido "un fracaso", pues gracias a él se profundizó enormemente en la lógica, la teoría de conjuntos y en la propia filosofía de la matemática. Además, sigue contando con continuadores y adeptos, si bien en versiones convenientemente modificadas a partir de la formulación inicial.

En el caso del formalismo, el proyecto de formalizar todas las teorías matemáticas y suministrar una prueba finitista de consistencia también fracasó, debido a los resultados limitativos, y en especial los teoremas de incompletitud de Gödel, que mostraron que no era posible una formalización completa ni siquiera de la aritmética, y que tampoco se podría nunca suministrar una prueba finitista de consistencia de la misma.

Pero tampoco se puede considerar que el formalismo fuera "un fracaso", pues esos resultados, aún siendo limitativos, se cuentan entre los más preciados e interesantes que ha dado la ciencia durante todo el siglo XX. Y también cuenta por supuesto con seguidores actuales, que defienden el cuerpo central de su doctrina, proponiendo distintas modificaciones.

El intuicionismo, por su parte, no ha experimentado ningún resultado adverso similar a los anteriores, lo cual no es muy sorprendente dado el carácter tan restrictivo de sus presupuestos. Por otra parte, siempre fue a fin de cuentas una opción marginal y minoritaria, y lo continúa siendo, además de contar con muchas alternativas rivales dentro del propio espectro de la matemática constructiva. En lo que toca a la filosofía intuicionista propiamente dicha, por su parte, ésta sí ha evolucionado visiblemente, renunciando a muchas de las tesis principales que alentaron sus primeros comienzos.

En otras corrientes en filosofía de la matemática que están en boga en la actualidad también se da esa provechosa dualidad, entre una tesis filosófica y un proyecto de investigación, que casi siempre emprende con tesón el mismo filósofo que plantea la tesis en cuestión. Algunos ejemplos de esto son el estructuralismo y el nominalismo, de los que trataremos brevemente al final del Módulo 6.

MÓDULO 5

El convencionalismo

Seguir una regla

§ 5.1. Presentación del convencionalismo. Una posición convencionalista con respecto a una teoría matemática es aquella según la cual la teoría es un mero complejo de *convenciones*, cuyo carácter es *normativo* en vez de descriptivo o representativo. No existen, según esta filosofía, unos "fundamentos" de la matemática que el filósofo tenga la misión de buscar y de formular.

En su lugar, la misión de la filosofía de la matemática consiste en explicar las condiciones de posibilidad de las convenciones sociales en general, y la naturaleza de las teorías matemáticas como un caso especial de éstas, con todas sus particularidades.

El convencionalismo tiene algunos puntos de unión con el formalismo, por lo que respecta a la consideración de las teorías matemáticas como productos de una cierta estipulación, o convención. Sin embargo, mientras el formalista considera necesario fundamentar esas convenciones mediante una formalización exhaustiva de las mismas y una demostración de consistencia, el convencionalista entiende que se trata de prácticas sociales establecidas, legítimas por sí mismas, y que no hay por tanto nada que fundamentar.

Una y otra corriente, convencionalismo y formalismo, tienen también debilidades comunes: les cuesta trabajo explicar la ubicuidad de los conceptos matemáticos en el resto de las ciencias, y su patente fertilidad, o aplicabilidad, en nuestro conocimiento del mundo exterior. Si las teorías matemáticas son meros juegos convencionales, como puedan serlo el ajedrez, o el juego de la oca, entonces ¿de dónde derivan su aspecto de uniformidad, la ubicuidad de sus conceptos fundamentales, la importancia y la utilidad que tienen para otras ramas de nuestro conocimiento? Estas son el tipo de cuestiones difíciles de responder para formalistas y convencionalistas, y en las que no suelen detenerse los representantes de estas líneas de pensamiento.

En nuestra aproximación al convencionalismo, nosotros vamos a tratar aquí principalmente de las aportaciones del filósofo austriaco Ludwig Wittgenstein, que es en mi opinión el principal representante de la línea de pensamiento convencionalista en la filosofía de la matemática contemporánea.

Otra figura muy notable que también abrazó cierta forma de convencionalismo en filosofía de la matemática, o al menos fluctuó con él, fue el matemático francés Henri Poincaré, del que hablamos algo al final del Módulo anterior (cf. p. 85), pero en el que no nos vamos a detener en presente Módulo.

§ 5.2. La aportación de Wittgenstein a la filosofía de la matemática. Adscribir a Wittgenstein una posición convencionalista puede resultar polémico, ya que han sido muchas las filosofías de la matemática que se han encontrado, o se han creído encontrar, en el conjunto de su obra, incluyendo el logicismo y el intuicionismo entre otras.

Además, los escritos de Wittgenstein sobre filosofía de la matemática han recibido duras críticas por parte muchos autores, incluyendo a algunos de los que más han valorado su contribución global a la disciplina, como Michael Dummett:

> "Muchos de los pensamientos [en las *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*] están expresados de una forma que el autor reconoce como imprecisa u obscura; algunos pasajes contradicen otros; algunos son demasiado vagos (...); y otros pasajes en fin, en particular aquellos que tratan sobre la consistencia y sobre el teorema de Gödel, son de pobre calidad o contienen claros errores."
> (Dummett, "Wittgenstein's Philosophy of Mathematics", en Shanker (ed.), *Ludwig Wittgenstein: Critical Assessments, vol. 3*, citado en Shanker, *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, p. vii).

Pero lo importante para nosotros no será establecer cuáles eran en definitiva las opiniones de este autor, o los posibles errores en los que haya podido incurrir en determinados lugares, sino tan sólo cómo contribuyó con al menos alguna parte de su obra, a profundizar en una determinada concepción acerca de la naturaleza de la matemática.

Las principales aportaciones de Wittgenstein a la filosofía de la matemática cabe encontrarlas en sus obras *Investigaciones filosóficas*, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, y *Gramática filosófica*. Se trata de obras póstumas, publicadas por sus editores a partir de manuscritos inéditos del autor, que falleció en el año 1951. Y están confeccionadas recopilando notas dispersas, agrupadas por fecha o proximidad temática, y redactadas con el peculiar estilo, vago y fragmentario, que caracteriza la escritura de Wittgenstein durante su segunda época.

De hecho, en vida produjo Wittgenstein únicamente tres publicaciones filosóficas: una breve reseña en 1913, un artículo en 1929, titulado "Algunas observaciones sobre la forma lógica", y su archiconocido *Tractatus Logico-Philosophicus*, publicado por primera vez como artículo en 1921, y después como libro (y disponible también en castellano, en varias traducciones distintas). El *Tractatus* pertenece a una primera etapa en la filosofía de este autor, muy cercana al logicismo de Frege y Russell, y muy distinta de la que después emprendió. (El artículo de 1929 supone ya una clara transición, aunque su interés específico para la filosofía de la matemática es más bien pequeño; puede consultarse, junto a la reseña de 1913 y otros escritos, en la recopilación titulada *Ocasiones filosóficas*).

Además, en el año 1982 el lógico y filósofo estadounidense Saul Kripke publicó un libro titulado *Wittgenstein: On Rules and Private Language* (*Wittgenstein: A propósito de reglas y lenguaje privado*, también traducido), en el cual presentaba de una forma enormemente original y novedosa muchas de las cuestiones tratadas por Wittgenstein acerca del seguimiento de reglas, y de las condiciones de posibilidad de las convenciones matemáticas y de cualquier forma de lenguaje en general.

El argumento de Kripke constituye una referencia inexcusable al tratar de la filosofía de la matemática de Wittgenstein, ya sea para aceptar o para rechazar las conclusiones que parecen derivarse de él. Y nosotros comenzaremos nuestra exposición, en efecto, precisamente con la explicación de ese argumento.

Entre las numerosas monografías sobre Wittgenstein, y en particular entre las dedicadas a su filosofía de la matemática, merece la pena consultar, en inglés, el excelente estudio de Stuart Shanker, *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics* ("Wittgenstein y el punto de inflexión en la filosofía de la matemática"), de 1986. Y en castellano, por una parte, el libro de Glenda Satne, *El argumento escéptico*; y por otra, de forma más condensada, el artículo del profesor Luis Valdés, "Una mala comprensión de Wittgenstein", en *Daimon: Revista de filosofía* 2, 1990, pp. 217–227.

§ 5.3. El argumento escéptico sobre el seguimiento de reglas. En el citado libro de 1982, Kripke presenta un argumento escéptico, que atribuye a Wittgenstein, y que constituye según sus propias palabras toda una novedad en la historia de la filosofía:

> "Wittgenstein ha inventado una forma nueva de escepticismo. Personalmente, me inclino a considerarla como el problema escéptico más radical y original que hasta la fecha ha visto la filosofía."
> (Kripke, *Wittgenstein: A propósito de reglas y lenguaje privado*, p. 73.)

El propio Kripke compara este argumento con otras formas de escepticismo filosófico clásico, tales como el escepticismo sobre la existencia del mundo exterior, por ejemplo (pp. 66–72). Pero la novedad radica, en este caso, en que la duda escéptica acaba por ser trasladada a la posibilidad misma de nuestro propio lenguaje, como vamos a ver enseguida. Algo que entronca muy bien con ese giro lingüístico inaugurado por Frege en 1884, y que ya comentamos en su momento (cf. pp. 36 y 38 del presente Manual).

Aunque Kripke concede a Wittgenstein el mérito de haber sido el primero en concebir o vislumbrar este argumento, también deja claro que no lo expone con una intención exegética de las opiniones de Wittgenstein (cf. pp. 11, 19), ni tampoco de las suyas propias:

> "Merece resaltarse que no pretendo en este escrito hablar por mí mismo ni tampoco decir nada, salvo en digresiones ocasionales y menores, acerca de mis propias ideas sobre las cuestiones sustantivas. El propósito primario de este trabajo es la presentación de un problema y un argumento, no su evaluación crítica. Primariamente, se me puede leer, salvo en muy pocas digresiones obvias, casi como a un abogado que presentara un argumento filosófico de primer orden según le impresionó a él. Si esta obra tiene una tesis principal propia, es la de que el problema y el argumento escépticos de Wittgenstein son importantes, merecedores de consideración seria."
> (Kripke, *Wittgenstein: A propósito de reglas y lenguaje privado*, p. 13.)

El hecho de que Kripke no se comprometa con este argumento, y siendo más que dudoso que Wittgenstein lo hubiera defendido en su momento, ha llevado a que sea identificado como *"argumento de Kripkenstein"*, autor ficticio resultante de combinar los nombres de esos dos autores.

El argumento en cuestión se puede presentar de muchas maneras. Una de ellas es la siguiente. Supongamos que tenemos un alumno, al cual estamos instruyendo en la aritmética elemental. Después de enseñarle la serie de los números naturales y las operaciones básicas entre ellos, siempre con números pequeños, le mostramos una secuencia particular, a ver si es capaz de continuarla:

$$2 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 8 \qquad 10 \qquad \ldots$$

Se trata, naturalmente, de la serie de los números pares.

Nuestro alumno hace un gesto de comprensión, y la continúa alegremente:

$$\ldots \qquad 12 \qquad 14 \qquad 16 \qquad 18 \qquad 20 \qquad 22 \qquad 24 \qquad \ldots$$

Supongamos ahora que, dotados de una extraordinaria paciencia, tanto él como nosotros, hacemos que el alumno continúe extendiendo la serie hasta pasado el número 1.000. Y que observamos que, al pasar ese número, el alumno prosigue la serie de una manera sorprendente:

$$\ldots \qquad 996 \qquad 998 \qquad 1.000 \qquad 1.004 \qquad 1.008 \qquad 1.012 \qquad 1.016 \qquad \ldots$$

Nosotros protestamos inmediatamente, como es natural, y tratamos de hacerle ver que se está equivocando, y que lo que tiene que hacer es proseguir la serie "del mismo modo" que la había desarrollado hasta ese momento. Sin embargo, para nuestro asombro, el alumno no parece admitir que se haya equivocado, e insiste en que está haciendo "lo mismo" que ha venido haciendo hasta entonces.

¿Qué podríamos decir para convencerle? Podríamos indicarle que lo que tiene que hacer para continuar la serie es sumar siempre 2 unidades al número anterior (lo que técnicamente se denomina *"sucesión aritmética de diferencia 2"*). Él ya sabe lo que es sumar, y ha efectuado ya numerosas sumas correctamente.

Sin embargo, para nuestra desgracia todas las sumas que el alumno ha efectuado antes eran con números muy inferiores a 1.000, y ahora resulta que nos dice que, tal y como él lo ha entendido, "al sumar 2 unidades al número 1.000 el resultado que se obtiene es 1.004" (!). Por lo tanto, según él, al continuar la serie de la manera que lo ha hecho ha continuado haciendo "lo mismo" que venía haciendo hasta ese momento.

Y es más: insiste en que toda la instrucción que ha recibido por nuestra parte, es perfectamente compatible con esa forma en que él ha captado esa regla. Lo cual es cierto, dado que como ya hemos dicho, esa instrucción se realizó siempre con números pequeños.

Después de seguir intentándolo durante un tiempo, llegamos a la conclusión de que no hay manera de convencer a nuestro alumno de que él debía saber ya, por la instrucción anteriormente recibida, que su continuación de la serie no era la correcta.

La posición de este alumno plantea una forma evidente de escepticismo, por cuanto no se puede saber, según él, cuál es la manera correcta de aplicar una regla matemática como "sumar 2" (o "continuar la serie iniciada"), a un caso en el que nunca se había aplicado antes.

§ 5.4. El escepticismo en primera persona. Esta forma de escepticismo se puede aplicar rápidamente a la primera persona, esto es, a mi propio caso. ¿Cómo sé yo mismo que realmente el resultado de sumar 2 al número 1.000, es el número 1.002, en lugar del número 1.004, si nunca antes he visto efectuada esa suma en ninguna parte? ¿Cuál es mi *justificación* para creer que ése es el resultado? ¿En qué *hechos* me baso?

Parece que la *regla de la suma* como convención matemática establecida, obliga a que el resultado de sumar 2 al número 1.000 sea uno determinado y no otro. Pero el hecho es que si la aplicación de esa convención a ese caso en particular no ha tenido lugar nunca, las aplicaciones anteriores resultarán siempre *compatibles* con cualquier forma de aplicación que se quiera proponer para ese caso.

Así, nuestro alumno podía haber captado la operación de sumar 2 de tal forma que a partir de 1.000 el resultado pase a ser 1.004, a partir de 2.000 el resultado pase a ser 2.006, y así sucesivamente. O también, de tal forma que a partir de 1.000 el resultado pase a ser 1.004, pero a partir de 2.000 vuelva a ser 2.002, 2.004, etc. O también, de tal forma que a partir de 1.000 el resultado pase a ser 1.004 durante 5 números más, y a continuación prosiga 1.024, 1.026, 1.028, 1.030, ...

En definitiva, parece haber infinitas maneras de proyectar la aplicación de una regla matemática sobre un caso, o un conjunto de casos, sobre los que nunca antes se había aplicado. Y todas ellas serán compatibles al menos en apariencia, con la aplicación anterior de la regla, dado que por definición se trata de casos con los que la regla no se había confrontado con anterioridad.

Claro que el número 1.000 puede resultar demasiado pequeño para estos propósitos, ya que con seguridad sí que hemos tenido experiencias anteriores en el manejo de cantidades mayores que 1.000. Pero esta cifra se pone simplemente como ejemplo: para hacer el ejemplo más realista bastaría con escoger cualquier número mayor que todos aquellos que hayamos tenido ocasión de manejar previamente en ocasiones concretas.

§ 5.5. El escepticismo lingüístico generalizado. Por si esto fuera poco, la forma de escepticismo que estamos describiendo permite una rápida generalización a todas las convenciones sociales, incluidas las lingüísticas, sembrando, al menos aparentemente, una duda sobre cualquier posibilidad de comunicación mediante el lenguaje.

Cualquier palabra, en efecto, podría según esto significar otras cosas muy distintas a las que yo me imagino, de tal forma que ese significado alternativo fuera perfectamente compatible con todo el uso anterior de la palabra por parte mía, o del que yo haya sido testigo.

La palabra "techo", por ejemplo, podría teóricamente empezar a significar *suelo* a partir del 1 de enero del año 2025, y ello sería compatible con cualquier utilización que se haya hecho de tal palabra antes de ese año.

Del mismo modo, cada mañana que me levanto, todas las palabras de mi lenguaje podrían, según este argumento, tener significados completamente distintos a los que yo creo que tienen. Y ello podría suceder de forma perfectamente compatible con mi uso anterior de las mismas, y con todo mi aprendizaje y mi experiencia pasada sobre su utilización.

Es más: no hay al parecer *hechos objetivos* que justifiquen mi creencia de que eso no ha sucedido, es decir, que la palabras de mi lenguaje siguen teniendo el significado que yo creo que tienen.

Éste es, en esencia, el argumento escéptico sobre el seguimiento de reglas planteado por Kripke, bajo inspiración en los textos de Wittgenstein.

El convencionalismo en filosofía de la matemática

§ 5.6. El método de análisis filosófico. El *método de análisis filosófico* que caracteriza la obra de Wittgenstein parte del convencimiento de que la mayor parte de los problemas filosóficos tienen su origen en el lenguaje, en el sentido de que son el resultado de usar determinadas palabras transgrediendo las reglas implícitas que gobiernan su uso habitual. La tarea del análisis filosófico, en consecuencia, consiste en identificar el tipo de transgresión que subyace a los distintos problemas planteados, mostrando de qué forma se intenta desviar a los conceptos involucrados de su funcionamiento natural (cf. por ejemplo *Tractatus*, proposición 4.112, p. 161 de la ed. castellana de Tecnos, e *Investigaciones filosóficas*, I/§§109–132, pp. 123–133 de la ed. castellana).

El objetivo de ese método es proporcionar una clarificación del problema, que *disuelva* la necesidad de seguir planteándoselo. Esto es: no se trata de buscar al problema una solución propiamente dicha, en un sentido o en otro, sino de hacer entender que todo el planteamiento del problema surge de un error de partida, y que lo correcto por consiguiente es desistir de continuar abordándolo.

Y este procedimiento, que supone en definitiva llevar el giro lingüístico a su expresión más extrema, es el que se conoce habitualmente como "disolución de los problemas filosóficos mediante el análisis lógico del lenguaje".

§ 5.7. La "disolución" de la pregunta por los fundamentos: la matemática como una práctica normativa. El resultado de aplicar el método de análisis filosófico a la matemática consiste en entender ésta como un entramado de convenciones sociales, o prácticas comunitarias dentro de una comunidad de usuarios, los matemáticos, y por extensión toda la comunidad lingüística que haya pasado por la instrucción primaria, donde obviamente habrá tenido que aprender algo de matemáticas.

Los enunciados matemáticos no son, por tanto, enunciados representativos, expresiones de proposiciones que puedan ser verdaderas o falsas. Son más bien producto de las reglas internas del lenguaje matemático, o dicho en terminología wittgensteiniana, de un *"juego de lenguaje"* especial, que es el matemático:

> "¿Pero qué querría decir *esto*: 'Incluso si todos los seres humanos creyeran que 2×2 es 5, no obstante sería 4'?—¿Cómo sería si todos los seres humanos creyeran esto?—Bueno, yo podría imaginarme que tuvieran otro cálculo o una técnica que nosotros no llamaríamos 'calcular'. ¿Pero sería esto *falso*? (¿Es *falsa* la coronación de un rey? A seres distintos de nosotros les podría parecer muy singular.)"
> (Wittgenstein, *Investigaciones filosóficas*, II, p. 517.)

La clave consiste por tanto, según esto, en aceptar que la matemática tiene un carácter esencialmente normativo, y no descriptivo.

Por su parte, la demostración de una proposición matemática tampoco ha de verse como un expediente separado de la proposición que demuestra, esto es, como si fuera un procedimiento para verificar algo externo, como cuando nos asomamos a la ventana para comprobar si llueve, por ejemplo. Muy al contrario, la demostración una vez efectuada pasa formar un todo con la proposición demostrada, y a enriquecer esa práctica normativa en cuyo contexto están integradas ambas:

> "Reparemos en que en la matemática son proposiciones *gramaticales* las que nos convencen; la expresión, el resultado, de ese convencimiento es, por tanto, que *aceptamos una regla*."
> (Wittgenstein, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, p. 133.)

> "Diríamos: la demostración cambia la gramática de nuestro lenguaje, cambia nuestros conceptos. Produce nuevas conexiones y crea el concepto de esas conexiones. (No establece que estén ahí, sino que no están ahí mientras ella no las produzca.)"
> (Wittgenstein, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, p. 136.)

¿Qué es por tanto una conjetura matemática, un problema matemático abierto? La conjetura viene a ser una laguna en nuestro sistema de reglas, algo que no queda decidido por ellas. Hay que considerar de manera completamente distinta, según esto, la situación que se produce cuando existe una conjetura abierta, y la que acaece cuando se consigue probar la proposición en cuestión, si es que eso llega a ocurrir.

Cuando encontramos la prueba, y deshacemos la conjetura, esa demostración aclara y fija de un modo nuevo todo el complejo de relaciones en el cual la proposición en cuestión estaba inmersa. No es una mera "confirmación" del contenido de la conjetura, sino que la propia demostración trae consigo nuevas conexiones, o reglas de uso, en relación a la proposición demostrada.

En otras palabras: la demostración proporciona un ingenio para completar la laguna existente en el sistema de reglas, fijando la regulación de las posibilidades relevantes de una forma coherente y continua con el resto del sistema. El mérito de la demostración, y la dificultad de encontrarla, proviene por tanto, según esto, de la dificultad de rellenar ese hueco en el sistema de reglas de una forma coherente.

Queda claro, por tanto, que esta filosofía de la matemática trata de "diluir" el problema de la fundamentación de la matemática. Es decir: trata de presentar esa cuestión como un falso problema:

> "¡¿Para qué necesita la matemática una fundamentación?!"
> (Wittgenstein, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, p. 319.)

La respuesta, según esta línea de pensamiento, a la crisis de fundamentos que hemos venido comentando desde el comienzo, es que se trató de una crisis cuanto menos innecesaria, por la sencilla razón de que no había nada que fundamentar.

§ 5.8. La respuesta del convencionalismo al argumento escéptico. Y ¿cuál sería, por tanto, siguiendo esta misma línea de pensamiento, la respuesta al argumento escéptico radical presentado por Kripke, y que veíamos al comienzo del Módulo? Pues consistiría en hacerle cambiar completamente la perspectiva con la que está enfocando el problema.

El seguimiento de reglas, para empezar, es una práctica comunitaria, o práctica social. No es algo, por lo tanto, sobre lo que quepa plantearse cuestiones de justificación, de "hechos que demuestren la corrección de mi uso", etc. Lo único que cabe hacer es utilizar esa práctica, y en caso de que surja una discordancia, tratar de resolverla de forma comunitaria con el resto de usuarios de la misma.

La perspectiva normativa y la perspectiva comunitaria van indisolublemente unidas. El seguimiento de reglas sólo tiene sentido allí donde haya una comunidad de usuarios, o seguidores de esas reglas. Y el criterio de corrección reside precisamente en la reacción de esa comunidad de usuarios.

Así, no es que coincidamos en los resultados de nuestras sumas porque todos tenemos asimilado un mismo concepto de la operación suma, sino que es la existencia de una uniformidad de resultados cuando calculamos, la razón misma de que estemos en condiciones de atribuirnos unos a otros la asimilación de ese concepto.

Lo característico de *seguir una regla* no es, según esto, el exhibir una conducta *regular*, esto es, una conducta que repita periódica o regularmente determinados patrones. Lo característico es algo muy distinto, a saber: la existencia de una comunidad de usuarios, que se reconocen mutuamente el uso de la regla, que se corrigen unos a otros cuando uno de ellos la infringe, que adiestran a nuevos usuarios en su utilización, y que globalmente resulta que *coincide* en sus criterios de aplicación, presenta respuestas similares cuando es sometida al mismo adiestramiento, etc.

Es precisamente en la existencia de esa comunidad, y en toda la gama de comportamientos sociales que rodean el uso de reglas, donde reside el quid de la existencia de las mismas. A su vez, el hecho de que esa comunidad coincida globalmente en su casuística de aplicación y responda de manera similar al adiestramiento, es lo que hace que sea propiamente una *comunidad*, en este caso una comunidad de usuarios, ya que lo que les une es precisamente que coinciden en una práctica *común* de determinados comportamientos ("la palabra "coincidencia" y la palabra "regla" están emparentadas, son primas hermanas", Wittgenstein, *Investigaciones filosóficas*, I/§224, p. 213).

El niño escéptico de Kripke, si lo hubiera, sería rápidamente singularizado dentro de esa comunidad de usuarios, en la medida en que su modo de reacción o de comportamiento lo encamina a un rol diferencial dentro de ella. Exactamente igual a como hacen actualmente los educadores en nuestras escuelas, al detectar deficiencias cognitivas importantes en el proceso de desarrollo de un niño.

De ahí la insistencia de Wittgenstein en la imposibilidad de un *lenguaje privado*, como un lenguaje al significado de cuyos términos sólo una persona pudiera acceder, porque esa persona carecería del necesario criterio de corrección que supone una comunidad de varios usuarios. Y del mismo modo, la imposibilidad de que sólo una vez en la historia de la humanidad se hubiera seguido una regla, porque eso excluye la práctica comunal y continuada que es consustancial a la naturaleza de ésta.

Esto no quiere decir, naturalmente, que un náufrago perdido en una isla desierta no pueda seguir reglas, de las que aprendió cuando vivía en sociedad, o incluso inventar otras nuevas, basándose en la experiencia de las que ya conoce. Pero este uso sería siempre deudor del uso comunitario natural donde él aprendió ese tipo de comportamiento normativo.

Y en última instancia, en definitiva, parece innegable que las razones por las cuales el lenguaje es posible, esto es, las razones por las cuales los humanos conseguimos comunicarnos o hacernos entender mediante los lenguajes que utilizamos (tanto el lenguaje natural como los lenguajes que usamos en matemáticas, o en otros contextos), no sólo tienen que ver con la estructura lógica y semántica de esos lenguajes, sino también con hechos muy generales acerca de la propia naturaleza humana. El tipo de hechos que hacen que los seres humanos, siempre que seamos mentalmente suficientes y sanos, y hayamos estado sometidos desde el nacimiento a los pertinentes estímulos e instrucción, acabemos respondiendo ante los inputs lingüísticos de una forma similar en términos generales.

Las condiciones de posibilidad del lenguaje humano, por consiguiente, no sólo residen en cuestiones de tipo lógico, sino también y muy esencialmente en cuestiones *naturalistas*, o antropológicas: cuestiones que tienen que ver con nuestra constitución natural, biológica y evolutiva, y que a su vez, potenciada al máximo a través de la propia socialización, posibilitan la existencia de nuestra cultura.

§ 5.9. Lectura de Wittgenstein (Observaciones sobre los fundamentos de la matemática). En 1956 apareció una selección de textos inéditos de Wittgenstein, bajo el título *Remarks on the Foundations of Mathematics* (*Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*), en una edición bilingüe, con el texto original alemán junto a su traducción al inglés. En 1978 se publicó una edición revisada y ampliada, que es en la que está basada la traducción española.

Entre los nuevos textos que se incluyeron en la edición de 1978 está la que aparece denominada como "Parte VI", correspondiente a un manuscrito terminado en 1944, y que es a la que pertenece el fragmento que vamos a reproducir a continuación.

La división del texto en partes y secciones numeradas es debida a los editores de la obra. La separación entre distintas "Observaciones", sin embargo, está tomada de los manuscritos de Wittgenstein, donde aparece representada dejando grandes espacios entre los párrafos. Así aparece también en las ediciones inglesa y española, aunque nosotros hemos preferido rellenar aquí esa separación mediante asteriscos.

Las *definiciones ostensivas*, a las que se refiere Wittgenstein en un momento determinado, son aquellas en las que se da el significado de un término señalando al objeto denotado, o a un objeto que ejemplifique lo denotado. Por ejemplo, un profesor de inglés, que señala visiblemente hacia una silla, y luego la levanta entre sus manos mientras dice: *"chair"*.

> "§ 39. Es verdad que *todo* se puede justificar de algún modo. Pero el fenómeno del lenguaje se funda en la regularidad, en la coincidencia en el obrar.
>
> * * * * *
>
> "Es aquí de la mayor importancia que todos o la inmensa mayoría de nosotros coincidamos en ciertas cosas. Puedo estar completamente seguro, por ejemplo, de que la mayoría de los seres humanos que vean este objeto llamarán "verde" su color.
>
> * * * * *

"Sería imaginable que seres humanos de tribus diferentes poseyeran lenguajes con el mismo vocabulario, pero diferentes significados de las palabras. La palabra que en una tribu significara verde, significaría lo mismo en el lenguaje de otra, mesa en el de una tercera, etc. Podríamos, incluso, imaginar que las tribus usaran las mismas oraciones, sólo que con un sentido totalmente diferente.

"Bueno, en ese caso no diría que hablaran el mismo lenguaje.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗

"Decimos que, para comunicarse, los seres humanos deben coincidir unos con otros en los significados de las palabras. Pero el criterio para esa coincidencia no es sólo una coincidencia respecto a las definiciones, por ejemplo, respecto a las definiciones ostensivas, sino *también* una coincidencia en los juicios. Es esencial para que haya comunicación que coincidamos en un gran número de juicios.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗

(. . .)

" § 41. La palabra "coincidencia" y la palabra "regla" están *emparentadas*, son primas hermanas. El fenómeno del coincidir y el del actuar de acuerdo a una regla tienen que ver uno con otro.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗

"Podría existir un cavernícola que produjera para sí mismo secuencias *regulares* de marcas. Podría entretenerse, por ejemplo, en dibujar en la pared de la cueva

— . — — . — — . — — .

o

— . — . . — . . . — . . . . —

Pero no está siguiendo la expresión general de una regla. Y cuando decimos que actúa de una manera regular no es porque podamos formar tal expresión.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗

(. . .)

"Sólo en la práctica de un lenguaje puede una palabra tener significado.

∗ ∗ ∗ ∗ ∗

"Ciertamente, puedo darme a mí mismo una regla y seguirla después. Pero ¿no se trata de una regla sólo porque es análoga a lo que en el trato humano significa "regla"?

∗ ∗ ∗ ∗ ∗

"Cuando un tordo siempre repite en su canto la misma frase varias veces, ¿decimos que posiblemente se da a sí mismo cada vez una regla, y después la sigue?

∗ ∗ ∗ ∗ ∗

" § 42. Consideremos reglas muy simples. Sea la expresión de la regla una figura como ésta:

| — — |

y que uno sigue la regla dibujando una fila recta de figuras similares (quizá como ornamento):

| — — | | — — | | — — | | — — | | — — |

¿Bajo qué circunstancias deberíamos decir: alguien está siguiendo esta regla al dibujar tal secuencia? Es difícil describirlo.

* * * * *

"Si, de una pareja de chimpancés, uno trazara la figura | — — | mediante arañazos en el suelo, y el otro inmediatamente la serie

| — — | | — — | etc.

no por ello el primero habría establecido una regla, ni el otro la estaría siguiendo, sea lo que fuere lo que ocurriera en ese momento en la mente de ambos.

"Pero si se observara, por ejemplo, el fenómeno de un tipo de instrucción, en la que se muestra cómo hacerlo y después es imitado, en la que hay intentos erróneos e intentos exitosos, con recompensas y castigos, y cosas semejantes; si al final el sujeto de ese adiestramiento colocara figuras que no había visto nunca antes, como las del primer ejemplo, entonces probablemente diríamos que el primer chimpancé estaba escribiendo reglas, y el otro las estaba siguiendo.

* * * * *

" § 43. Pero ¿y si ya la primera vez uno de los chimpancés se hubiera *propuesto* repetir ese proceso? Sólo en una determinada técnica del obrar, hablar, pensar, puede alguien proponerse algo. (Este 'puede' es el gramatical.)

Es posible inventar hoy un juego de cartas al que nunca se juegue. Pero ello no quiere decir: en la historia de la humanidad sólo una vez se inventó un juego y nadie lo ha jugado. Esto no significa nada. No porque contradiga leyes psicológicas. Las expresiones 'inventar un juego', 'jugar un juego' sólo tienen sentido en un contexto completamente determinado.

Así, tampoco puede decirse que sólo una vez en la historia de la humanidad se ha seguido una señal de carreteras. Pero sí: una única vez en la historia de la humanidad alguien ha caminado paralelo a un tablón. Y aquella primera imposibilidad no es, de nuevo, una imposibilidad psicológica.

Las expresiones 'lenguaje', 'proposición', 'orden', 'regla', 'operación de cálculo', 'experimento', 'seguir una regla' remiten a una técnica, a una costumbre."

(Wittgenstein, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, Parte VI, pp. 288–295, con traducción en parte distinta a la aquí ofrecida.)

§ 5.10. Lectura de Wittgenstein (Investigaciones filosóficas). Las *Investigaciones filosóficas* de Wittgenstein aparecieron publicadas por primera vez en 1953, en una edición bilingüe, con el texto original alemán junto a su traducción al inglés. Wittgenstein había muerto dos años antes.

Los fragmentos que vamos a reproducir a continuación pertenecen a la primera parte del libro, preparada para su publicación por el propio Wittgenstein, que llegó a escribir para la misma un Prólogo, conservado en la edición española. Sin embargo, en el año 1946, poco antes de aparecer impresa, el propio Wittgenstein la retiró. En la publicación póstuma los editores añadieron después una segunda parte, reuniendo algunos manuscritos de Wittgenstein sobre la misma temática, escritos con posterioridad.

> "§ 143. Examinemos ahora este tipo de juego de lenguaje: B debe poner por escrito, siguiendo la orden de A, series de signos de acuerdo con una determinada ley de formación.
>
> "La primera de estas series debe ser la de los números naturales en el sistema decimal.—¿Cómo se aprende a entender este sistema?—En primer lugar se le escriben series de números a modo de muestra y se le exhorta a copiarlas. (No te choque la expresión 'series de números'; ¡no se la emplea aquí incorrectamente!) Y ya hay aquí una reacción normal y una anormal por parte del aprendiz.—Tal vez guiemos su mano primero al copiar la serie del 0 al 9; pero luego la *posibilidad de comprensión* dependerá de que continúe escribiendo independientemente.—Y aquí podemos imaginarnos, por ejemplo, que copia ciertamente las cifras de modo independiente, pero no la serie, sino unas veces una y otras veces otra sin regla alguna. Y entonces *ahí* acaba la comprensión.—O también que él haga *'faltas'* en el orden de la serie. La diferencia entre éste y el primer caso es naturalmente de frecuencia.—O: él hace una falta *sistemática*, copia siempre, por ejemplo, sólo un número de cada dos; o copia la serie 0, 2, 3, 4, 5, ... así: 1, 0, 3, 2, 5, 4, ... Aquí casi estaremos tentados a decir que nos ha entendido *incorrectamente*.
>
> "Pero obsérvese: no hay límite nítido entre una falta carente de regla y una sistemática. Es decir: entre lo que estás inclinado a llamar una 'falta carente de regla' y una 'sistemática'."
>
> (Wittgenstein, *Investigaciones filosóficas*, Parte I, p. 145.)

> "§ 185. Volvamos ahora a nuestro ejemplo (§ 143). El alumno domina ahora —juzgado por los criterios ordinarios— la serie de los números naturales. (...)—Supongamos que hemos hecho nuestros ejercicios y pruebas al azar de su comprensión en el terreno numérico hasta 1.000.
>
> "Hacemos ahora que el alumno continúe una serie (pongamos "+2") por encima de 1.000 —y él escribe: 1.000, 1.004, 1.008, 1.012.
>
> "Le decimos: "¡Mira lo que has hecho!"—Él no nos entiende. Decimos: "Debías sumar *dos*; ¡mira cómo has empezado la serie!".—El responde: "¡Sí! ¿No es correcta? Pensé que *debía* hacerlo así."—O supón que dijese, señalando la serie: "¡Pero si he proseguido del mismo modo!"—De nada nos serviría decir "¿pero es que no ves ...?"—y repetirle las viejas explicaciones y ejemplos.— Pudiéramos decir quizá en tal caso: esta persona entiende por naturaleza esa

orden, con nuestras explicaciones, como *nosotros* entenderíamos la orden: "Suma siempre 2 hasta 1.000, 4 hasta 2.000, 6 hasta 3.000, etc.".

"Este caso sería semejante al de una persona que por naturaleza reaccionase a un gesto demostrativo de la mano mirando en la dirección que va de la punta del dedo a la muñeca en vez de en dirección a la punta del dedo.

(...)

" § 195. 'Pero no quiero decir que lo que hago ahora (al captar un sentido) determine *causal* y empíricamente el empleo futuro, sino que, de una *extraña* manera, este mismo empleo está, en algún sentido, presente.'—¡Pero lo está 'en algún sentido'! (...)

" § 198. '¿Pero cómo puede una regla enseñarme lo que tengo que hacer en *este* lugar? Cualquier cosa que haga es, según alguna interpretación, compatible con la regla.'—No, no es eso lo que debe decirse. Sino esto: toda interpretación pende, juntamente con lo interpretado, en el aire; no puede servirle de apoyo. Las interpretaciones solas no determinan el significado.

(...)

" § 199. ¿Es lo que llamamos 'seguir una regla' algo que pudiera hacer sólo *un* hombre sólo *una vez* en la vida?—Y ésta es naturalmente una anotación sobre la *gramática* de la expresión 'seguir una regla'.

"No puede haber sólo una única vez en que un hombre siga una regla. No puede haber sólo una única vez en que se haga un informe, se dé una orden, o se la entienda, etc.—Seguir una regla, hacer un informe, dar una orden, jugar una partida de ajedrez son *costumbres* (usos, instituciones).

"Entender una oración significa entender un lenguaje. Entender un lenguaje significa dominar una técnica.

(...)

" § 201. Nuestra paradoja era ésta: una regla no podía determinar ningún curso de acción porque todo curso de acción puede hacerse concordar con la regla. La respuesta era: si todo puede hacerse concordar con la regla, entonces también puede hacerse discordar. De donde no habría ni concordancia ni desacuerdo.

"Que ahí hay un malentendido se muestra ya en que en este curso de pensamientos damos interpretación tras interpretación; como si cada una nos contentase al menos por un momento, hasta que pensamos en una interpretación que está aún detrás de ella. Con ello mostramos que hay una captación de una regla que *no* es una *interpretación*, sino que se manifiesta, de caso en caso de aplicación, en lo que llamamos 'seguir la regla' y en lo que llamamos 'contravenirla'.

"De ahí que exista una inclinación a decir: toda acción de acuerdo con la regla es una interpretación. Pero solamente debe llamarse 'interpretación' a esto: sustituir una expresión de la regla por otra.

" § 202. Por tanto 'seguir la regla' es una práctica. Y *creer* seguir la regla no es seguir la regla. Y por tanto no se puede seguir 'privadamente' la regla, porque de lo contrario creer seguir la regla sería lo mismo que seguir la regla." (Wittgenstein, *Investigaciones filosóficas*, Parte I, pp. 187–203.)

MÓDULO 6

El empirismo y otras corrientes actuales en filosofía de la matemática

La tesis de indispensabilidad

§ 6.1. Presentación del empirismo en filosofía de la matemática. Un punto de vista empirista con respecto a una teoría matemática es aquel que considera que esa teoría es una teoría empírica más, a la par que el resto de teorías de las ciencias naturales y sociales, y que su validez, su corrección, su acierto o desacierto, dependerá en última instancia de cómo sea la realidad que nos rodea. Esta forma de concebir las matemáticas entronca claramente con la filosofía del *empirismo* en sentido genérico, según la cual la fuente primordial de nuestros conceptos y de todo nuestro conocimiento radica en nuestra experiencia sensible.

El punto de vista empirista en filosofía de la matemática no coincide, desde luego, con la imagen que las matemáticas dan prima facie, esto es, a primera vista. La mayor parte de las teorías matemáticas parecen referirse exclusivamente a entidades abstractas, desligadas de la realidad física, y que nada tienen que ver con el universo real en el que vivimos.

Asimismo, el proceder habitual del matemático es establecer sus resultados (teoremas) mediante "demostraciones", que parecen inamovibles por su propia naturaleza. Cuando uno asiste a una lección de matemáticas bien estructurada, sobre cualquier parcela suficientemente asentada y conocida, se suele sacar la impresión de que se trata de conocimientos absolutamente perfectos, que se poseen desde siempre y que seguirán ahí eternamente, sin que se les pueda añadir ni quitar una coma.

El principal objetivo de la filosofía empirista de la matemática, por consiguiente, es mostrar en qué radica el error de esa concepción inicial, que casi todos nos hacemos en un primer momento. Para ello hace falta una teoría filosófica que explique exactamente de qué modo se encuentra relacionada la matemática con el mundo que nos rodea, y a qué se debe que produzca esa impresión inicial de abstracción e infalibilidad, que el resto de las ciencias no poseen.

Dependiendo de cómo se articule la defensa del carácter empírico de la matemática, esta filosofía de la matemática puede tomar un cariz u otro. De hecho, se trata de una concepción filosófica que ha sido defendida desde puntos de vista muy distintos, dando lugar, estrictamente hablando, a filosofías de la matemática distintas.

El descubrimiento de la geometría no euclídea, del que hablamos en el Módulo 3, supuso sin duda un impulso y un precedente fundamental para este tipo de filosofía, al menos por lo que se refiere al estatuto de la geometría.

Sin embargo, la filosofía empirista de la matemática tuvo ya defensores antes de que se produjera ese descubrimiento y los ha tenido por supuesto después, y en su mayor parte predican la concepción empirista no sólo de la geometría propiamente dicha, sino de toda la ciencia matemática en su conjunto. Un precedente notable del empirismo en filosofía de la matemática es el contenido en el *Sistema de lógica* de John Stuart Mill (*A System of Logic*, 1843, cf. por ejemplo Libro 2º, Cap. 6º, y Libro 3º, Cap. 24º, pp. 164ss. y 399ss., respectivamente), un libro escrito poco después del descubrimiento de la geometría hiperbólica, pero sin que el autor la tenga en cuenta, ni por entonces la conociera.

§ 6.2. La Tesis de Indispensabilidad o Tesis de Quine-Putnam. En tiempos recientes, el principal argumento en favor de la filosofía empirista de la matemática ha sido sin lugar a dudas la llamada *"Tesis de Indispensabilidad"* o *"Tesis (o "argumento") de Quine-Putnam"*, así conocido por encontrarse sus mejores y más conocidas formulaciones entre las contribuciones de Willard van Orman Quine y Hilary Putman, dos de los más importantes lógicos y filósofos estadounidenses del siglo XX.

La Tesis de Indispensabilidad afirma sencillamente que todo aquel conocimiento matemático que resulta indispensable para las distintas ciencias debe verse como integrado en ellas formando una unidad, de tal manera que nuestra creencia en la verdad de esas ciencias implica también necesariamente nuestra creencia en la verdad de las matemáticas que incorporan. Si, utilizando la frase de Galileo, de 1623, "la naturaleza está escrita en lenguaje matemático" (*El Ensayador*, secc. 6ª, p. 63 de la ed. española), entonces el conocimiento matemático debería verse como una parte indisoluble de nuestro conocimiento del mundo natural.

Ello afecta, en particular a la existencia de los objetos abstractos postulados por las distintas teorías matemáticas, como números, funciones, conjuntos, puntos, rectas y demás. Según esto, todos ellos estarían presentes de alguna manera en la realidad que nos rodea, en cuanto que nosotros describimos esa realidad mediante un conjunto de ciencias, y esos objetos forman parte de hecho de nuestra ontología científica global.

En otras palabras: que al igual que para describir los bosques acuñamos el concepto de *árbol*, y admitimos la existencia separada de los árboles, con sus troncos, raíces y hojas, como entidades distintas del terreno en el que están enclavados, debemos considerarnos también obligados a admitir la existencia de aquellos números, conjuntos, y funciones matemáticas, que utilizamos para describir las propiedades de esos mismos árboles, de acuerdo con nuestro aparato científico actual.

Claro está que la existencia que se debe atribuir a esos objetos abstractos, como los números y las funciones, no es del tipo espacio-temporal que tienen los objetos físicos, como los propios árboles, por ejemplo. Pero en eso, las entidades matemáticas no difieren de tantas otras entidades teóricas, o abstractas, postuladas por las distintas ciencias, como por ejemplo puedan ser las *fuerzas* de la física, los *síndromes* en medicina, o la *inflación* de la que hablan continuamente los economistas:

> "El discurso científico en su interpretación habitual está tan irremediablemente comprometido con objetos abstractos —con naciones, especies, números, funciones, conjuntos— como lo está con manzanas y otros cuerpos. Todas estas cosas figuran como valores de las variables en nuestro sistema global del mundo. Los números y las funciones contribuyen a la teoría física tan genuinamente como lo hacen las partículas hipotéticas."
> (Quine, "Aciertos y límites de la matematización", *Teorías y cosas*, pp. 182–183, con traducción distinta a la aquí ofrecida.)

§ 6.3. La tesis de Quine-Putnam y la tesis de Duhem-Quine. El argumento de Quine-Putnam tiene a la base una visión marcadamente unitaria de la ciencia en su conjunto. En otras palabras: parte de la consideración del conjunto del conocimiento humano como un todo indisoluble, en el que se incluyen las matemáticas y la propia lógica también. Es por tanto una imagen *holística* del conjunto de nuestro conocimiento.

Este conocimiento tiene como misión dar cuenta de nuestras experiencias, esto es, explicar nuestras experiencias pasadas y predecir las futuras. En el cumplimiento de esa misión se elaboran todas nuestras teorías científicas, y las sorpresas que nos va deparando la experiencia nos obligan constantemente a ampliar, renovar y modificar el conjunto de teorías científicas que poseemos en un momento dado.

Todas las teorías científicas están, según esto, validadas en última instancia por nuestra experiencia, y son susceptibles de corrección y rectificación, incluyendo a las propias matemáticas. Sin embargo, al poseer éstas un grado máximo de abstracción o generalidad, su revisión entraña cambios mucho más profundos y costosos, y por eso es tan raro y excepcional que alguna de ellas caiga.

Este todo global que representa el conjunto de nuestro conocimiento no debe verse, según esto, como un plano, en el que todas nuestras teorías y nuestras creencias se enfrenten a la experiencia por igual, sino más bien como una esfera, en la cual las teorías más internas son las más generales, esto es, las que tienen a su vez consecuencias sobre muchas otras teorías.

Si una experiencia adversa o inesperada nos obliga a cambiar nuestro conjunto de creencias, para acomodarla o explicarla, lo haremos siempre preferentemente substituyendo si es posible creencias de las más periféricas o superficiales, por la sencilla razón de que ello conllevará un menor coste en cuanto a la revisión que resulta necesario acometer.

Sólo en casos muy excepcionales nos decidiremos a cambiar una de las teorías matrices del interior, como una gran teoría física por ejemplo, con leyes muy generales, o como una teoría matemática, o como podría ser incluso, llegado el caso, nuestras propias leyes lógicas, que establecen las relaciones de consecuencia entre los distintos enunciados del conjunto. Las creencias que están más hacia el centro del sistema representan un mayor grado de generalidad, y un mayor grado de abstracción, y por ello mismo su reemplazo se reserva para aquellas ocasiones en que es absolutamente necesario.

Ni qué decir tiene, naturalmente, que desde esta perspectiva la distinción tradicional entre *"matemática pura"* y *"matemática aplicada"* es rechazada de plano (cf. Quine, *Teorías y cosas*, pp. 181–182).

Todo esto tiene también como consecuencia, naturalmente, que no hay "experimentos cruciales", es decir, que ante cualquier resultado adverso que nos proporcione la experiencia siempre tenemos distintas opciones a nuestro alcance, para modificar nuestro sistema de creencias de tal manera que se dé explicación, o acomodo, siquiera provisional, a ese nuevo resultado.

Esto último es algo que ya expuso en 1906 el gran físico y filósofo francés Pierre Duhem, aplicado específicamente al ámbito de la física (cf. *La teoría física: su objeto y su estructura*, por ejemplo pp. 247–250 o 285–288). Después, una versión modificada de ese argumento fue popularizada por Quine a través de su artículo clásico de 1951 "Dos dogmas del empirismo", en el cual ampliaba el posible efecto de esa revisión, para incluir también a las matemáticas y a la lógica en el saco de las teorías revisables. Es lo que se ha venido llamando desde entonces la *"tesis de Duhem-Quine"*.

También relativa a esta última tesis es la noción quineana de *subdeterminación* (o *infradeterminación*) de las teorías científicas por la experiencia: nuestra experiencia determina en parte las teorías científicas que manejamos, o dicho más exactamente nuestro sistema global de creencias, porque nos obliga a cambiar algo en ese sistema cuando el sistema resulta incompatible con nuestras experiencias. Sin embargo, se trata sólo de una determinación parcial, según dicha tesis, porque siempre hay varias formas distintas de construir un sistema de creencias que se acomode a un cuerpo de experiencia dado, y somos nosotros los que tenemos que elegir cual es el más adecuado, atendiendo a criterios de economía, simplicidad, plausibilidad, etc.

§ 6.4. Defensa y crítica de la tesis de indispensabilidad. Además del artículo de Quine "Dos dogmas del empirismo", incluido en su libro *Desde un punto de vista lógico* (pp. 49–81), otras contribuciones señaladas en las que este autor expone una filosofía empirista de la matemática son el Capítulo 7 de su libro de 1970 *Filosofía de la lógica* (pp. 163–173) y el Capítulo 18 de su libro de 1981 *Teorías y cosas* (pp. 181–188), todos ellos traducidos al castellano.

De Putnam recomendaremos su librito de 1971, *Philosophy of logic*, íntegramente incluido en la 2ª ed. del vol. 1 de sus *Philosophical Papers* (Mathematics, Matter and Method, pp. 323–357), pero no traducido a nuestra lengua, por desgracia.

Por otra parte, como era de esperar, la filosofía de la matemática que subyace a la tesis de indispensabilidad, ha tenido, y tiene, sus detractores. Para empezar, se trata de una tesis que choca claramente con la consideración más natural, y más habitual, de los enunciados matemáticos.

Así, una verdad matemática como la propiedad conmutativa de la multiplicación ("el orden de los factores no altera el producto"), se percibe generalmente como una verdad universal y obvia. No parece en absoluto una *hipótesis* que haya que contrastar experimentalmente en la Naturaleza, para comprobar si es verdadera o falsa. No se parece en nada, en este sentido, a la ley de la gravitación universal, por ejemplo.

Siguiendo esta línea de argumentación, Charles Parsons ha criticado que el empirismo de Quine deja sin explicar, precisamente, por qué la matemática elemental nos parece *obvia* (en su artículo de 1980 "Mathematical Intuition", p. 101 de su reimpresión en la compilación de Hart, *Philosophy of Mathematics*).

En términos similares se ha expresado también Philip Kitcher: "Quine insiste en que los enunciados matemáticos (...) son vulnerables a la falsación empírica, pero no nos explica cómo hemos llegado a conocer las partes de la matemática que de hecho conocemos" (*The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 4).

Y en otra línea argumental, algo distinta, pero complementaria a las anteriores, Penelope Maddy ha señalado también que "las vicisitudes de la matemática aplicada no parecen afectar la metodología de la matemática del modo como lo harían si las aplicaciones fueran realmente los árbitros de la ontología matemática" (*Naturalism in Mathematics*, p. 159, traducción tomada del fragmento citado en Caba, "Algunas consideraciones sobre el argumento de indispensabilidad", *Revista de filosofía* 27(1), 2002, p. 116).

Un estudio, en fin, dedicado por extenso a la tesis de indispensabilidad y a sus oponentes, es el publicado por Mark Colyvan, bajo el título *"The indispensability of mathematics"*. Y en español cabe destacar el artículo del profesor Antonio Caba, que acabamos de mencionar.

§ 6.5. Lectura de Quine ("Dos dogmas del empirismo"). Reproducimos a continuación unos extractos del final del artículo de Quine "Dos dogmas del empirismo", todo un clásico de la filosofía del siglo XX, conocido por su incisivo rechazo a la distinción entre enunciados analíticos y enunciados sintéticos, así como por la formulación de la tesis de Duhem-Quine a la que nos acabamos de referir, entre otras cosas.

Las "clases" a las que aquí se refiere Quine, son esencialmente los *conjuntos* de los que nosotros hemos venido hablando. Cuando dice que el álgebra de los números racionales e irracionales está subdeterminada por la de los racionales, es obviamente porque constituye una extensión suya, y como tal extensión podría, en principio, ser formulada de diferentes maneras.

> "La totalidad de lo que llamamos nuestro conocimiento, o creencias, desde las más casuales cuestiones de la geografía y la historia hasta las más profundas leyes de la física atómica o incluso de la matemática o de la lógica puras, es una trama tejida por el hombre y que no está en contacto con la experiencia más que a lo largo de sus lados. O, con otro símil, el todo de la ciencia es como un campo de fuerza cuyas condiciones-límite da la experiencia. Un conflicto con la experiencia en la periferia da lugar a reajustes en el interior del campo: hay que redistribuir los valores veritativos entre algunos de nuestros enunciados. La nueva atribución de valores a algunos enunciados implica la re-valorización de otros en razón de sus interconexiones lógicas —y las leyes lógicas son simplemente unos determinados enunciados del sistema, determinados elementos del campo. Una vez redistribuidos valores entre algunos enunciados, hay que redistribuir también los de otros que pueden ser enunciados lógicamente conectados con los primeros o incluso enunciados de conexiones lógicas. Pues el campo total está tan escasamente determinado por sus condiciones-límite —por la experiencia— que hay mucho margen de elección en cuanto a los enunciados que deben recibir valores nuevos a la luz de cada experiencia contraria al anterior estado del sistema. Ninguna experiencia concreta y particular está ligada directamente con un enunciado concreto y particular en el interior del campo, sino que esos ligámenes son indirectos, se establecen a través de consideraciones de equilibrio que afectan al campo como un todo.

(. . .)

"En nuestra metáfora, los enunciados que son especialmente relevantes para experiencias determinadas se describen como próximos a la periferia. Pero en esa relación de 'relevancia' no veo más que una laxa asociación que refleja la relativa probabilidad de que en la práctica escojamos un enunciado en vez de otro para someterlo a revisión caso de presentarse una experiencia negativa. Podemos, por ejemplo, imaginar experiencias negativas para acomodar a las cuales nuestro sistema nos inclinaríamos sin duda a cambiar los valores anteriormente atribuidos a un enunciado como el de que hay casas de adobe en el Paseo de Gracia, junto con otros asociados y relativos a ese mismo tema. Podemos imaginar otras experiencias críticas para acomodar a las cuales nuestro sistema nos inclinaríamos a dar un nuevo valor al enunciado de que no hay centauros y a otros emparentados con él. Según he dicho, una experiencia imprevista puede acomodarse en el sistema mediante una de varias nuevas valoraciones posibles en otros tantos sectores del sistema; pero en los casos que hemos imaginado, nuestra natural tendencia a perturbar lo menos posible el sistema en su conjunto nos lleva a centrar la revisión en esos específicos enunciados relativos a casas de adobe o a centauros. Por eso se tiene la sensación de que esos enunciados tienen una referencia empírica más precisa que los muy teoréticos enunciados de la física, de la lógica o de la ontología. Puede considerarse que éstos están situados en una zona relativamente central de la red, lo que significa meramente que presentan poca conexión preferencial con algún dato sensible o determinado.

"Como empirista, sigo concibiendo el esquema conceptual de la ciencia como un instrumento destinado en última instancia a predecir experiencia futura a la luz de la experiencia pasada. Introducimos con razón conceptualmente los objetos físicos en esta situación porque son intermediarios convenientes, no por definición en términos de experiencia, sino irreductiblemente puestos con un estatuto epistemológico comparable al de los dioses de Homero. Yo, por mi parte, como físico lego que soy, creo en los objetos físicos y no creo en los dioses de Homero, y considero un error científico orientar su creencia de otro modo. Pero en cuanto a fundamento epistemológico, los objetos físicos y los dioses difieren sólo en grado, no en esencia. Ambas suertes de entidades integran nuestras concepciones sólo como elementos de cultura. El mito de los objetos físicos es epistemológicamente superior a muchos otros mitos porque ha probado ser más eficaz que ellos como procedimiento para elaborar una estructura manejable en el flujo de la experiencia.

"Esa actitud que pone objetos físicos no se reduce al nivel macroscópico. También al nivel atómico se pone objetos para que las leyes de los objetos macroscópicos —y, en última instancia, las leyes de la experiencia— sean más simples y manejables; y no debemos esperar ni pedir una plena definición de las entidades atómicas y subatómicas en términos de entidades macroscópicas, ni tampoco una definición de las cosas macroscópicas en términos de datos sensibles. La ciencia es una prolongación del sentido común, y prolonga el recurso del sentido común que consiste en hinchar la ontología para simplificar la teoría.

"Los objetos físicos, los grandes y los pequeños, no son las únicas entidades puestas. Otro ejemplo son las fuerzas; y efectivamente hoy nos dicen que la separación entre materia y energía está anticuada. Las abstractas entidades que son la sustancia de las matemáticas —en última instancia, clases y clases de clases y así sucesivamente— son también entidades puestas en el mismo sentido. Epistemológicamente, todos esos son mitos con la misma base que los objetos físicos y los dioses, y por lo único que unos son mejores que otros es por el grado en que favorecen nuestro manejo de la experiencia sensible.

"La extensa álgebra de los números racionales e irracionales está subdeterminada por el álgebra de los números racionales, pero es más cómoda y conveniente que ella, y la incluye como parte coja o manca. La ciencia total —matemática, natural y humana— está análogamente subdeterminada por la experiencia, de un modo aún más extremado. El contorno del sistema tiene que cuadrar con la experiencia; el resto, con todos sus elaborados mitos y sus ficciones, tiene como objetivo la simplicidad de las leyes."
(Quine, "Dos dogmas del empirismo", en su libro *Desde un punto de vista lógico*, pp. 76–80, con traducción en parte distinta a la aquí ofrecida.)

El cuasi-empirismo metodológico

§ 6.6. El cuasi-empirismo metodológico en matemáticas. La filosofía de la matemática maneja con frecuencia una imagen excesivamente idealizada de las teorías matemáticas, como productos acabados y perfectamente delimitados, en cuyo seno la investigación matemática consiste en la mera tarea de ir demostrando teoremas, uno tras otro. El *"cuasi-empirismo metodológico"* es una línea de investigación relativamente reciente en filosofía de la matemática, que surge como una reacción a esa imagen idealizada o distorsionada.

El cuasi-empirismo metodológico resalta todos aquellos aspectos de la praxis cotidiana de la investigación matemática, que muestran lo cercana que está en realidad a la del resto de ciencias naturales y sociales, esto es, al resto de ciencias conocidas habitualmente como "empíricas", que es de donde le viene a esta corriente su denominación.

Aunque es un argumento que puede verse como complementario a la tesis de indispensabilidad, éste es un argumento eminentemente metodológico, mientras que aquélla era una cuestión de principios, con lo cual estrictamente hablando se trata de argumentos filosóficos distintos.

En 1985 se publicó una importante colección de ensayos, *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, dedicada íntegramente a promover esta nueva línea de investigación en filosofía de la matemática, y a combatir el tipo de enfoque "fundacionalista" que había venido siendo predominante hasta entonces. Como dice en la Introducción a esta obra su compilador, el profesor Thomas Tymoczko:

> "(...) la filosofía de la matemática puede empezar de nuevo, volviendo a examinar las prácticas reales de los matemáticos y de los usuarios de las matemáticas. Si contemplamos las matemáticas sin prejuicios, encontraremos relevantes muchos aspectos que fueron ignorados por los fundacionalistas: demostraciones informales, desarrollos históricos, la posibilidad del error matemático, las explicaciones matemáticas (por oposición a las demostraciones), la comunicación entre matemáticos, el uso de ordenadores en la matemática moderna, y mucho más.
>
> (...) Es útil disponer de una etiqueta para esta aproximación a la filosofía de la matemática. Siguiendo a Lakatos y a Putnam, yo la llamo 'cuasi-empirismo'."
>
> (Tymoczko, *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, p. xiv.)

Hilary Putnam, en efecto, también ha abogado en favor de este tipo de enfoque, en artículos como "What is mathematical truth?" ("¿Qué es la verdad matemática"), de 1975 (incluido en sus *Philosophical Papers*, vol. 1, pp. 60–78, así como en esa misma compilación de Tymoczko, pp. 49–65), o en "Philosophy of mathematics: a report" ("Filosofía de la matemática: un informe"), de 1979 (incluido en otra recopilación de artículos de Putnam, *Words and Life*, bajo el título "Philosophy of mathematics: why nothing works" ("Filosofía de la matemática: por qué nada funciona"), pp. 499–512).

Pero sin duda la principal defensa del cuasi-empirismo metodológico en filosofía de la matemática es la que cabe encontrar en la obra del filósofo de la ciencia húngaro Imre Lakatos, a través de algunos artículos suyos de gran resonancia publicados en vida en los años 60 y principios de los 70, y otros que aparecieron póstumamente, tras su prematura muerte en 1974, cuando contaba cincuenta y un años de edad.

§ 6.7. La filosofía de la ciencia falsacionista aplicada a las matemáticas. La concepción de Lakatos estuvo fuertemente influenciada por la filosofía de la ciencia del conocido Karl Popper, a quien sucedió al frente del Departamento de Filosofía de la *London School of Economics*. Popper fue el autor de una de las principales propuestas en filosofía de la ciencia del siglo XX: el *falsacionismo*, presentado en su libro *La lógica de la investigación científica*, de 1934, y desarrollado posteriormente en *Conjeturas y refutaciones*, de 1963, y en otras obras.

Según la propuesta de Popper, muy resumidamente, la característica definitoria de las teorías científicas es la *falsabilidad*, esto es, la posibilidad de que mediante la experiencia puedan ser refutadas. Y el principal objetivo metodológico del buen científico debe ser tratar de buscar falsaciones a las teorías que maneja, obligándose así, caso de conseguirlo, a reemplazarlas por otras mejores (cf. por ejemplo *La lógica de la investigación científica*, pp. 40–41).

Pues bien: la filosofía de la matemática de Lakatos es en parte un intento de aplicar ese falsacionismo hasta donde fuera posible, a la metodología de las matemáticas (cf. *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*, cuyo solo título es ya una clara evocación popperiana, pp. 14, 18, o *Matemáticas, ciencia y epistemología*, p. 66).

Otro antecedente inmediato en el que se apoya la filosofía de Lakatos es el trabajo del eminente matemático, también húngaro, George Pólya, que investigó concienzudamente la heurística del descubrimiento matemático, en obras como su *Matemáticas y razonamiento plausible*, de 1954, entre otras (cf. otra vez *Pruebas y refutaciones*, pp. 14, 18).

Pero Lakatos lleva su concepción filosófica mucho más allá, sosteniendo que en matemáticas, como también en el resto de las ciencias, el proceso creador o descubridor de teorías y el proceso de justificación de las mismas están indisolublemente ligados entre sí, y sólo se pueden representar adecuadamente como un todo unitario.

Lakatos se opone, por tanto, a la distinción propuesta por Reichenbach para la filosofía general de la ciencia, entre el *contexto de descubrimiento* y el *contexto de justificación* de teorías, a diferencia de la concepción de Pólya, que mantiene una clara separación entre ambos cosas (cf. Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, pp. 165ss., en esp. nota 41; Pólya, *Matemática y razonamiento plausible*, pp. 13–14; y para el origen de la distinción, Reichenbach, *Experience and Prediction*, Capítulo 1, o *Elements of Symbolic Logic*, p. 2).

§ 6.8. El estilo euclídeo y la matemática cuasi-empírica. Eso le lleva a su vez a Lakatos a reivindicar el estudio de la historia de las matemáticas como fuente substancial de la investigación sobre su metodología, y a rechazar el modelo idealizado de teoría matemática (que él llama "deductivista", o "euclídeo"), según el cual las teorías matemáticas se presentan como productos perfectamente terminados y acabados, compuestos por sus definiciones, axiomas, teoremas y pruebas, en un orden aparentemente inmutable:

> "En el estilo deductivista todas las proposiciones son verdaderas y todas las inferencias son válidas. Las matemáticas se presentan como un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables, en el que no pueden entrar los contraejemplos, las refutaciones o la crítica. (...) El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada."
> (Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, p. 166.)

A este estilo contrapone Lakatos su *enfoque heurístico* o *matemática cuasi-empírica*, que constituye una representación mucho más ajustada y fidedigna de la matemática, en su desarrollo real:

> "(...) las matemáticas informales y cuasi-empíricas no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino que lo hacen mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones."
> (Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, p. 20.)

§ 6.9. Falsadores potenciales en matemáticas. Lakatos se declara abiertamente falibilista, no sólo para la ciencia natural, sino también en matemáticas y en lógica (*Matemáticas, ciencia y epistemología*, p. 173). Sin embargo, ¿cuál es la naturaleza de los *falsadores potenciales* (esto es, de los enunciados potencialmente falsadores de una teoría) en matemáticas?

> "Si la matemática y la ciencia son ambas cuasi-empíricas, entonces la diferencia crucial entre ellas, si es que existe alguna, ha de encontrarse en la naturaleza de sus "enunciados básicos", o "falsadores potenciales". La "naturaleza" de una teoría cuasi-empírica viene determinada por la naturaleza de las inyecciones de valores de verdad en sus falsadores potenciales. Ahora bien, nadie estará dispuesto a sostener que la matemática es empírica en el sentido de que sus falsadores potenciales son enunciados espacio-temporales singulares. Pero entonces, ¿cuál es la naturaleza de la matemática? o ¿cuál es la naturaleza de los falsadores potenciales de las teorías matemáticas?"
> (Lakatos, *Matemáticas, ciencia y epistemología*, p. 57.)

Lakatos identifica esos falsadores con todos los devaneos que puede llegar a sufrir una teoría matemática a lo largo de su historia, en sus sucesivas formulaciones y reformulaciones.

Uno de los ejemplos estudiados por Lakatos a este respecto fue precisamente la historia del cálculo infinitesimal, y cómo determinadas entidades matemáticas como los infinitésimos fueron utilizadas durante un tiempo, después criticadas y abandonadas, y más tarde finalmente recuperadas, bajo un formato algo distinto, y vueltas a elevar a la dignidad de objeto respetable de la investigación matemática (cf. su artículo "Cauchy y el continuo: la importancia del análisis no estándar para la historia y la filosofía de la matemática", en *Matemáticas, ciencia y epistemología*, pp. 67–90). Nosotros nos referimos en su momento a esto en § 1.30.

Es un ejemplo de que en matemáticas también hay desaparición de términos teóricos, y a veces "reaparición", junto con el engranaje que los acompañe, por ensayo y error, en similitud a como ha sucedido, eso sí, con mucha más frecuencia, en la historia de las ciencias naturales.

§ 6.10. Reconstrucciones racionales y la metodología de los programas de investigación científica. Por otra parte, el cuasi-empirismo metodológico lakatosiano destila una profunda confianza en la *racionalidad* de la investigación científica, y en particular de la matemática.

Precisamente uno de los conceptos clave de su propuesta es el de las *reconstrucciones racionales* de los distintos episodios en la historia de la ciencia, poniendo de manifiesto explícitamente todo el engranaje teórico y metodológico que permita interpretar el desarrollo histórico de los hechos y la gestión en la producción y asimilación de conocimiento.

Para ello, Lakatos propuso toda una *Metodología de los programas de investigación científica*, recogida en el volumen 1 de sus *Escritos filosóficos*. Una metodología orientada ya al conjunto de la ciencia y no específicamente a las matemáticas, y por la que este autor es si cabe más conocido que por su otra aportación. Con ella, Lakatos pretendía reafirmar la racionalidad de la ciencia ante la provocadora imagen transmitida por el archidivulgado libro de Thomas Kuhn, de 1962, *La estructura de las revoluciones científicas*.

La contribución de Lakatos a la filosofía de la matemática, en fin, puede consultarse en sus libros ya citados: *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*, originalmente publicado en 1976 y la mayor parte del cual está escrito en forma de diálogo. Y *Matemáticas, ciencia y epistemología*, que constituye el volumen 2 de sus *Escritos* *filosóficos*, y que apareció junto con el 1, en el año 1978. Las dos obras están traducidas al castellano.

Además, en inglés hay un excelente estudio sobre la filosofía de la matemática de Lakatos: *Lakatos' Philosophy of Mathematics: A Historical Approach*, de Teun Koetsier, que es también un desarrollo crítico sobre sus propuestas originales, refinándolas, moderándolas, y haciéndolas más convincentes, al menos a mi juicio. Y en español hay también un estudio, más breve, escrito por un murciano: *La filosofía de la matemática de Lakatos*, de Manuel Ballester.

Un premio instituido en honor de Imre Lakatos distingue cada año, desde 1986, a la mejor obra reciente en el ámbito de la filosofía de la ciencia. Eso incluye la filosofía de la matemática, y en efecto, tres libros lo han obtenido, que aparecen mencionados en este curso: *Frege: Philosophy of Mathematics*, de Michael Dummett (publicado en 1991 y por el que fue premiado en 1994); *Naturalism in Mathematics*, de Penelope Maddy (publicado en 1997 y premiado en 2002), autora de la que vamos a hablar inmediatamente; y el primero en recibirlo, *Science without Numbers*, de Hartry Field (publicado en 1980 y premiado en 1986), del que también vamos a hablar enseguida.

Otras propuestas empiristas

§ 6.11. El realismo conjuntista de Penelope Maddy. Más reciente es la propuesta, verdaderamente singular, de la profesora estadounidense de la Universidad de California Penelope Maddy, a través de una serie de artículos publicados en la década de 1980, y que cuajaron después en su libro *Realism in Mathematics*, de 1990.

La propuesta de Maddy es un intento de combinar la fuerza de la tesis de indispensabilidad de Quine y Putnam con la idea de la existencia de una intuición matemática básica, en la que Gödel había insistido tanto. Si la tesis de indispensabilidad sirve para reivindicar el realismo con respecto a las entidades postuladas por la matemática aplicada, la intuición matemática básica nos incita a ser realistas (o platónicos) con respecto a los objetos más elementales. Maddy intentará dar una respuesta única y coherente a ambas inquietudes, en una forma de realismo matemático que parte de la consideración de la noción matemática de conjunto, por lo que ella misma lo denomina *"realismo conjuntista"* (*set theoretic realism*, cf. Maddy, *Realism in Mathematics*, p. 35).

Maddy parte de la consideración de pequeños conjuntos de objetos físicos, como pueda ser el formado por tres huevos ubicados en sus respectivos huecos en un cartón de huevos. Contra la opinión general de que los conjuntos son objetos que están fuera del universo físico, Maddy argumenta que ese conjunto en particular sí tiene un lugar espacio-temporal en nuestro universo, a saber, la región ocupada por los huevos dentro del cartón en cuestión (cf. Maddy, *Realism in Mathematics*, p. 59).

Una larga disquisición acerca de lo que sabemos sobre nuestros mecanismos perceptivos lleva a Maddy a concluir, que la percepción de ese conjunto de huevos como tal conjunto no representa un grado de abstracción mucho mayor que la percepción de los propios huevos, como objetos permanentes y separados de su entorno. Y que en definitiva, lo que experimenta alguien que abre el cartón de huevos, en busca de ingredientes para cocinar una tortilla, es la percepción física del conjunto de huevos como tal (cf. Maddy, *Realism*, p. 58).

Los conjuntos, según esto, o por lo menos aquellos conjuntos que resultan más inmediatos a nuestra percepción, han de ser considerados como entidades físicas en sí mismos.

¿Qué decir entonces de los enunciados numéricos habituales sobre estos conjuntos? Como cuando decimos, por ejemplo, al abrir la huevera y ver su contenido:

"Hay tres huevos en el cartón"

Ese tipo de creencias numéricas sobre conjuntos pequeños, señala Maddy, son asimilables, dados los estudios psicológicos basados en tiempos de reacción, a lo que los epistemólogos llaman *"creencias no inferenciales"*. Esto es, a creencias que se forman inmediatamente a partir de nuestra experiencia perceptiva, y que no son el resultado de un razonamiento o inferencia. Como por ejemplo, la creencia de que "hay un fuego' por parte de alguien que lo está viendo delante de sus ojos. (Otro ejemplo podría ser la percepción de la tirada que ha salido en un dado, por parte de quienes están jugando una partida de parchís. Cualquier persona adulta que tenga cierta experiencia en jugar con dados de parchís reconoce inmediatamente la tirada, sin necesidad de pararse a contar los puntitos que han salido.)

Tales creencias se oponen, según esta clasificación, a las llamadas "creencias inferenciales", que son las que se forman como resultado de un cierto proceso de pensamiento, o de inferencia. Por ejemplo, la misma creencia de que "hay un fuego" mencionada antes, pero cuando el sujeto que la mantiene no ha visto directamente el fuego, sino sólo el humo que sale por la ventana de una casa; y a partir de ahí reconstruye que tiene que existir un fuego que lo produzca.

Por consiguiente, dada la asimilación de los enunciados numéricos sencillos a las creencias no inferenciales, Maddy argumenta que tales enunciados han de interpretarse como enunciados en los que se predica una propiedad de aquella entidad física real que constituye el conjunto de objetos, como tal conjunto en sí mismo (cf. otra vez Maddy, *Realism in Mathematics*, pp. 59–60).

§ 6.12. De las nociones matemáticas concretas a las más abstractas. Pues bien, dicho esto, nuestras intuiciones sobre las nociones más básicas o concretas acerca de los conjuntos, reflejadas en algunos de los axiomas más elementales de la teoría de conjuntos, han de ser explicadas, según esta propuesta, como generalizaciones perceptuales inmediatas. Es decir, como generalizaciones perceptuales similares a las intuiciones básicas acerca del comportamiento del resto de objetos físicos (cf. Maddy, *Realism in Mathematics*, p. 70).

Y a partir de esas nociones inmediatas, relacionadas con conjuntos relativamente pequeños y demás, la matemática va progresando paulatinamente hacia conceptos mucho más generales y abstractos, sobre los que no hay percepciones directas, ni intuiciones directas. En estos otros casos lo que se aplica, según la propuesta que estamos comentando, es sencillamente un criterio explicativo similar al que se usa en el resto de las ciencias, es decir: el criterio de aceptar como válidos aquellos conceptos y principios que resultan mejor en su aplicación a la parte observable.

Aquí Maddy se apoya en una sugerencia que encontramos en los escritos de Gödel, no lejos del lugar en esos escritos en que expresaba la afirmación de su exacerbado platonismo:

> "(...) junto a la intuición matemática, puede haber otro criterio (aunque sólo probable) de la verdad de los axiomas matemáticos, a saber, su fecundidad en las matemáticas e incluso, se podría añadir, quizá también en la física". (Gödel, "¿Qué es el problema de continuo de Cantor? — Suplemento", *Obras completas*, p. 361, citado en Maddy, *Realism in Mathematics*, p. 77.)

De esta forma, Maddy pretende formular una filosofía de la matemática de corte empirista, que sea claramente compatible con el realismo (o platonismo) con respecto a los objetos matemáticos, y que al mismo tiempo sea compatible también con el *fisicalismo*, esto es, con la doctrina de que todos los hechos científicos son explicables en principio en términos de hechos físicos (cf. Maddy, *Realism*, pp. 154, 157).

Un libro posterior, en fin, de esta autora, *Naturalism in Mathematics*, de 1997, que fue premiado como acabamos de comentar, reviste un carácter mucho más técnico y concreto. En él examina detalladamente el estatus filosófico de ciertos axiomas y candidatos a axiomas de la teoría de conjuntos. En este segundo libro la filosofía de la matemática de Maddy da un giro considerable, criticando la tesis de indispensabilidad por verla poco acorde con la realidad de la práctica matemática (cf. *Naturalism in Mathematics*, pp. 107, 159), y critica asimismo la forma de realismo en filosofía de la matemática que ella misma había abrazado en su obra anterior (cf. *Naturalism in Mathematics*, p. 132). (Dos artículos sobre Pelenope Maddy escritos en castellano, del profesor Antonio Caba, son "Cuestiones abiertas en el platonismo de Gödel: la controversia Chihara-Maddy", en la revista *Philosophia Malacitana* 8, 1995, pp. 29–47, y "Aspectos metodológicos del naturalismo matemático: la aproximación conjuntista de Maddy", en *Contrastes: Revista interdisciplinar de filosofía* 5, 2000, pp. 5–23.)

§ 6.13. El análisis de Philip Kitcher sobre la naturaleza del conocimiento matemático. Otro proyecto reciente es el del británico Philip Kitcher, también profesor en los Estados Unidos, expuesto en su libro de 1982, que hemos citado ya unas páginas atrás: *The Nature of Mathematical Knowledge* ("La naturaleza del conocimiento matemático"). Kitcher pretende recoger el testigo de la corriente empirista protagonizada por Quine, Putnam y Lakatos, pero elaborando en detalle lo que estos autores no han llegado a ofrecer: un tratamiento sistemático de en qué consisten, y cómo se han ido adquiriendo, las distintas piezas que configuran el corpus de nuestro conocimiento matemático actual. En otras palabras: un tratamiento que sea acorde con la filosofía empirista de la matemática, pero que proporcione al mismo tiempo una descripción detallada y sistemática del conocimiento matemático en sus distintas partes.

El principal objetivo de Kitcher, tal y como reza el título de su libro, es explicar la naturaleza del conocimiento matemático. Para ello tiene que partir de la premisa "obvia e incuestionable" de que existe en efecto dicho conocimiento (cf. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 3).

A continuación, su análisis pondrá el énfasis en la comunidad matemática, y en la historia de la matemática, tratando de iniciar de hecho una nueva tradición en la historiografía de esta ciencia (Kitcher, *The Nature*, pp. 5, 7–8).

El conocimiento matemático de un individuo, según Kitcher, se fundamenta en el conocimiento de las autoridades científicas de la comunidad matemática a la que pertenece. Y el conocimiento de esa comunidad matemática se fundamenta a su vez en el conocimiento de las autoridades de las comunidades anteriores, que la precedieron.

Ese conocimiento matemático se transmite por tanto a través del tiempo, de cada comunidad matemática a la siguiente, en un complejo proceso de evolución epistemológica, creativa y cambiante, a lo largo del cual dicho conocimiento va alcanzando grados de abstracción cada vez mayores.

Y remontándonos hacia atrás en el tiempo, llegamos finalmente a las etapas iniciales de la cadena. Pues bien, lo que se encuentra en ese inicio, según Kitcher, es el conocimiento perceptual rudimentario adquirido por nuestros ancestros más remotos, que es el que origina todo el conocimiento matemático, y sobre el que todo él, en última instancia, se apoya (cf. Kitcher, *The Nature*, pp. 5, 7, 10–11).

En consonancia con todo esto, la entidad de los objetos matemáticos se identifica con estructuras abstraídas de la realidad física, y por lo tanto presentes en ella, en la medida en que es la realidad la que nos permite abstraerlas de ella, y las que nos las proporciona (cf. Kitcher, *The Nature*, pp. 107–108).

De esta forma, también Kitcher pretende que su explicación empirista de la naturaleza del conocimiento matemático dé cobertura de una forma coherente y continua a la existencia de la "matemática pura", esto es, a toda la matemática que no tiene ningún tipo de aplicaciones prácticas, y que por cierto, es con mucho la parte mayor (cf. Kitcher, *The Nature*, pp. 8–9).

§ 6.14. La filosofía de la matemática de Kitcher y el realismo ecológico. Además, Kitcher apela también, en defensa de su propuesta, a cierta corriente relativamente reciente en psicología cognitiva, el llamado *"realismo ecológico"* iniciado por el psicólogo estadounidense James Gibson, en libros como *La percepción del mundo visual*, de 1974 y sobre todo *The Ecological Approach to Visual Perception*, de 1979. Y expuesto en un formato divulgativo para el publico no especialista en *Direct Perception*, de 1981, escrito por Michaels y Carello (aún no traducido a nuestra lengua, como tampoco el anterior de Gibson).

Dicha corriente defiende que la mayor parte de nuestra percepción es *directa*, y *"no inferencial"*. Esto es: que una descripción completa, lo suficientemente rica, de la información visual que percibimos, muestra cómo la visión capta directamente aspectos estructurales del ambiente y *"potencialidades"*, oportunidades que nos ofrece, o *cosas que las realidad nos puede proporcionar* (la expresión "potencialidades" es una traducción mía del inglés *'affordances'*, término para el cual no se ha encontrado hasta el momento una traducción feliz, ni unánime).

Ejemplos de esas "potencialidades" podrían ser la cualidad alimenticia de una lechuga ante los ojos de un conejo, es decir, la oportunidad que ofrece para saciar su hambre, o la posibilidad que ofrece un árbol como lugar de refugio para una ardilla que está siendo perseguida por un perro (cf. Kitcher, *The Nature*, pp. 11–12).

Pues bien, según Kitcher, esas "potencialidades" constituirían un ejemplo del tipo de abstracción perceptiva que está en el origen del conocimiento matemático. La matemática sería, en definitiva, "una ciencia ideal de potencialidades universales" (cf. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 108).

§ 6.15. Las matemáticas sin fundamentos. El empirismo en filosofía de la matemática, en fin, ha experimentado como vemos toda una eclosión en los últimos cincuenta años. Un auge del que nosotros sólo hemos podido mostrar aquí una pequeña selección.

Un auge, por lo demás, que coincide con la línea convencionalista en una premisa básica, de la que unos y otros suelen hacer bandera: que la matemática no necesita en realidad ningún "fundamento". Frente al debate sobre la crisis de fundamentos de principios de siglo, y a los filósofos que siguen defendiendo hoy día una u otra de aquellas escuelas "fundacionales", que los hay, como hemos visto aquí, estas otras corrientes mantienen que enfocar el examen filosófico de la matemática como una búsqueda de fundamentos es sencillamente un error.

Como dice Hilary Putnam, ejemplo de empirista notable al que nos hemos venido refiriendo, en su artículo "Mathematics without foundations" ("Matemáticas sin fundamentos"), aparecido en el *Journal of Philosophy* en el año 1967:

> "Filósofos y lógicos durante el último medio siglo han estado tan ocupados tratando de proporcionar a la matemática un "fundamento", que sólo en raras ocasiones algunas voces se atrevían a sugerir tímidamente que no necesita ninguno. Yo querría recomendar aquí encarecidamente que tomemos en serio la opinión de esas tímidas voces. No creo que la matemática sea poco clara; no creo que la matemática tenga una crisis en sus fundamentos; es más, no creo que la matemática tenga 'fundamentos' ni los necesite."
> (Putnam, "Mathematics without foundations", en *Philosophical Papers, vol. 1: Mathematics, Matter and Method*, p. 43, así como en Benacerraf y Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, p. 295).

Otras corrientes actuales en filosofía de la matemática

§ 6.16. Otras dos corrientes actuales. Y por último, antes de terminar este Curso, vamos a hablar brevemente de otras dos corrientes que florecen en la filosofía de la matemática actual: el estructuralismo y el nominalismo. Se trata, como decíamos ya en las primeras páginas, de dos corrientes actuales de reconocida importancia, que no casan en ninguno de los Módulos del Curso, pero a las que tampoco podemos dedicar ya la suficiente extensión como para asignarles un Módulo aparte.

§ 6.17. Enfoques estructuralistas. La idea matriz del estructuralismo en filosofía de la matemática es que la matemática no trata sobre objetos propiamente dichos, sino sólo sobre *estructuras* de objetos. Dentro de esas estructuras, la identidad individual de los distintos objetos involucrados es completamente indiferente: el único contenido propiamente matemático, según este punto de vista, es la caracterización de la funcionalidad y las relaciones mutuas que mantienen entre sí esos objetos, esto es, la caracterización de la estructura en sí misma.

Con frecuencia se cita a Richard Dedekind como principal precursor de esta filosofía, entre otras cosas por su caracterización del conjunto de los números naturales, de forma que

> "(. . .) se prescinde totalmente de la peculiar naturaleza de los elementos, únicamente se retiene su diferenciabilidad y sólo se consideran las relaciones mutuas en que los pone la representación ordenadora (. . .)."
> (Dedekind, *¿Qué son y para qué sirven los números?*, secc. 73, p. 118 de la ed. española.)

Bastante tiempo después, Paul Benacerraf presentó una incisiva defensa de este punto de vista en otro artículo suyo, enormemente influyente también: "¿Qué no podrían ser los números?", de 1965 (traducido al castellano en *Mathesis: Revista de divulgación e información en filosofía e historia de las matemáticas* 9(3), 1993, pp. 317–343).

La propuesta de Benacerraf es que los números naturales no tienen ninguna identidad individual particular, y por lo tanto no son *objetos* propiamente dichos: lo único que los caracteriza es la estructura abstracta que forman, por la red de relaciones que mantienen entre ellos. No tiene ningún sentido preguntarse, por ejemplo, si el número 43 es un determinado conjunto postulado por la teoría de conjuntos, u otro distinto, o incluso si es el mismísimo emperador Julio César (cf. Benacerraf, "¿Qué no podrían ser los números?", *Mathesis* 9(3), pp. 334, 339).

Frege se planteó insistentemente que una teoría satisfactoria sobre los números naturales debía explicar qué objetos concretos eran, y en particular, que fueran objetos distintos a Julio César, por ejemplo (cf. Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, secc. 56, p. 82 de la ed. castellana). Pues bien: este afán, que se conoce desde entonces como "el problema de Julio César", es para Benacerraf un simple error, dado que cualquier objeto podría funcionar como un número determinado, siempre que estuviera inmerso en una estructura adecuada. Esto es, siempre que estuviera inmerso en el tipo de estructura que conforma el conjunto de los números naturales con sus relaciones entre ellos.

La cuestión es que para identificar un número determinado, y distinguirlo del resto de componentes de la serie numérica, sólo podemos utilizar la posición relativa en la que ese número se encuentra dentro de la serie, así como el conjunto de relaciones que tiene con el resto de números, y que se derivan precisamente de esa posición. La situación es completamente distinta, por tanto, de la de una farola, por ejemplo, dado que para identificar individualmente una farola y distinguirla de otras farolas vecinas podemos acudir no sólo a su posición en la fila, sino también a sus características físicas individuales, como puedan ser su masa, su color, y otras muchas (cf. Benacerraf, "¿Qué no podrían ser los números?", *Mathesis* 9(3), p. 335).

De lo cual se sigue que los números naturales, a diferencia de las farolas, no son entidades particulares propiamente dichas, sino simplemente los huecos necesarios, o muescas, dentro de una compleja estructura abstracta, que es el verdadero objeto de estudio de la ciencia matemática.

§ 6.18. Estructuralismo y deductivismo. El mencionado artículo de Benacerraf ha tenido eco a su vez en una enorme cantidad de publicaciones, al igual que sucedería con su otro artículo de 1973, al que nos referimos al comienzo del Curso (p. 23).

Una de las primeras reacciones aparece en el artículo de Putnam "Mathematics without foundations", de 1967, al que también nos hemos referido ya aquí, y que está reproducido en los *Philosophical Papers* de Putnam (vol. 1, pp. 43–59), así como en *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, compilación editada por Benacerraf y por el propio Putnam (pp. 295–311).

Lo que Putnam viene a sugerir en ese artículo es básicamente que una teoría matemática se puede interpretar como la mera afirmación de que *si* un determinado dominio de objetos satisface sus postulados o axiomas, *entonces* satisfará también todos los teoremas de la misma. La teoría se podría caracterizar, por tanto, en términos de la necesidad lógica que liga a sus axiomas con sus teoremas, por el hecho de estar estos últimos implicados por los primeros.

Esa necesidad lógica, a su vez, se puede tratar de describir internamente en el contexto de la llamada *"lógica modal"*. La lógica modal es otra de las lógicas no clásicas: constituye una extensión de la lógica de primer orden clásica, que trata de dar cuenta de las nociones de *necesidad* y *posibilidad*.

De esa forma, señala Putnam, existe un medio de reducir la estructura caracterizada por las distintas teorías matemáticas a los términos de la lógica modal. Así pues, la reducción a los términos de la teoría de conjuntos no sería la única alternativa posible, siendo estas dos, es decir, la reducción a los términos de la teoría de conjuntos y la reducción a los términos de la lógica modal, igualmente legítimas y válidas en principio, aunque en diferentes casos pueda ser más útil o clarificadora una que la otra (cf. Putnam, "Mathematics without foundations", *Philosophical Papers, vol. 1: Mathematics, Matter and Method*, p. 57, y en Benacerraf y Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, pp. 308–309).

La propuesta de Putnam ha sido caracterizada como *"deductivismo"*, y a veces también con la etiqueta *"si,entonces-ismo"* (del inglés *"if,then-ism"*, cf. Resnik, *Frege and the Philosophy of Mathematics*, p. 130, y *Mathematics as a Science of Patterns*, p. 142).

Un desarrollo detallado de dicha propuesta es el libro del profesor de la Universidad de Minnesota (y concertista de piano) Geoffrey Hellman, *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation* ("Matemáticas sin números: hacia una interpretación estructural-modal"), de 1989.

El estructuralismo modal que propone Hellman incluye el compromiso de las teorías matemáticas con la posibilidad de que existan las estructuras abstractas determinadas por ellas. Esto es, que las teorías matemáticas no se limitan, según esto, a caracterizar ciertas estructuras, sino que afirman que dichas estructuras son *posibles*. Y esto representaría un paso más allá de la mera propuesta deductivista (cf. Hellman, *Mathematics without Numbers*, pp. 18–19, 26).

Otras dos obras, en fin, dignas de mención, que están dentro del enfoque estructuralista pero ya en líneas de investigación muy distintas, son *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology* ("Filosofía de la matemática: ontología y estructura"), de Stewart Shapiro, y el mencionado *Mathematics as a Science of Patterns* ("La matemática como una ciencia de patrones") de Michael Resnik, ambas publicadas en el año 1997.

§ 6.19. El nominalismo en la reciente filosofía de la matemática: la "ciencia sin números" de Hartry Field. El término *"nominalismo"* proviene de la vieja disputa medieval sobre la existencia separada de los conceptos o *universales* (como el concepto de *tigre*, por ejemplo). La posición contraria a esa existencia, que defendía que un universal era un mero *"flatus vocis"*, es decir, un "soplo de la voz", un nombre, es la que se denominó entonces *nominalismo*, y cuyo principal representante fue el teólogo y filósofo inglés Guillermo de Occam.

En el año 1980 el profesor Hartry Field, de la Universidad de Nueva York, publicó una contribución extraordinariamente original y compleja a la filosofía de la matemática, en la que reivindicaba explícitamente esa etiqueta, aplicada de una forma específica a las entidades matemáticas: *Science without Numbers: A Defence of Nominalism* ("Ciencia sin números: una defensa del nominalismo", aún no traducido al castellano). Trabajo que completó en 1989 con una compilación de artículos varios sobre el mismo tema, *Realism, Mathematics and Modality* ("Realismo, matemáticas y modalidad", tampoco traducido a nuestra lengua).

La obra de Field es una reacción al argumento de indispensabilidad, que ya conocemos, y surge precisamente con la intención de *refutar* ese argumento. Esto es, surge con la intención de mostrar que es posible aceptar las teorías científicas actuales, y en particular las teorías físicas, sin comprometerse con la verdad de las teorías matemáticas ni con la existencia de las entidades matemáticas que intervienen en ellas.

Para ello, Field plantea una complicada estrategia, destinada a reformular las teorías físicas al uso, de tal manera que la referencia a los objetos matemáticos desaparezca por completo de ellas.

Como este autor sostiene, por otra parte, que la tesis de indispensabilidad es el único argumento serio en favor de la existencia de los objetos matemáticos, se sigue que estos objetos no existen en absoluto: son meros "nombres", meras ficciones útiles o instrumentos de razonamiento, que nos ayudan en nuestras disquisiciones acerca del mundo físico, pero de las cuales podemos prescindir (cf. Field, *Science without Numbers*, pp. 1–2, 5). De ahí su posición *nominalista*, a la llama también *"ficcionalista"*, y a veces, *"instrumentalista"* (cf. Field, *Science without Numbers*, p. 2, *Realism, Mathematics and Modality*, p. 4).

Según la propuesta de Field, la utilidad de los objetos matemáticos en la física es distinta de la utilidad de las diversas entidades teóricas que se postulan en ella (como fuerzas, electrones y demás), sencillamente porque los primeros son prescindibles: todo el razonamiento que se realiza acerca de los objetos físicos utilizando matemáticas se puede realizar también sin ellas, según Field, aunque eso sí, siguiendo un camino mucho más largo y tortuoso.

Por ello dice este autor que las matemáticas son *"conservadoras"* (en inglés, *"conservative"*), en el sentido de que no aportan nada realmente nuevo a nuestro conocimiento de los objetos físicos. En otras palabras, que no aportan nada que no hubiese podido ser obtenido mediante un razonamiento sin ellas (cf. Field, *Science without Numbers*, pp. x, 10–11).

La tarea que se plantea Hartry Field por consiguiente, es la de mostrar en detalle en qué consiste ese "tortuoso" camino por el cual supuestamente se puede reconstruir el razonamiento científico ordinario sin utilizar las matemáticas.

Dicha tarea constituye en la práctica un ambicioso proyecto de investigación, de gran envergadura y de carácter marcadamente técnico, al estilo, en cierto modo, de los propuestos por las viejas escuelas fundacionales. En el caso de Field, sin embargo él sólo aspira a dejar planteado su proyecto, y a ilustrarlo con un caso relativamente sencillo: la teoría de la gravitación de Newton (cf. otra vez Field, *Science without Numbers*, pp. 61–91, y *Realism, Mathematics and Modality*, p. 17).

No entraremos aquí en mayores detalles sobre la forma como este autor lleva a cabo su reducción nominalista, cosa que exigiría un espacio considerable.

Sí es inexcusable mencionar que el tipo de ruta de razonamiento "tortuosa" que Field describe se apoya esencialmente en la llamada *"lógica de segundo orden"*, una extensión de la teoría lógica básica, la *lógica de primer orden clásica*. Es ese recurso a la lógica de segundo orden el que más ha sido criticado, por considerar muchos autores que se trata de una teoría de fuerte calado matemático. Y el propio Field manifiesta claramente su disgusto por tener que recurrir a ella (cf. una vez más Field, *Science without Numbers*, p. 38).

§ 6.20. Otras propuestas nominalistas. Otro esfuerzo reciente por evitar la referencia a los objetos matemáticos, también como respuesta al argumento de Quine-Putnam pero en una línea muy distinta, es el de Charles Chihara en su obra de 1990, *Constructibility and Mathematical Existence* ("Constructibilidad y existencia matemática").

Chihara es plenamente consciente, sin embargo, de que su proyecto es nominalista sólo acerca de los *objetos* matemáticos, pero no de las *nociones* o contextos de razonamiento, que se usan para reemplazar la referencia a dichos objetos (cf. Chihara, *Constructibility and Mathematical Existence*, pp. 47, 174). En definitiva, "compromiso ontológico" frente a "compromiso ideológico", como se formula a veces, en terminología quineana (terminología procedente de otro artículo de la época de "Dos dogmas": "Ontology and Ideology", publicado en 1951 en *Philosophical Studies* 2(1): 11–15, y no incluido, hasta donde yo sé, en compilaciones posteriores de Quine, ni traducido al castellano).

Y algo parecido, podríamos concluir, es aplicable a casi todos los programas de este estilo, incluido el de Field: independientemente de sus dificultades técnicas, o de que consigan o no el éxito final en la empresa reduccionista, los recursos utilizados para la reducción (ya sea lógica de segundo orden, nociones modales, nociones conjuntistas u otras), suelen suscitar a la postre las mismas dudas epistemológicas que los objetos originales.

Como dice el profesor de la Universidad de Princeton, John Burgess:

> "Tener una ontología o *no tenerla en absoluto*, es un rasgo impuesto más por nosotros que por el universo.
>
> "El trabajo de Field y otros puede ser por tanto considerado como complementario al de Quine, en vez de estar en conflicto con él."
>
> (Burgess, "Epistemology and nominalism", en Irvine (ed.), *Physicalism in Mathematics*, p. 14.)

Bibliografía general

Alcolea Banegas, J., *Logicismo, formalismo, intuicionismo*, Valencia: Nau Llibres, 1985.

Alemán Pardo, A., Lógica, matemáticas y realidad (2ª ed.), Madrid: Tecnos, 2011.

Aristóteles, *Física*, Madrid: Gredos, 1995.

Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Nueva York: Oxford University Press, 1998.

Ballester Hernández, M., *La filosofía de la matemática de Imre Lakatos*, El Campello (Alicante): Interlibro, 1998.

Benacerraf, P., y H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (2ª ed.), Cambridge: Cambridge University Press, 1983 (reimp. 1996).

Berkeley, G., *The Works of George Berkeley* (4 vols.), Bristol: Thoemmes Press, 1998.

Beth, E., *Las paradojas de la lógica*, Valencia: Publicaciones de la revista *Teorema*, 1975.

Bigelow, J., *The Reality of Numbers: A Physicalist's Philosophy of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 1988.

Bishop, E., *Foundations of Constructive Analysis*, Nueva York: McGraw-Hill, 1967.

Bridges, D., y F. Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

Brouwer, L. E. J., *Collected Works, vol. 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, Amsterdam: North-Holland, 1975.

Brouwer, L. E. J., *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

Brown, J. R., *Philosophy of Mathematics: An Introduction to a World of Proofs and Pictures*, Londres: Routledge, 1998.

Burgess, J. P., y G. Rosen, *A Subject with no Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 1997.

Cantor, G., *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*, Barcelona: Crítica, 2006.

Cañón Loyes, C., *La matemática: creación y descubrimiento*, Madrid: Universidad Pontificia de Comillas, 1993.

Carnap, R., *Autobiografía intelectual*, Barcelona: Paidós, 1992.

Chihara, C. S., *Ontology and the Vicious-Circle Principle*, Ithaca (N.Y.): Cornell University Press, 1973.

Chihara, C. S., *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford: Clarendon Press, 1990 (reimp. 1991).

Chihara, C. S., *A Structural Account of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 2004.

Collette, J. P., *Historia de las matemáticas* (2 vols.), Madrid: Siglo XXI, 1985.

Colyvan, M., *The Indispensability of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 2001.

Colyvan, M., *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

Davis, M., *La computadora universal: de Leibniz a Turing*, Madrid: Debate, 2002.

Davis, P. J., y R. Hersh, *Experiencia matemática*, Barcelona: Labor, 1988.

Dedekind, R., *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*, Madrid: Alianza, 1998.

Detlefsen, M., *Hilbert's Program: An Essay on Mathematical Instrumentalism*, Dordrecht: Reidel, 1986.

Dou, A., *Fundamentos de la matemática* (2ª ed.), Barcelona: Labor, 1974.

Duhem, P., *La teoría física: su objeto y su estructura*, Barcelona: Herder, 2003.

Dummett, M. A. E., *Frege: Philosophy of Language* (2ª ed.), Londres: Duckworth, 1981.

Dummett, M. A. E., *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Londres: Duckworth, 1981.

Dummett, M. A. E., *La verdad y otros enigmas*, México D.F.: Fondo de Cultura Económica, 1990.

Dummett, M. A. E., *Frege and Other Philosophers*, Oxford: Clarendon Press, 1991 (reimp. en versión electrónica en Oxford Scholarship Online, 2004).

Dummett, M. A. E., *Frege: Philosophy of Mathematics*, Londres: Duckworth, 1991 (reimp. en Cambridge (MA.): Harvard University Press, 1995).

Dummett, M. A. E., *Elements of Intuitionism* (2ª ed.), Oxford: Clarendon Press, 2000.

Echeverría, J., J. de Lorenzo y L. Peña (eds.), *Calculemos...: matemáticas y libertad (Homenaje a Miguel Sánchez Mazas)*, Madrid: Trotta, 1996.

Euclides, *Elementos* (3 vols.), Madrid: Gredos, 1991–1996.

Evans, G., y J. McDowell (eds.), *Truth and Meaning: Essays in Semantics*, Oxford: Clarendon Press, 1976 (reimp. 1999).

Ewald, W. B. (ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (2 vols.), Oxford: Oxford University Press, 1996.

Feferman, S., *In the Light of Logic*, Nueva York: Oxford University Press, 1998.

Field, H., *Science without Numbers: A Defence of Nominalism*, 2nd. rev. ed. (with a substantial new preface presenting the author's current views and responses to the issues raised in the subsequent debate), Oxford: Oxford University Press, 2016.

Field, H., *Realism, Mathematics and Modality*, Oxford: Blackwell, 1989 (reimp. 1991).

Ferrater Mora, J., *Diccionario de Filosofía* (1ª ed. actualizada, 4 vols.), Barcelona: Ariel, 1994 (reimp. 2001).

Ferrater Mora, J., G. Henrik von Wright, N. Malcolm y D. Pole, *Las filosofías de Ludwig Wittgenstein* (eds.), *Las filosofías de Ludwig Wittgenstein*, Barcelona: Oikos-Tau, 1966.

Fraenkel, A. A., Y. Bar-Hillel y A. Levy, *Foundations of Set Theory* (2ª ed.), Amsterdam: North-Holland, 1973 (reimp. 1984).

Frege, G., *Nachgelassene Schriften*, Hamburgo: Felix Meiner, 1969.

Frege, G., *Los fundamentos de la aritmética: investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*, Barcelona: Laia, 1970.

Frege, G., *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Y otros estudios filosóficos*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1972.

Frege, G., *Escritos lógico-semánticos*, Madrid: Tecnos, 1974.

Frege, G., *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Oxford: Blackwell, 1977.

Frege, G., *Posthumous Writings*, Londres: Blackwell, 1979.

Frege, G., *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Oxford: Blackwell, 1980.

Frege, G., *Investigaciones lógicas*, Madrid: Tecnos, 1984.

Frege, G., *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*, Madrid: Tecnos, 1998.

Friend, M., *Introducing Philosophy of Mathematics*, Stocksfield (Reino Unido): Acumen, 2007.

Galileo Galilei, *El ensayador*, Buenos Aires: Aguilar, 1981.

Galileo Galilei, *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*, Buenos Aires: Losada, 2003 (y con distinta traducción, bajo el título *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Madrid: Editora Nacional, 1976).

Garciadiego Dantan, A. R., *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de conjuntos*, Madrid: Alianza, 1992 (ed. en inglés en Basel: Birkäuser, 1992).

Garrido, M., *Lógica simbólica*, 4ª ed., Madrid: Tecnos, 2001 (reimp. 2003).

Garrido, M. (ed.), *Lógica y lenguaje*, Madrid: Tecnos, 1989.

Garrido Garrido, J., *Verdad matemática: una introducción a los fundamentos de la matemática*, Madrid: Nivola, 2003.

Geach, P., y M. Black (eds.), *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Oxford: Blackwell, 1977.

Gibson, J. J., *La percepción del mundo visual*, Buenos Aires: Infinito, 1974.

Gibson, J. J., *The Ecological Approach to Visual Perception*, Londres: Houghton Mifflin, 1979 (reimp. en Londres: Erlbaum, 1986).

Gillies, D. A., *Frege, Dedekind and Peano on the Foundations of Arithmetic*, Assen (Holanda): van Gorcum, 1982.

Grattan-Guinness, I. (ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630—1910: una introducción histórica*, Madrid: Alianza, 1984.

Gödel, K., *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los* Principia Mathematica *y sistemas afines*, Oviedo: KRK, 2006.

Gödel, K., *Collected Works* (5 vols.), Oxford: Oxford University Press, 1986—2003.

Gödel, K., *Obras completas* (2ª ed.), Madrid: Alianza, 1989.

Gödel, K., *Ensayos inéditos*, Barcelona: Mondadori, 1994 (ed. en inglés en Basel: Birkhäuser, 1995).

Grattan-Guinness, I. (ed.), *Companion Encyclopedia of the History and the Philosophy of the Mathematical Sciences* (2 vols.), Londres: Routledge, 1994.

Gutiérrez Cabria, S., *Filosofía de la probabilidad*, Valencia: Tirant lo Blanch, 1992.

Gutiérrez Cabria, S., *Filosofía de la estadística*, Valencia: Universidad de Valencia, 1994.

Hale, B., *Abstract Objects*, Oxford: Blackwell, 1987.

Hale, B., y C. Wright, *The Reason's Proper Study: Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 2001.

Hallett, M., *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford: Clarendon Press, 1984 (reimp. 1996).

Halmos, P. R., *Teoría intuitiva de conjuntos*, México D.F.: Continental, 1965 (reimp. 1984).

Hart, W. D. (ed.), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 1996.

Heijenoort, J. van (ed.), *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge (MA.): Harvard University Press, 1967 (reimp. 1999).

Hellman, G., *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation*, Oxford: Clarendon Press, 1989.

Heyting, A., *Introducción al intuicionismo*, Madrid: Tecnos, 1976.

Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vols., Berlín: Springer, 1932–1935 (reimp. en Bronx (N.Y.): Chelsea, 1965).

Hilbert, D., *Pensamiento axiomático*, Caracas: Universidad Central de Venezuela, 1978.

Hilbert, D., *Fundamentos de la geometría*, Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1991.

Hilbert, D., *Fundamentos de las matemáticas*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1993.

Hilbert, D., y W. Ackermann, *Elementos de lógica teórica*, Madrid: Tecnos, 1962.

Hume, D., *Tratado de la naturaleza humana. Autobiografía* (2 vols.), Madrid: Editora Nacional, 1981.

Hunter, G., *Metalógica*, Madrid: Paraninfo, 1981.

Irvine, A. D. (ed.), *Physicalism in Mathematics*, Dordrecht: Kluwer, 1990.

Irvine, A. D. (ed.), *Philosophy of Mathematics*, Amsterdam: Elsevier, 2007.

Jacquette, D. (ed.), *Philosophy of Mathematics: An Anthology*, Oxford: Blackwell, 2002.

Kitcher, P., *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford: Oxford University Press, 1982 (reimp. 1985).

Kline, M., *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*, Madrid: Siglo XXI, 1985.

Kline, M., *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días* (3 vols.), Madrid: Alianza, 1992.

Koetsier, T., *Lakatos' Philosophy of Mathematics: A Historial Approach*, Amsterdam: North-Holland, 1991.

Körner, S., *Introducción a la filosofía de la matemática*, México D.F.: Siglo XXI, 1967.

Kripke, S., *Wittgenstein: A propósito de reglas y lenguaje privado: Una exposición elemental* , Madrid: Tecnos, 2006 (y en traducción anterior, de peor calidad, bajo el título *Wittgenstein: Reglas y lenguaje privado*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1989).

Kuhn, T., *La estructura de las revoluciones científicas*, Madrid: Fondo de Cultura Económica, 1987.

Lakatos, I., *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*, Madrid: Alianza, 1986.

Lakatos, I., *Escritos filosóficos, vol. 1: La metodología de los programas de investigación científica*, Madrid: Alianza, 1983.

Lakatos, I., *Escritos filosóficos, vol. 2: Matemáticas, ciencia y epistemología*, Madrid: Alianza, 1999.

Linnebo, Ø., *Philosophy of mathematics*, Princeton (N.J.: Princeton University Press, 2017.

Lorenzo, J. de, *La filosofía de la matemática de H. Poincaré*, Madrid: Tecnos, 1974.

Lorenzo, J. de, *Filosofía de la matemática fin de siglo XX*, Valladolid: Universidad de Valladolid, 2000.

Lorenzo, J. de, *Fundamentos y enigmas de la matemática: de Kant a Frege*, Valladolid: Universidad de Valladolid, 2010.

Machover, M., *Set theory, logic and their limitations*, Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

Maddy, P., *Realism in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 1990 (reimp. 1992).

Maddy, P., *Naturalism in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 1997.

Mancosu, P. (ed.), *From Brouwer to Hilbert: the Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford: Oxford University Press, 1998.

Marín, A., *Incógnitas, variables y otros fantasmas matemáticos*, Pamplona: Universidad Pública de Navarra, 2006.

Michaels, C. F., y C. Carello, *Direct Perception*, Londres: Prentice-Hall, 1981.

Mill, J. S., *A System of Logic*, Honolulu (HI.): University Press of the Pacific, 2002.

Mosterín, J., *Teoría axiomática de conjuntos* (2ª ed.), Barcelona: Ariel, 1980.

Mosterín, J., *Los lógicos*, Madrid: Espasa, 2000.

Mosterín, J., y R. Torretti, *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia*, Madrid: Alianza, 2002.

Moore, A. W., *The Infinite* (2ª ed.), Londres: Routledge, 2001.

Morton, A., y S. P. Stich, *Benacerraf and his Critics*, Oxford: Blackwell, 1996.

Nagel, E., P. Suppes y A. Tarski (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the 1960 International Congress*, Stanford (CA.): Stanford University Press, 1962.

Nagel, E., y J. R. Newman, *El teorema de Gödel*, Madrid: Tecnos, 1970.

Newman, J. R. (ed.), *Sigma: el mundo de las matemáticas* (6 vols.), Barcelona: Grijalbo, 1969.

Parsons, C., *Mathematics in Philosophy: Selected Essays*, Ithaca (N.Y.): Cornell University Press, 1983.

Pascoe, L. C., *Matemática moderna*, Madrid: Pirámide, 1985.

Peano, G., *Los principios de la aritmética: expuestos según un nuevo método*, Oviedo: Pentalfa, 1979.

Poincaré, H., *Ciencia y método*, Madrid: Espasa Calpe, 1963.

Poincaré, H., *Filosofía de la ciencia*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1978.

Poincaré, H., *Ciencia e hipótesis*, Madrid: Espasa Calpe, 2002.

Pólya, G., *Matemáticas y razonamiento plausible*, Madrid: Tecnos, 1966.

Popper, K., *La lógica de la investigación científica*, Madrid: Tecnos, 1982.

Popper, K., *Conjeturas y refutaciones: el desarrollo del conocimiento científico*, Barcelona: Paidós, 1994.

Putnam, H., *Philosophy of logic*, Nueva York: Harper & Row, 1971.

Putnam, H., *Philosophical Papers, vol. 1: Mathematics, Matter and Method* (2ª ed.), Cambridge: Cambridge University Press, 1979 (reimp. 1985).

Putnam, H., *Words and Life*, Cambridge (MA.): Harvard University Press, 1994.

Quine, W. v. O., *Desde un punto de vista lógico*, Barcelona: Ariel, 1962 (reimp. en Barcelona: Orbis, 1984).

Quine, W. v. O., *Filosofía de la lógica*, Madrid: Alianza, 1973.

Quine, W. v. O., *Teorías y cosas*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1986.

Reichenbach, H., *Experience and Prediction: An Analysis of the Foundations and the Structure of Knowledge*, Chicago (IL.): The University of Chicago Press, 1938 (reimp. 1976).

Reichenbach, H., *Elements of Symbolic Logic*, Nueva York: Macmillan, 1947 (reimp. 1966, y en otra en Londres: Constable, 1980).

Reid, C., *Hilbert*, Berlín: Springer, 1970.

Resnik, M. D., *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Ithaca (N.Y.): Cornell University Press, 1980.

Resnik, M. D., *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford: Clarendon Press, 1997.

Russell, B., *Obras completas*, vol. 2: *Ciencia y filosofía: 1897–1919*, Madrid: Aguilar, 1973.

Russell, B., *La evolución de mi pensamiento filosófico*, Madrid: Alianza, 1982.

Russell, B., *Introducción a la filosofía matemática*, Barcelona: Paidós, 1988 (reimp. 2002).

Russell, B., *Los principios de la matemática*, Barcelona: Círculo de Lectores, 1995 (contenido, también, con la misma traducción, en el vol. 2 de las *Obras completas*, pp. 379–820; y editado anteriormente, con una traducción menos lograda, en Buenos Aires: Espasa Calpe, 1948, 3ª ed. Madrid: Espasa Calpe, 1977).

Satne, G., *El argumento escéptico: de Wittgenstein a Kripke*, Buenos Aires: Grama Ediciones, 2005.

Schirn, M. (ed.), *The Philosophy of Mathematics Today*, Oxford: Clarendon Press, 1998.

Shanker, S. G., *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, Londres: Croom Helm, 1986 (reimp. en Londres: Routledge, 2000).

Shanker, S. G. (ed.), *Ludwig Wittgenstein: Critical Assessments, vol. 3: From the Tractatus to Remarks on the Foundations of Mathematics: Wittgenstein on the Philosophy of Mathematics*, Londres: Croom Helm, 1986.

Shapiro, S., *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-order Logic*, Oxford: Clarendon Press, 1991 (reimp. 2000).

Shapiro, S., *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford: Oxford University Press, 1997 (reimp. 2000).

Shapiro, S. (ed.), *Intensional Mathematics*, Amsterdam: North-Holland, 1985.

Shapiro, S. (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford: Oxford University Press, 2005.

Steiner, M., *Mathematical Knowledge*, Ithaca (N. Y.): Cornell University Press, 1975.

Steiner, M., *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Cambridge (MA.): Harvard University Press, 1998.

Stigt, W. P. van, *Brouwer's Intuitionism*, Amsterdam: North-Holland, 1990.

Troelstra, A. S., y D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics: An Introduction* (2 vols.), Amsterdam: Norht-Holland, 1988.

Turing, A. M., H. Putnam y D. Davidson, *Mentes y máquinas*, Madrid: Tecnos, 1985.

Tymoczko, T. (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Basel: Birkhäuser, 1985 (2ª ed. rev. en Princeton (N.J.): Princeton University Press, 1998).

Weyl, H., *Filosofía de la matemática y de la ciencia natural*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1965.

Whitehead, A. N., y B. Russell, *Principia Mathematica* (2ª ed., 3 vols.), Cambridge: Cambridge University Press, 1925–1927 (reimp. 1973).

Whitehead, A. N., y B. Russell, *Principia Mathematica: hasta el *56*, Madrid: Paraninfo, 1981.

Wittgenstein, L., *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, Madrid: Alianza, 1987.

Wittgenstein, L., *Investigaciones filosóficas*, Barcelona: Crítica, 1988 (ed. bilingüe alemán-español).

Wittgenstein, L., *Gramática filosófica*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1992.

Wittgenstein, L., *Ocasiones filosóficas*, Madrid: Cátedra, 1997.

Wittgenstein, L., *Tractatus Logico-Philosophicus*, Madrid: Tecnos, 2002 (también disponible con otras dos traducciones distintas, de peor calidad pero ambas en ed. bilingüe alemán-español: la de Madrid: Revista de Occidente, 1957, reimp. en Madrid: Alianza, 1980, y la de Madrid: Alianza, 1987).

Wright, C., *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, Londres: Duckworth, 1980 (reimp. en Aldershot (Hampshire): Ashgate, 1994).

Wright, C., *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen: Aberdeen University Press, 1983.

Índice general

La crisis de fundamentos

Módulo 2: *El logicismo*

El programa logicista de Frege

Otras propuestas logicistas

Módulo 3: *El formalismo*

Las bases del método formal axiomático

El convencionalismo en filosofía de la matemática

Módulo 6: *El empirismo y otras corrientes actuales en filosofía de la matemática*

La tesis de indispensabilidad

El cuasi-empirismo metodológico

Otras propuestas empiristas

Otras corrientes actuales en filosofía de la matemática