Manual del curso

FILOSOFÍA DE LA CIENCIA APLICADA

La crisis de fundamentos (Una introducción a la filosofía de la matemática contemporánea)

PROF. GUSTAVO FERNÁNDEZ DÍEZ PICAZO

Curso 2022–2023

Universidad de Murcia

Índice abreviado

MÓDULO 1

La crisis de fundamentos

Introducción

§ 1.1. Objetivos y ámbito de la asignatura (enfoque "no historicista" y no técnico). El objetivo de esta asignatura es analizar la *crisis de fundamentos* en filosofía de la matemática que se produjo a principios del siglo XX, así como la posterior configuración del debate, a lo largo de ese siglo y comienzos del siguiente, entre las principales corrientes enfrentadas. En este análisis vamos a involucrar, por consiguiente, a las más importantes escuelas, teorías y reflexiones acerca de la naturaleza de la matemática, desde finales del siglo XIX hasta principios del siglo XXI. El resultado será una visión panorámica de la filosofía de la matemática durante los últimos 150 años; es decir, una vision panorámica de la filosofía de la matemática de nuestro tiempo.

El ámbito de la presente asignatura se circunscribe así a les principales autores y textos que están presentes en el debate actual sobre filosofía de la matemática. Ello incluye, por un lado, a autores en activo, que están actualmente protagonizando dicho debate; y por otro, a aquelles autores y textos que son "clásicos recientes" (es decir, que se toman como referencia en el debate actual, y con los que se dialoga en el mismo).

Así por ejemplo, estudiaremos las contribuciones de Frege (1848–1925) o Quine (1908–2000), porque son influencia palpable en la filosofía de la matemática de Crispin Wright (1942–) o Penelope Maddy (1950–). Pero dejaremos fuera de la asignatura a figuras anteriores, como Kant o Stuart Mill, que fueron referentes para la filosofía de la matemática de Frege, por ejemplo, pero que en la literatura especializada de hoy en día aparecen citados de forma mucho más esporádica.

Ello no significa que minimicemos la importancia de esas otras figuras, más antiguas, de la historia de la filosofía. La aportación de esas figuras anteriores puede ser valorada y reivindicada, pero en asignaturas de orientación *histórica*.

También hay que advertir que se ha hecho un tratamiento de la asignatura completamente simplificado, y "no técnico"; es decir, de tal forma que el texto sea inmediatamente accesible, sin requerir conocimientos previos de ninguna otra materia universitaria (ni siquiera de matemáticas, más allá de las impartidas en la enseñanza primaria). Asimismo, la exposición de las distintas teorías filosóficas se hace a un nivel sumamente elemental, limitándonos a repasar las principales propuestas y los principales argumentos que caracterizan a cada una. Detrás de esa presentación básica que aparece aquí, hay una cantidad ingente de matices, desarrollos especializados, réplicas y contrarréplicas, que han quedado fuera de la asignatura, a fin de mantener ésta en unas dimensiones asequibles, que permitan desarrollarla íntegramente en un cuatrimestre.

Por último, hay que advertir también que vamos a dedicar una atención mayor a aquellas obras que hayan sido traducidas al castellano, y a aquellas propuestas sobre las que dispongamos de estudios, manuales o monografías en nuestra lengua. Así facilitamos el apoyo del aprendizaje en otros materiales didácticos en los que ampliar conocimientos.

§ 1.2. Bosquejo general de los contenidos. La asignatura va a comenzar presentando el punto de vista *platónico* en filosofía de la matemática. El platonismo, en su versión rudimentaria, constituye sin duda la concepción más inmediata, y quizá también la más extendida, sobre la naturaleza del conocimiento matemático. Esta filosofía fue defendida notablemente por Gödel en la primera mitad del siglo XX, y en la segunda mitad ha sido reivindicada en versiones más sofisticadas, como las de Charles Parsons y Mark Steiner.

Una vez introducido el platonismo, y todavía dentro de este Módulo 1, haremos una breve descripción del episodio histórico que se conoce como la "crisis de fundamentos". Se trata de la crisis que da título a la asignatura y le sirve de eje central, por lo que las referencias a la misma serán continuas a todo lo largo de este manual.

Como estudiaremos en detalle en su momento, tras aquella crisis el debate en filosofía de la matemática quedó configurado en tres escuelas principales, las llamadas *"escuelas clásicas"* (o *"escuelas fundacionales"*): el *logicismo*, el *formalismo*, y el *intuicionismo*. Estas tres escuelas condensaron el trabajo de investigación y reflexión filosófica sobre los fundamentos de la matemática en las primeras décadas del siglo XX.

En el presente curso les vamos a dedicar un capítulo a cada una de ellas, como es habitual en el tratamiento de estos temas. Así, el Módulo 2 está dedicado al logicismo, representado principalmente por los matemáticos y filósofos Gottlob Frege y Bertrand Russell. Y más recientemente, por filósofos como Bob Hale y Crispin Wright, que han llevado a cabo una reformulación laboriosa y de interés indudable.

En el Módulo 3 nos ocuparemos de la escuela formalista, capitaneada por el gran matemático David Hilbert, y que décadas después tuvo un defensor tenaz en la figura de Michael Detlefsen. Y en el Módulo 4 hablaremos del intuicionismo, creado por el matemático holandés Brouwer, continuado por su discípulo Arend Heyting, y más recientemente defendido con nuevos argumentos por el filósofo Michael Dummett.

A continuación, dedicaremos el Módulo 5 a hablar sobre las posiciones *convencionalistas* en filosofía de la matemática, que también han tenido un protagonismo grande durante el pasado siglo. En particular, haremos una excursión introductoria en la filosofía de la matemática de Wittgenstein, que está claramente relacionada con el convencionalismo, o al menos lo inspira, y ha tenido un eco sonado, como toda la obra de este autor.

Por último, el Módulo 6 se ocupa del *empirismo en filosofía de la matemática*. Esta doctrina fue relanzada a partir de 1950 por filósofos como Willard Quine o Imre Lakatos, con propuestas muy diferentes. Y más recientemente ha estado representada por Hilary Putnam, Philip Kitcher o Penelope Maddy, también con propuestas muy distintas entre sí.

Al final de ese Módulo 6, y ya para terminar la asignatura, dedicaremos un último apartado a tratar brevemente sobre otras dos corrientes recientes de reconocida importancia, pero a las que no dedicaremos tanta extensión como para asignarles módulos propios. La primera de estas corrientes es el *nominalismo*, defendido por una parte por Charles Chihara, y por otra, en una contribución enormemente original y compleja, por Hartry Field. Y la segunda es el *estructuralismo*, representado en diferentes versiones por Paul Benacerraf, Michael Resnik, Stewart Shapiro y Geoffrey Hellman.

Se ha dicho con razón que las últimas décadas del siglo XX han conocido un auténtico renacimiento de la filosofía de la matemática, tanto por la aparición de nuevas defensas y reformulaciones de las escuelas fundacionales, como por el surgimiento de propuestas y corrientes totalmente distintas, algunas de ellas de notable originalidad. En este curso daremos cuenta de ello.

Ahora bien, hay que tener presente que la recepción de estas nuevas aportaciones, no está ni mucho menos tan asentada como la de las tres escuelas clásicas de principios de siglo. Y como consecuencia, su etiquetado, catalogación y descripción general de sus propuestas, resulta más provisional y discutible, a diferencia de lo que ocurre con las escuelas clásicas, para las que existen criterios comunes de amplia aceptación. Por ello no es de extrañar que en la bibliografía sobre filosofía de la matemática encontremos clasificaciones de las corrientes recientes muy distintas entre sí, y distintas a su vez de la empleada en esta asignatura.

§ 1.3. Enfoque "no personalista" de la filosofía. En esta asignatura vamos a cultivar un enfoque de la filosofía que podríamos llamar *"no personalista"*, y que se resume básicamente en lo siguiente: nuestra prioridad serán los problemas filosóficos, las teorías elaboradas para abordarlos y los argumentos a favor y en contra de las distintas teorías; y *no* serán prioritarias cuestiones como la correcta interpretación de autores, la búsqueda de coherencia en el conjunto de contribuciones de une autore, la influencia de une autore en otre, las disputas por prioridades históricas, etc.

En una palabra: lo que nos interesará en esta asignatura no serán, primordialmente, les autores (les filósofes), sino las teorías, las reflexiones y los argumentos filosóficos. De ahí la denominación que propongo, de enfoque "no personalista".

Un ejemplo de orientación personalista lo tenemos en una biblioteca de filosofía cuyos libros están ordenados por autores, esto es, por personas, en vez de por materias o por corrientes filosóficas. Otro ejemplo es una monografía dedicada a estudiar el conjunto de la obra filosófica de una determinada persona. Por el contrario, un ejemplo de orientación no personalista nos lo ofrecen las revistas de filosofía que excluyen expresamente la publicación de artículos exegéticos.

De acuerdo con nuestro modo de enfocar las cosas, si en el transcurso de esta asignatura hacemos una afirmación como, por ejemplo:

> "el representante por excelencia del platonismo puro en la filosofía de la matemática contemporánea es Kurt Gödel"

se entenderá que las mejores formulaciones —o la mejor defensa— del platonismo puro en la filosofía de la matemática contemporánea se encuentran en la obra de Gödel. Es decir, que la mejor defensa de esa particular doctrina, dentro de la filosofía de la matemática contemporánea, se ha de encontrar entre los escritos publicados por Kurt Gödel.

Pero con ello *no* querremos implicar, y tampoco nos detendremos a analizar con más detalle, cuestiones como si Gödel se consideraba platónico o no, si en otros lugares de su obra expresa opiniones discordantes con ésa, si una interpretación más sofisticada descubre aspectos ocultos en esos escritos, o si el verdadero mérito no hay que atribuirlo a Gödel, sino a otra obra anterior en la que Gödel se inspirara.

Tales cuestiones podrán aparecer ocasionalmente como comentario marginal, al igual que pueden mencionarse, de pasada, algunos datos biográficos u otras curiosidades históricas. Pero no dejaremos que protagonicen nuestra discusión en primer plano.

Este enfoque no personalista está en obvia sintonía con el enfoque no historicista que expusimos antes, y de acuerdo con el cual nos centramos en los debates actuales y sus precedentes inmediatos, evitando ahondar en la prehistoria de las cuestiones tratadas. *A los problemas mismos, sin distracciones*, podría ser el eslogan que nos inspira a la hora de adoptar estos dos enfoques.

§ 1.4. Filosofía de la matemática y filosofía de la ciencia. ¿Qué es la filosofía de la matemática? Pues la rama de la filosofía que recoge todas aquellas teorías y reflexiones sobre la naturaleza, contenido y fundamento epistemológico del conocimiento matemático. Es decir, todas aquellas teorías y reflexiones que tratan sobre qué es el conocimiento matemático, cuál es la entidad de los objetos matemáticos, cómo podemos conocer cosas acerca de estos objetos, cómo podemos referirnos a ellos, etc.

La filosofía de la matemática forma parte, por consiguiente, de lo que se denomina *"filosofía de la ciencia"*. Y la filosofía de la ciencia, a su vez, abarca toda la reflexión filosófica que se hace en torno a la ciencia (es decir, en torno a la parte más rigurosa, importante y sofisticada del conocimiento humano). Por lo tanto, la filosofía de la matemática es como tal una filosofía de la ciencia *aplicada*. Al igual que hay *filosofía de la física*, *filosofía de la biología*, *filosofía de la economía*, etc.

Ahora bien, comparada con las otras aplicaciones de la filosofía de la ciencia, la filosofía de la matemática ocupa una posición singular, debida a la propia diferencia existente entre la actividad matemática y el resto de disciplinas científicas. Así por ejemplo, salta a la vista que dos ocupaciones centrales del trabajo científico como son la *observación* y la *experimentación*, están ausentes de la investigación matemática, o si intervienen, lo hacen de una forma muy particular y sui géneris. La persona que investiga en matemáticas no dispone de laboratorios, ni sale de su gabinete para realizar *trabajo de campo*.

Y como consecuencia de ello, muchos de los problemas de la filosofía general de la ciencia, como son la *inducción empírica* (esto es, la confirmación de hipótesis por la experiencia), la *predicción*, la diferencia entre *teórico* y *observacional* o el acaecimiento de *revoluciones científicas*, apenas han sido objeto de atención por parte de la filosofía de la matemática.

solo una corriente filosófica, aunque importante (el empirismo en filosofía de la matemática), propugna que la matemática es también una ciencia empírica que debe ser asimilada al resto de las ciencias. Y aún así, la mayoría de quienes defienden esta postura admiten la singularidad de los problemas de la filosofía de la matemática respecto al resto de problemas de los que trata la filosofía de la ciencia.

§ 1.5. La filosofía de la matemática como disciplina. La filosofía de la matemática constituye un campo incierto, sobre el que sabemos muy poco. Como dice el filósofo español Jesús Mosterín,

> "seguimos sin saber bien lo que hacemos, cuando hacemos matemáticas."
> (Mosterín, *Los lógicos*, p. 160.)

En consecuencia, no existe un tratamiento unificado de la materia, que pudiera servir como referencia básica para un curso universitario de las características del nuestro. Lo que hay son teorías filosóficas enfrentadas entre sí, y argumentos en favor o en contra de unas u otras.

Nótese que estamos hablando de la *filosofía de la matemática* y no de la matemática propiamente dicha. La incertidumbre y la falta de paradigma son características de la reflexión filosófica acerca de la matemática, no de la matemática en sí, que tiene una tradición solvente y consolidada desde hace más de dos mil años.

Lo que ocurre, parafraseando la cita de Mosterín, es que "sabemos hacer matemáticas de forma notable, pero *seguimos sin saber bien qué es lo que hacemos*, cuando hacemos matemáticas".

Por lo demás, la falta de certidumbre en filosofía de la matemática es una característica general de las disciplinas filosóficas. Y según una opinión bastante extendida, dicha incertidumbre constituye en realidad una característica *definitoria* de las disciplinas filosóficas como tales. Así, sucede con frecuencia que, en la historia de una disciplina, es precisamente cuando ésta empieza a alcanzar cierto de grado de madurez, que se la deja de calificar como filosófica, y se le otorga nombre propio y consideración independiente.

En consecuencia, es obvio que al abordar las distintas materias filosóficas que estudiamos en el Grado, tenemos que hacerlo a través de distintas escuelas y teorías filosóficas enfrentadas, ninguna totalmente convincente. Ante tal situación, no cabe sino avivar el espíritu crítico, la capacidad reflexiva, y eso sí, adquirir un conocimiento fresco, actualizado y detallado sobre las mejores líneas argumentales existentes en cada campo concreto.

§ 1.6. Ontología, epistemología, semántica. Ontología, epistemología y semántica son tres frentes habituales de la investigación filosófica que suelen estar íntimamente relacionados.

Por hacer una descripción a vuela pluma, la *ontología* investiga las condiciones generales de la existencia de las cosas y del acaecer de los hechos, y es objeto tradicional de aquella disciplina filosófica denominada *"metafísica"*. La *epistemología* investiga las condiciones de nuestro conocimiento, y la rama de la filosofía que trata de ella se llama *"teoría del conocimiento"*. Y por último, la *semántica* trata de cómo es posible que hablemos, o nos refiramos, a cosas y hechos, y cómo es posible que nuestros enunciados sobre el mundo puedan resultar verdaderos o falsos. La semántica trata, en definitiva, de los significados de nuestras palabras y de las condiciones de existencia de nuestro lenguaje, por lo que entra dentro de lo que se denomina *"filosofía del lenguaje"*.

Se suele admitir que durante el siglo XX, la perspectiva semántica gozó de una preeminencia con respecto a las otras dos, precisamente debido a la influencia de Frege. Se trata del llamado *"giro lingüístico"*, que convirtió al lenguaje en el terreno en el que se centraba la discusión de los problemas filosóficos, o muchos de ellos. Dicha preeminencia se encuentra ya en declive, posiblemente a favor de la perspectiva epistemológica, que es la que está pasando cada vez más a un primer plano. Volveremos a esto en el módulo siguiente, al explorar la propuesta de Frege.

Pues bien, en la propia filosofía de la matemática existen también una ontología, una epistemología, y una semántica, aplicadas específicamente a las realidades matemáticas. La tensión entre ellas, así como la conexión con problemas filosóficos más generales, habrán de dar mucho juego a lo largo de toda la asignatura.

§ 1.7. Objetos, propiedades y hechos. Otra distinción muy presente en esta asignatura es la que cabe trazar entre *objetos*, *propiedades* y *hechos*. Un objeto, por ejemplo, es la Luna. Una propiedad de la Luna es *ser esférica*; otra propiedad de la Luna es *tener un diámetro de 3.500 km.* Y hechos acerca de la Luna son, por ejemplo, el hecho de que la Luna sea esférica, el hecho de que la Luna tenga un diámetro de 3.500 km., o el hecho de que la Luna gire alrededor de la Tierra.

Las *relaciones*, por su parte, están al mismo nivel que las propiedades, pero involucran varios objetos. Así por ejemplo, la Tierra y la Luna se encuentran relacionadas al *ser la Luna satélite de la Tierra.* O al *tener la Luna una masa 81 veces menor que la Tierra.* O por la relación de *encontrarse la una de la otra a una distancia media de 380.000 km*, etc.

Pues bien, llamaremos *"término"* a cualquier expresión lingüística que utilicemos para referirnos a un objeto o a una colección de objetos. Así por ejemplo, "Luna" es un término; la expresión "el único satélite natural de la Tierra" es un término; la expresión "los satélites de Venus" también constituye un término, etc.

Nótese lo importante que resulta utilizar las comillas para diferenciar los términos de aquellos objetos que los términos denotan. Así, hablamos del término "Luna", y de él podemos decir con verdad que es una palabra castellana y que consta de 4 letras. Mientras que de la propia Luna no podemos decir que tenga letras. La diferencia entre la "Luna" (palabra) y la Luna (satélite) es enorme, y el uso de comillas nos ha de servir para resaltarla.

A su vez, llamamos *"predicado"* a cualquier expresión lingüística que nos sirva para denotar propiedades o relaciones. Por ejemplo: "ser esférico", "tener un diámetro de 3.500 km.", "girar alrededor de", "tener una masa 81 veces menor que", etc.

Y llamamos *"enunciado"* (o más exactamente, *"enunciado declarativo"*), a aquel acto de habla mediante el cual exponemos un hecho. Por ejemplo, cuando decimos: "la Luna es esférica", "la Luna tiene un diámetro de 3.500 km.", "la Luna gira alrededor de la Tierra", etc.

Nótese nuevamente lo importante del uso de comillas para resaltar que estamos hablando de predicados (o de enunciados, en su caso), en lugar de las propiedades o hechos expresados por ellos.

La filosofía de la matemática, en fin, estudia el estatuto y naturaleza de los objetos matemáticos, así como de las propiedades, relaciones y hechos en los que éstos participan.

En algunas ocasiones, la distinción entre unos y otros aparecerá con gran relevancia. Por ejemplo, cuando discutamos sobre si los números deben ser categorizados como objetos singulares, o bien como propiedades organizadas de una determinada manera. Pero esto es algo excepcional. En general, la distinción entre objetos, propiedades y hechos quedará implícita, no la traeremos a colación de una manera expresa.

Y en este sentido, mientras no se advierta lo contrario, los argumentos y reflexiones que en cada filosofía de la matemática se apliquen a una de estas categorías, se entenderá que valen también, convenientemente adaptados, para las otras. Así por ejemplo, en breve presentaremos el platonismo en filosofía de la matemática como aquella doctrina según la cual los objetos matemáticos tienen una existencia independiente de la mente humana. Pues bien, se entenderá (y no hará falta decir expresamente) que, según esa doctrina, las propiedades y relaciones de los objetos matemáticos son también independientes de la mente humana, y que los hechos matemáticos son asimismo independientes de la mente humana.

Y así con el resto de teorías y posiciones que se caractericen a lo largo del curso.

§ 1.8. Teorías, teoremas y axiomas. En matemáticas, como en cualquier otra ciencia, se elaboran teorías sobre los diferentes objetos de estudio (como por ejemplo los números, el espacio, la probabilidad, etc). Sin embargo, a diferencia de lo que pasa en otras ciencias, los resultados que se obtienen en matemáticas suelen estar basados en razonamientos categóricos, muy concluyentes.

Pues bien, a tales razonamientos se les conoce como *"pruebas"*, o *"demostraciones"*, y a los resultados así obtenidos se les conoce como *"teoremas"*. Un teorema matemático, por consiguiente, es un "hecho" que la comunidad matemática da como cierto a partir de una determinada demostración.

Por último, es de reseñar que muchas veces, aunque no siempre, las teorías matemáticas se estructuran a partir de unas proposiciones básicas, que se admiten sin demostración y que se llaman *"postulados"*, o *"axiomas"*. De las teorías así estructuradas decimos que están *"axiomatizadas"*. Y en tales teorías, como es natural, los teoremas se derivan mediante demostraciones a partir de los axiomas. En el Módulo 3 haremos una introducción, muy superficial, a la axiomatización de dos teorías matemáticas fundamentales: la geometría y la aritmética.

§ 1.9. Nota sobre las referencias bibliográficas. Los datos de edición de todos libros mencionados en este manual se encuentran en la *Bibliografía general* que aparece al final (p. 125). Salvo que se indique otra cosa, las traducciones que se utilizan para las citas de textos en otros idiomas son las correspondientes a las ediciones allí mencionadas (y cuando hay varias, especifico cuál de ellas he utilizado para la traducción).

He tratado de restringir las citas y las recomendaciones bibliográficas a obras que estén disponibles en alguna de las bibliotecas de nuestra universidad, especialmente en la Biblioteca Luis Vives. En aquellas citas en que esto no ha sido posible, proporciono una fuente secundaria que sí es accesible, y donde aparecen citados los fragmentos en cuestión.

Las expresiones en cursiva de los textos citados son siempre las que aparecen en la edición original. Las expresiones acotadas entre corchetes, sin embargo, son añadidos aclaratorios al texto fuente. Los números de página corresponden, en cada caso, a la edición reseñada en la *Bibliografía*; y si hay varias, a la que aparece citada en primer lugar.

Por último, la abreviatura "cf.", que utilizo con frecuencia, significa *confrontar*, y es equivalente al "véase"; "s.", o "ss.", junto a un número de página, significan *y siguiente*, o *y siguientes*, respectivamente; y otras abreviaturas utilizadas, como por ejemplo "secc." para *sección*, etc., son evidentes, y se entenderán sin dificultad.

§ 1.10. Recomendaciones bibliográficas generales. Entre los principales libros publicados sobre filosofía de la matemática destaca la compilación de Benacerraf y Putnam, en inglés, que es la antología más citada en esta materia. Asimismo son importantes las compilaciones más recientes de Hart, Irvine, y Jacquette, también en inglés.

La única revista en lengua inglesa, y con amplia difusión internacional, que está exclusivamente dedicada a la filosofía de la matemática, es *Philosophia Mathematica*, editada en Canadá desde 1964, a cuya versión electrónica está suscrita nuestra universidad. En castellano hubo una parecida, *Mathesis*, publicada en México entre 1985 y 1994 (y después números sueltos en 2006 y 2007), y cuyo ámbito cubría simultáneamente la filosofía y la historia de la matemática. Esta se encuentra disponible en papel, casi completa, en la Hemeroteca de Ciencias Sociales, aneja a nuestra Biblioteca Luis Vives.

En cuanto a los manuales sobre la materia, en inglés destacan el de Michèle Friend y (sobre todo) el de Øystein Linnebo; y en castellano, los de Alcolea, Cañón Loyes y Javier de Lorenzo (2000), así como el de Dou y el de Garrido Garrido (2003), estos dos de carácter algo más técnico.

Por último, es de destacar la serie *Cambridge Elements in the Philosophy of Mathematics*, inaugurada por Cambridge University Press en 2018. Son libritos cortos, muy autorizados, con títulos como *A Concise History of Mathematics for Philosophers* (de John Stillwell), *Ontology and the Foundations of Mathematics* (de Penelope Rush), *Semantics and the Ontology of Number* (de Eric Synder), *Mathematics and Metaphilosophy* (de Justin Clarke-Doane), *Paraconsistency in Mathematics* (de Zach Weber) y otros títulos que se recomiendan en distintos módulos de este manual.

El platonismo puro en filosofía de la matemática

§ 1.11. La oposición entre realismo e idealismo en diferentes ámbitos. Una postura *realista* aplicada a un objeto determinado es la que defiende que ese objeto existe realmente, de forma exterior e independiente de la mente humana. Una postura *idealista* (o *"antirrealista"*), por el contrario, es aquella según la cual el objeto en cuestión es una ficción, un mero producto de nuestro pensamiento.

En este sentido, una concepción realista acerca de *El Quijote*, por ejemplo, sería aquella según la cual existió realmente un Alonso Quijano "el Bueno", de las características que describió Cervantes, y en el que Cervantes se habría inspirado para escribir su novela.

Y una concepción idealista de *El Quijote*, por el contrario, es aquella según la cual Alonso Quijano es una pura invención de Cervantes, así como las andanzas y aventuras que le suceden y que aparecen relatadas en esa obra. Es decir: una concepción idealista de *El Quijote*, en la acepción que estamos comentando aquí, es aquella según la cual Don Quijote ha existido sola y exclusivamente en la mente de Cervantes y en la mente de les lectores de Cervantes.

La filosofía se ha ocupado a lo largo de su historia, y se sigue ocupando con frecuencia, de la oposición entre estas dos posturas enfrentadas: la postura realista y la postura idealista. Y no ya aplicadas a un objeto particular, sino a diferentes abanicos de objetos o de fenómenos (es decir, a diferentes ámbitos de nuestro discurso).

Por ejemplo, la filosofía se ha ocupado del dilema entre realismo e idealismo aplicado a los enunciados sobre el pasado; a los enunciados sobre el futuro; a las entidades teóricas de la ciencia; a los juicios morales; a los juicios estéticos; a los objetos abstractos; a Dios; a la existencia de otras mentes; a la existencia del mundo exterior en su conjunto; y así un largo etcétera.

La discusión sobre cada uno de estos ámbitos responde a criterios y a argumentos distintos, específicos para cada uno. Y es coherente, en principio, adoptar una posición realista con respecto a algunos de ellos e idealista con respecto a otros (véase por ejemplo Dummett, "El realismo" y "La realidad del pasado", en su libro *La verdad y otros enigmas*, pp. 220–242 y 447–464 respectivamente.)

§ 1.12. Vertientes epistemológica y semántica de la oposición entre realismo y antirrealismo. Además de la vertiente puramente ontológica, que es la que se refiere a la existencia (o inexistencia) de los objetos en cuestión, la oposición entre realismo y antirrealismo tiene dos vertientes más: una vertiente epistemológica y una vertiente semántica.

Así por ejemplo, una visión realista de *El Quijote* en su vertiente epistemológica, consistiría en afirmar que nosotres tenemos conocimiento efectivo acerca del propio Don Quijote (Alonso Quijano El Bueno), conocimiento que hemos adquirido a partir del texto que nos legó Cervantes. Mientras que una visión antirrealista, por el contrario, afirmaría que nosotres no conocemos realmente a ningún Don Quijote (puesto que nunca existió, según esta postura), sino que lo que conocemos es la construcción del personaje ficticio inventado por Cervantes, junto con las características recreadas por Cervantes acerca del mismo.

En cuanto a la vertiente semántica, una postura realista consistiría en afirmar que el término "Don Quijote" refiere a la persona real de aquel Alonso Quijano, que sería, según esta postura, un hidalgo manchego de su tiempo. Mientras que la postura antirrealista diría que ese término solo sirve para hacer referencia a la construcción inventada por Cervantes en su novela.

Así pues, el significado de la expresión "Don Quijote" aparece como algo muy distinto según adoptemos uno punto de vista u otro: en el primer caso denota una persona real, que existió en su época; en el segundo caso denota una pura invención de la mente.

Del mismo modo, bajo la postura realista tiene sentido afirmar, por ejemplo, que:

"O bien Don Quijote tenía una abuela llamada Isabel, o bien no la tenía" (1)

En efecto, esto tiene sentido bajo la suposición de que estamos haciendo mención de una persona real, que necesariamente tendría unas abuelas con determinados nombres, independientemente de que nosotres podamos llegar a conocer algún día cómo se llamaban, y si "Isabel" era o no el nombre de alguna de ellas.

Mientras que, por el contrario, si adoptamos la concepción antirrealista, entonces la afirmación (1) queda en entredicho, porque bajo esta concepción Don Quijote es una mera ficción inventada por Cervantes, y Cervantes no dejó ninguna indicación en su novela acerca de los posibles nombres de las abuelas que tuviera su personaje.

§ 1.13. El platonismo en filosofía de la matemática. Salta a la vista, evidentemente, que el debate entre realismo e idealismo es muy pertinente cuando se aplica a los objetos de la matemática (es muy pertinente debatir sobre si los objetos matemáticos son objetos reales o meras ideas de nuestro pensamiento). Y en efecto, dicho debate ha protagonizado gran parte de las discusiones en filosofía de la matemática desde la Antigüedad.

Pues bien, a la concepción realista en filosofía de la matemática (es decir, a la concepción según la cual los objetos matemáticos tienen una existencia real, exterior e independiente de la mente humana), es a la que se denomina tradicionalmente *"platonismo en filosofía de la matemática"*. Esto afecta a los distintos objetos matemáticos, como los números, las funciones, las operaciones, los conjuntos, las figuras geométricas, etc: todos estos objetos existen de forma independiente de nosotres, según esta concepción. Y en una versión extrema de esta propuesta, la existencia de los objetos matemáticos no es solo independiente de la mente humana, sino eterna y absoluta, al estilo de la que describió Platón para su *mundo de las ideas*.

De un modo similar, el platonismo en filosofía de la matemática defiende también que los *"hechos matemáticos"* acerca de esos objetos (es decir, las propiedades que tienen, las relaciones que se dan entre ellos, las distintas verdades matemáticas que expresan los teoremas, etc.), son también realidades objetivas que se dan de forma exterior e independiente de la mente humana.

Así pues, según el platonismo en filosofía de la matemática, cuando alguien realiza correctamente una suma, como "$2 + 2 = 4$", lo que está haciendo es describir la realidad matemática. Al igual que cuando alguien dice "La capital de Francia es París", lo que hace es describir correctamente la realidad geopolítica de la nación vecina; o cuando alguien dice "ácido + base = sal + agua", lo que hace es describir correctamente el resultado de una reacción química; o cuando alguien dice "rojo + amarillo = naranja", lo que hace es decribir correctamente el resultado de una mezcla de colores. Pues bien, la investigación matemática consiste, según esta postura, en *descubrir* nuevos objetos matemáticos y nuevos hechos acerca de esos objetos.

Aquí tenemos que tener cuidado con un matiz terminológico que puede jugarnos malas pasadas: la posición platónica en filosofía de la matemática, es según estamos viendo, una forma de realismo *acerca del ámbito de los objetos matemáticos*. Sin embargo, por la naturaleza esencialmente abstracta de esos objetos, se puede considerar también que esta posicion es una instancia de "idealismo filosófico", ya que otorga la máxima carga de realidad a entidades a primera vista ideales. Es decir, se puede considerar que el platonismo en filosofía de la matemática es un "idealismo", por el hecho de postular que los objetos matemáticos tienen una existencia real, comparable a la de las sillas y las mesas.

Para evitar malentendidos en este contexto, debemos tener la precaución de mencionar siempre esta forma de realismo como "realismo acerca de las entidades matemáticas", con todas sus letras. O bien, sencillamente, utilizar la expresión "platonismo en filosofía de la matemática", denominación inconfundible y de uso consolidado, que es la que se utilizará preferentemente en este manual.

§ 1.14. Platonismo ontológico, epistemológico y semántico. Además de la vertiente ontológica, que se refiere a la existencia de los objetos matemáticos, el platonismo tiene también una vertiente epistemológica y una vertiente semántica.

Según la vertiente epistemológica del platonismo, nosotres podemos conocer los objetos matemáticos, al menos parcialmente, pero de tal forma que nuestro conocimiento de los mismos no les afecta. Es decir, tenemos lo que se denomina *"acceso epistemológico"* a los objetos matemáticos, pero la existencia de estos objetos y sus propiedades son independientes de nuestra forma de acceso a los mismos.

Según la vertiente semántica del platonismo, por su parte, nosotres podemos referirnos a los objetos matemáticos, pero la existencia de estos es independiente de los mecanismos mediante los cuales nosotres nos referimos a ellos. Y del mismo modo, nosotres podemos describir, al menos parcialmente, los hechos en los que los objetos matemáticos están involucrados, pero el acaecer de esos hechos es independiente de que nosotres seamos capaces de describirlos o no.

De acuerdo con esto, por consiguiente, cualquier enunciado matemático tiene un valor de verdad predeterminado (*verdadero* o *falso*), según que lo expresado por el enunciado corresponda o no con la realidad del mundo matemático. Y ello ha de valer para todos los enunciados matemáticos, incluyendo aquellos de los que no conocemos el valor de verdad ni tenemos idea de cómo averiguarlo.

§ 1.15. El platonismo logicista. El platonismo en filosofía de la matemática está representado por tres corrientes distintas, bien diferenciadas. Éstas son el logicismo, el empirismo en filosofía de la matemática y por último el platonismo puro, que es al que está dedicado el presente apartado.

El logicismo, por decirlo de forma muy resumida, considera que los objetos matemáticos son *"objetos lógicos"*, es decir, objetos que existen por necesidad lógica, o cuya existencia se postula por razones de necesidad lógica.

Por "lógica", en este contexto, se viene a entender las leyes más básicas y generales que regulan nuestro razonar y discurrir. Tales leyes constriñen u obligan a ciertas cosas, como por ejemplo, a rechazar que puedan ser verdaderos un enunciado y su negación (*principio de no contradicción*). Por poner un caso, los enunciados "está lloviendo" y "no está lloviendo" no pueden ser verdaderos referidos a un mismo lugar y a un mismo tiempo, y esto es algo que sabemos por razones lógicas (es decir, se trata de algo que sabemos sin necesidad de asomarnos a la ventana para comprobarlo).

Pues bien, las leyes de la lógica, según el logicismo, nos obligan también a postular la existencia de los objetos matemáticos, o por lo menos algunos de ellos.

El módulo siguiente está dedicado a presentar esta corriente filosófica, por lo que será entonces cuando tengamos ocasión de incidir con más detalle en su planteamiento.

§ 1.16. El platonismo empirista. En la corriente empirista, por su parte, la existencia los objetos matemáticos se mantiene por razones bien distintas. En efecto, para les empiristas en filosofía de la matemática, los objetos matemáticos son objetos empíricos, es decir, objetos que forman parte de nuestro mundo físico real, de un modo lejanamente análogo al de las sillas y las mesas.

Lo que ocurre, según esta corriente filosófica, es que los objetos matemáticos representan un grado de abstracción muy alto sobre esa realidad física inmediata. Y esa es la razón por la que tendemos a no catalogarlos como parte de la misma.

Ya en la ciencia física, por ejemplo, así como en las otras ciencias, se postula la existencia de numerosas *entidades teóricas*, como la *fuerza de la gravedad*, *el centro de masa*, *el calor específico* o el *campo electromagnético*. Estas entidades corresponden a cosas que no vemos, pero que resultan necesarias para formular las leyes mediante las cuales explicamos los fenómenos observables.

Pues bien, los objetos matemáticos, según el empirismo en filosofía de la matemática, están un paso más allá en ese grado de abstracción de la realidad física que nos rodea. Y según esta corriente, debemos considerar a los objetos matemáticos como parte integrante de dicha realidad, por la sencilla razón de que nos resultan necesarios para dar una descripción completa y satisfactoria de la misma.

También al empirismo se le dedica un capítulo propio en esta asignatura, el Módulo 6, por lo que será entonces el momento para analizar detenidamente los fundamentos y distintas variantes de esta doctrina.

§ 1.17. Esencia del platonismo puro en filosofía de la matemática. Por último, la corriente en la que vamos a detenernos en el presente apartado es el *"platonismo puro"*, que a veces se llama también *"platonismo extremo"* o *"platonismo no adulterado"*. Esta corriente constituye la expresión más básica y rudimentaria del platonismo en filosofía de la matemática.

El platonismo puro postula la existencia de un universo separado, eterno e independiente del mundo físico y de la mente humana, en el cual se encuentran los objetos matemáticos, configurados con todas sus propiedades y relaciones entre ellos. El representante por excelencia de esta posición en la filosofía de la matemática contemporánea es Kurt Gödel. Gödel fue un matemático austriaco, después nacionalizado estadounidense, cuyas contribuciones a la lógica se encuentran entre las más importantes de todo el siglo XX.

Otro ejemplo notable de platónico puro fue el matemático alemán de origen ruso Georg Cantor. Cantor fue el creador de la teoría de conjuntos, que desempeña un papel esencial en el campo de los fundamentos de la matemática y de la que volveremos a hablar enseguida.

Otro ejemplo, mucho más incidental, es el matemático Paul Halmos, quien en una entrevista afirma:

> "¿Cómo pienso en los objetos matemáticos? ¿Tienen una existencia independiente de ti y de mí? Sé la respuesta. Sé la respuesta con absoluta seguridad. Sí. Tú no los inventaste, yo no los inventé. Tú y yo no tenemos nada que ver con las cuestiones matemáticas, con los conceptos matemáticos, con los enunciados matemáticos. Si yo fuera creyente, diría que Dios los inventó. Él nos da las preguntas, y si él quiere (y piensa que nos lo merecemos), nos permite encontrar las respuestas".
> (P. Halmos, *I Want to Be a Mathematician: A Conversation with Paul Halmos*, https://youtu.be/lMRuwV8WgD0, minuto 42, ligeramente modificado)

Efectivamente, según el platonismo puro (y dejando al margen la alusión religiosa), los objetos matemáticos tienen una existencia independiente sin más, en una especie de mundo aparte o *"universo platónico"*. Un universo en el que se encuentran los objetos matemáticos, configurados con todas sus propiedades y con todas las relaciones entre ellos, de forma sustantiva y eterna. Un universo al que a veces nos "asomamos", como si fuera por una rendija, para descubrir cosas sobre esos objetos.

El platonismo puro es la concepción más inmediata acerca del conocimiento matemático, entre otras razones porque la propia jerga o idiolecto matemático nos induce en cierto modo a ello. En efecto, el uso lingüístico habitual en matemáticas, en los diferentes idiomas, tiende al platonismo: se da a los objetos matemáticos el mismo tratamiento gramatical que a los objetos físicos, se habla de "descubrir" sus propiedades y las relaciones entre ellos, etc.

Sin embargo, el platonismo puro resulta difícil de defender como teoría filosófica. Y ello es así, como veremos enseguida, principalmente a causa de esa "rendija" por la que se supone que logramos conectarnos con el universo matemático. El principal punto débil de esta doctrina, en efecto, es la vía de acceso epistemológico que se supone que que estaríamos utilizando para obtener conocimiento del universo platónico matemático.

Y es que la tarea de especificar en qué consiste esa vía de acceso epistemológico resulta extraordinariamente complicada. Y por ende, la tarea de argumentar la existencia de ese universo separado, que solo conocemos a través de tan dudosa vía, resulta a su vez extraordinariamente ardua.

Además del problema de justificar la vía de acceso epistemológico al universo matemático, el platonismo puro tiene otra dificultad considerable a tener en cuenta, y es la de explicar la ubicua aplicabilidad de la matemática en el resto de las ciencias. ¿A qué se debe la aplicabilidad y la fertilidad de la matemática en el resto de las ciencias, y en especial en la física, si el contenido sobre el que la matemática versa es un universo aparte, que nada tiene que ver con el mundo espacio-temporal del que tratan aquéllas?

§ 1.18. Difusión y virtudes del platonismo puro. Sea como sea, el caso es que el platonismo puro constituye seguramente la concepción más extendida sobre la naturaleza del conocimiento matemático. En efecto, es la concepción que subyace a muchísimos textos y tratados de matemáticas, y es la concepción de las matemáticas que se suele infundir en la enseñanza primaria y secundaria.

Además, el platonismo puro es también la filosofía tácita que subyace al trabajo de investigación de muches matemátiques en activo (sobre todo de quienes se dedican exclusivamente a hacer matemáticas, sin haberse detenido a indagar seriamente sobre los fundamentos epistemológicos y filosóficos de aquello que hacen).

Se trata, en definitiva, de una filosofía muy sugestiva a la imaginación, y es por ello que resulta válida en sus funciones *propedéutica* (para facilitar la enseñanza) y *heurística* (para facilitar la investigación). Y es más: desde la mayor parte de filosofías rivales se la considera *inocua*, en cuanto están dispuestas a aceptar que les matemátiques en activo sigan trabajando bajo el prisma del platonismo puro, aunque este no constituya la verdadera sustentación filosófica de su tarea, porque piensan que ello no afectará a su producción matemática *per se* (es decir, piensan que no afectará a sus resultados en el desempeño de esa tarea).

Solo hay una escuela que es activamente combativa contra el "platonismo dominante", achacándole un daño profundo sobre la orientación de la investigación matemática y sus resultados. Se trata del intuicionismo, del que hablaremos en el Módulo 4.

§ 1.19. Conjeturas matemáticas no decididas: la infinitud de los primos gemelos. Un indicador característico de las distintas filosofías de la matemática, y en particular del platonismo puro, es su forma de situarse ante las conjeturas matemáticas no decididas.

En matemáticas, una conjetura no decidida es cualquier cuestión que no se haya conseguido resolver ni afirmativa ni negativamente. Es lo que se llama también un *"problema abierto"*.

Vamos a poner algunos ejemplos sencillos, pertenecientes a la *aritmética*. La aritmética (o *teoría elemental de números*) es aquella parte de las matemáticas que se ocupa del estudio de los *números naturales* y sus propiedades. Los números naturales son sencillamente los que utilizamos para contar:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad \ldots$$

y así hasta el infinito. Si omitimos el 0 y consideramos únicamente de 1 en adelante, entonces hablamos de los *"números enteros positivos"*.

Una de las distinciones básicas que estudia la aritmética es la que hay entre números *primos* y números *compuestos*. En efecto, de entre los números naturales, llamamos "primos" a aquellos que no son divisibles más que por la unidad y sí mismos (por ejemplo el 7, el 11 ó el 13). Mientras que al resto de números naturales los llamamos "compuestos". El 8, por ejemplo, es compuesto, ya que es divisible por 2 y por 4. También es compuesto el 9, que se puede dividir por 3. Y también el 15, ya que se puede dividir por 3 y por 5. Aquí estamos considerando, naturalmente, la división exacta, "sin resto".

En resumidas cuentas: entre los números naturales hay algunos que son primos y otros que no. Y para hacernos una idea podemos contemplar la siguiente tabla, donde aparecen destacados todos los números primos que se dan entre el 2 y el 99:

2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14	15
16	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**
30	**31**	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40	**41**	42	**43**
44	45	46	**47**	48	49	50	51	52	**53**	54	55	56	57
58	**59**	60	**61**	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70	**71**
72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80	81	82	**83**	84	85
86	87	88	**89**	90	91	92	93	94	95	96	**97**	98	99

Ahora nos podemos plantear la siguiente pregunta: ¿serán los números primos *infinitos*, o habrá algún momento en el que se agoten, y ya no aparezca ningún primo más? O dicho de otro modo: ¿existe algún número natural, suficientemente grande, a partir del cual ya no haya ningún número primo mayor?

He ahí una típica cuestión matemática. En este caso se encuentra ya decidida, ni más ni menos que por el matemático egipcio Euclides, en el siglo III antes de Cristo. En efecto, Euclides demostró que los números primos *son* infinitos, es decir: que hay números primos cada vez mayores, y su aparición no se agota nunca. Esta demostración es sencilla, pero no la vamos a incluir aquí (se puede consultar en Euclides, *Elementos*, Libro IX, Proposición 20, pp. 226–227 del vol. 2 de la edición de Gredos; y explicada en lenguaje más actual, en Davis y Hersh, *Experiencia matemática*, p. 59).

A continuación nos vamos a fijar en aquellas parejas de primos conocidas como *"primos gemelos"*. Los primos gemelos son parejas de números primos separados por 2 unidades, o dicho de otro modo, números primos que aparecen "en parejas" (como el 11 y el 13, el 17 y el 19, o el 59 y el 61). Mientras que los otros números primos (es decir, los "no gemelos") aparecen salteados, sin tener a otro número primo pegadito. Ejemplos de números primos que no forman parte de una pareja de primos gemelos son el 23, el 67 ó el 79.

Naturalmente, una cosa es que haya infinitos números primos, y otra cosa muy distinta es que haya, en particular, infinitos primos *gemelos* (es decir, que haya infinitos números primos de este tipo particular, que aparece en parejas).

Ahí pues surge una nueva pregunta: ¿habrá infinitos números primos gemelos, o bien llegará un momento en que se agoten, y ya no aparezca ninguna pareja más? O dicho de otro modo: ¿existe algún número natural suficientemente grande, a partir del cual ya no haya ninguna pareja de primos gemelos mayores que él?

He aquí otra una típica conjetura matemática, pero en este caso pertenece a las *no decididas*. En efecto, nadie ha conseguido demostrar, hasta la fecha, si los primos gemelos son infinitos o no. No se sabe. La conjetura de la infinitud de los primos gemelos es un problema matemático abierto.

§ 1.20. El surtido inagotable de conjeturas matemáticas. La matemática es una ciencia viva, y continuamente se están resolviendo cuestiones de este tipo. En algunos casos, se resuelven cuestiones que habían sido investigadas durante siglos.

Eso sí, es preciso tener muy claro que jamás se conseguirán resolver *todas* las conjeturas o cuestiones matemáticas abiertas. Y ello sucede por dos razones muy poderosas, que son las siguientes.

En primer lugar, la cantidad de cuestiones abiertas en matemáticas es infinita, y el planteamiento de cuestiones nuevas es prácticamente inagotable. En efecto, siempre se nos puede ocurrir proponer nuevas cuestiones, para lo cual basta muchas veces con utilizar pequeñas variantes a partir de una cuestión dada. Por ejemplo, modificando la cuestión sobre la infinitud de los números primos, podemos preguntar: ¿existen infinitos números primos que terminen en "3"? ¿Y en "7"? ¿Y en "37"? ¿Y en "137"? etc.

Y en segundo lugar, sabemos positivamente que nunca se conseguirá diseñar un procedimiento mecánico para obtener soluciones a todos los problemas matemáticos. Es decir, nunca conseguiremos automatizar *completamente* el razonamiento matemático. Esto es algo que ha sido demostrado de una forma absolutamente rigurosa y definitiva, como tendremos ocasión de comentar en el Módulo 3.

§ 1.21. Las conjeturas no decididas bajo el platonismo puro. Pues bien, desde la perspectiva del platonismo puro, se considera que todas las conjeturas matemáticas tienen ya una solución predeterminada, independientemente de que nosotres la lleguemos a conocer algún día o no. Es decir, se considera que todas las conjeturas matemáticas tienen una solución dada, determinada por la propia configuración del universo matemático (por "cómo sea realmente" ese universo).

Así, los números primos son infinitos, según esto, porque en el universo matemático *hay* infinitos números primos; al igual que en el Patio de los Leones de la Alhambra hay 124 columnas, al igual que la capital de Francia es París, al igual que al reaccionar un ácido con una base se obtiene sal y agua.

Y en cuanto a los *primos gemelos*, serán infinitos o no, según esta postura, dependiendo de si en el universo matemático hay infinitos primos gemelos o no. La respuesta está ya determinada en ese universo, según esta postura, aunque nosotres no lleguemos a conocerla jamás. Y otro tanto se aplica a cualquier otra conjetura matemática abierta.

§ 1.22. La intuición matemática. En matemáticas hay algunos enunciados que nos parecen intuitivamente verdaderos, hay otros que nos parecen intuitivamente falsos, y finalmente, hay enunciados que no nos parecen ni intuitivamente verdaderos ni intuitivamente falsos.

Estamos hablando de una intuición en sentido "fuerte", esto es, como aquella impresión que, cuando se produce, nos proporciona una seguridad muy grande sobre la verdad del enunciado al que se refiere.

Así por ejemplo, un enunciado que parece intuitivamente verdadero es aquel que dice "todo número natural tiene un siguiente" (un *sucesor*). Es decir, que al igual que detrás del 3 va el 4, detrás del 4 va el 5 y detrás del 5 va el 6, pues detrás de cualquier otro número natural, por grande que sea, habrá a su vez otro que le siga, un inmediato mayor. Este enunciado tiene, intuitivamente, una apariencia de verdad muy fuerte.

También parece intuitivamente verdadero, en este sentido, el enunciado conocido como *"principio del número menor"*, el cual dice que "todo conjunto no vacío de números naturales tiene un menor número". En otras palabras: que dado cualquier conjunto de números naturales, mientras no se trate de un conjunto vacío, habrá un número que constituya el más pequeño de los pertenecientes a ese conjunto. (Veremos algunas pegas al respecto de este principio en el Módulo 4, pero de momento es pronto para preocuparnos por eso.)

Y por su parte, parece intuitivamente falso afirmar que "no todo número tiene un sucesor" (el opuesto al principio del sucesor); y parece intuitivamente falso afirmar que "la suma de dos números pares siempre da 0 como resultado".

Sin embargo, no parece intuitivamente verdadero ni intuitivamente falso que entre el 2 y el 99 haya exactamente 25 números primos. Esto es algo que exige comprobación, es algo que exige demostración. Como tampoco parece intuitivamente verdadero ni intuitivamente falso, por ejemplo, que los números primos sean infinitos, cosa que tuvo que demostrar Euclides en su momento. Como tampoco parece intuitivamente verdadero ni intuitivamente falso que los primos gemelos sean infinitos, cosa que a día de hoy nadie ha conseguido demostrar ni refutar.

§ 1.23. La intuición matemática bajo el platonismo puro. Pues bien, la intuición matemática, según el platonismo puro, desempeña el papel de esa "rendija" por la cual nos asomamos al universo matemático. Es decir, la intuición matemática sería el mecanismo a través del cual conseguimos captar información sobre la configuración de ese universo aparte.

Tal captación se produce, según esta teoría, a través de impresiones puntuales, que nos revelan alguna característica parcial de ese universo, como si fuera en una fotografía instantánea o *flash*. Y cada vez que un enunciado matemático nos parece intuitivamente verdadero es, supuestamente, porque se ha producido una captación de estas características.

Mientras tanto, el resto de enunciados matemáticos (es decir, aquellos que no nos parecen intuitivamente verdaderos ni intuitivamente falsos) corresponderían a la parte del universo matemático que no podemos "ver" directamente. Esa parte es la que tenemos que adivinar o reconstruir utilizando los fragmentos que sí conocemos. Y es a dicha "reconstrucción" a partir de los enunciados cuya verdad captamos, a la que llamamos *"prueba"* (o *"demostración"*).

El principal problema de esta explicación, como venimos diciendo, es la dificultad de especificar la naturaleza de ese mecanismo, que teóricamente nos estaría permitiendo obtener conocimiento de un universo separado. ¿Se trata de un *"sexto sentido"*? ¿Tiene una implementación fisiológica en nuestro organismo? ¿Va ligado a una *cadena causal* (cadena de causas físicas), mediante la cual se produzca la transmisión de información en cuestión?

Resulta innegable, desde luego, que existe algún tipo de intuición matemática en el sentido que estamos barajando aquí. Es un hecho que el ser humano, al menos en determinados ambientes culturales, responde a la instrucción matemática, manifestando, según avanza en el proceso de aprendizaje, una concordancia creciente con los contenidos que va a asimilando. No cabe duda, por tanto, de que la intuición matemática está ahí, que desempeña un papel fundamental en el desarrollo de esa ciencia, y que su existencia misma es un hecho que exige una explicación científica clara.

Así como también requiere explicación la ubicuidad de tantas entidades matemáticas fundamentales como hay, que aparecen una y otra vez en contextos enormemente diversos e insospechados. Como el número π, por ejemplo, que resulta ser pieza clave en incontables cuestiones matemáticas de áreas totalmente dispares (geometría, trigonometría, análisis matemático, teoría de números, estadística, probabilidad). O la llamada "identidad de Euler", que muestra una asombrosa relación entre los cinco números más importantes de toda la matemática ($e^{\pi i} + 1 = 0$), y cuya belleza ha sido comparada a los sonetos de Shakespeare.

Pero aun reconociendo estos enigmas, es difícil aceptar que la solución a los mismos pase por postular la existencia de un universo separado, y de todo un mecanismo perceptivo específico que supuestamente nos estuviera conectando con él.

§ 1.24. El platonismo puro en Kurt Gödel. A pesar de su dedicación a los fundamentos de la matemática, y de que conocía perfectamente las alternativas filosóficas existentes en su momento, Gödel se decantó por el platonismo puro, al menos en parte de sus escritos. Y la defensa que hace de esta postura es tan nítida y contundente, que se ha hecho habitual utilizarla como principal referencia de la misma.

Gödel publicó muy poco en vida. Pero a sus publicaciones hay que sumar miles de páginas de manuscritos inéditos, escritos en un antiguo sistema de taquigrafía alemana, buena parte de los cuales están dedicados a la filosofía de la matemática.

En inglés se han completado hasta cinco volúmenes de sus *Collected Works* ("Obras completas"), incluyendo los artículos que publicó mientras vivía, así como parte de sus manuscritos inéditos y la correspondencia conservada.

En español disponemos de una edición de sus *Obras completas* que reúne el conjunto de artículos publicados en vida; así como otra titulada *Ensayos inéditos*, que es una pequeña selección de la parte que había quedado inédita, precedida de un amplio estudio introductorio del profesor Francisco Rodríguez Consuegra.

Entre las contribuciones más destacadas de Gödel a la filosofía de la matemática, se encuentran sus artículos "La lógica matemática de Russell", de 1944, y "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?", de 1947, ambos incluidos en la edición española de sus *Obras completas* (pp. 297–327 y 340–362 respectivamente; y con distinta traducción se ha vuelto a publicar el primero de ellos en la revista *Teorema* 25(2), 2006, pp. 113–137). Así como el texto de la denominada "Conferencia Gibbs", que pronunció en los Estados Unidos en el año 1951, y que está traducido al castellano a su vez, en el mencionado volumen de *Ensayos inéditos* (pp. 149–187).

Incidentalmente, un lugar en los escritos de Gödel en que éste se manifiesta *contrario* al platonismo en filosofía de la matemática, y lo ataca con cierta dureza, es un texto de 1933 que puede leerse en el vol. 3 de las mencionadas *Collected Works*, p. 50 (y comentario por S. Feferman en pp. 39–40).

§ 1.25. Preliminares a las lecturas de Gödel. A continuación vamos a reproducir dos textos en los que Gödel defiende la posición platónica, pertenecientes a dos de las contribuciones que acabamos de mencionar. Para entenderlos correctamente, es conveniente que antes hagamos algunas consideraciones preliminares.

En estos dos textos, y en especial en el primero de ellos, Gödel tiene muy presente la teoría de conjuntos. La teoría de conjuntos es, para decirlo con muy pocas palabras, una teoría matemática fundamental, elaborada a partir de la noción de *conjunto* y la relación de *pertenencia*.

La noción intuitiva de *conjunto* la tenemos todes, como *reunión de cosas*. Por ejemplo, un conjunto de manzanas, un conjunto de ovejas, un conjunto de edificios, etc. Y la *pertenencia* no es más que lo que liga una cosa (manzana, oveja, edificio, o lo que sea) a cada conjunto de cosas del que forma parte.

A partir de estas nociones tan básicas y elementales, se desarrolla una larga disquisición matemática en la que se exploran todas las posibilidades de variación y combinación de estas nociones. Y el resultado es una teoría matemática vasta y compleja, que es la que se conoce con el nombre de "teoría de conjuntos".

La aparición de esta teoría y sus avatares iniciales están íntimamente ligados a la famosa crisis de fundamentos que da título a esta asignatura. En efecto, después de algunos años de trabajo laborioso y fructífero en dicha teoría, se descubrieron *paradojas*, que mostraban que de la teoría se podían derivar distintas contradicciones (esto es, que la teoría era inconsistente, al menos bajo algunas de sus formulaciones). Ello dio lugar a la crisis, como vamos a comentar en detalle muy pronto.

A raíz de aquella crisis, la elaboración de la teoría cambió de rumbo, y empezó a desarrollarse de forma *axiomática* (es decir, partiendo de unos principios muy generales que se toman como axiomas, y derivando la teoría posterior a partir de esos principios). De esta forma se trataba de evitar que surgieran nuevas paradojas, ya que si los nuevos principios básicos eran suficientemente seguros, sería imposible derivar de ellos contradicción alguna.

En el primero de los textos que vamos a reproducir, Gödel menciona también la *"teoría de conjuntos transfinita"*, que no es ni más ni menos que la parte de la teoría de conjuntos que se encarga del estudio de los conjuntos infinitos. En efecto, una de las cosas que se comprueba en teoría de conjuntos es que los conjuntos infinitos no son todos iguales, sino que los hay de distintos tamaños (es decir, que entre los conjuntos infinitos hay algunos de tamaño mayor que otros). El conjunto de los números naturales, en particular, es el más pequeño de todos ellos (el más pequeño de entre los conjuntos infinitos). Una introducción asequible a este tema se puede encontrar en Hunter, *Metalógica*, pp. 31–41.

Y la llamada *"hipótesis del continuo"*, a la que también se refiere Gödel en el primero de estos textos, consiste en una conjetura sobre la existencia de conjuntos de determinados tamaños, intermedios entre unos conjuntos infinitos y otros. Esta es una conjetura que no se puede decidir, por cierto, sobre la base de los axiomas de la teoría.

§ 1.26. Lectura de Gödel ("El problema del continuo"). Uno de los textos clave en los que Gödel expone su filosofía de la matemática es el artículo titulado "¿Qué es el problema del continuo de Cantor?", y que publicó en 1947 el *American Mathematical Monthly.*

Dicho artículo fue incluido en la compilación de Benacerraf y Putnam, *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, cuya 1ª edición apareció en 1964. Para su publicación en dicha compilación Gödel escribió un Suplemento, del cual está tomado el fragmento que reproducimos a continuación.

> "Por otro lado, los objetos de la teoría de conjuntos transfinita (...) está claro que no pertenecen al mundo físico e incluso que su conexión indirecta con la experiencia es muy remota (debido principalmente al hecho de que los conceptos de la teoría de conjuntos tienen un reducido papel en las teorías físicas de hoy).
>
> "Pero, a pesar de su lejanía de la experiencia sensible, tenemos algo parecido a una percepción de los objetos de la teoría de conjuntos, como se puede ver por el hecho de que los axiomas mismos nos fuerzan a aceptarlos como verdaderos. No veo ninguna razón por la cual debamos tener menos confianza en este tipo de percepción, es decir, en la intuición matemática, que en la percepción sensible, que nos induce a construir teorías físicas y a esperar que futuras percepciones sensibles concuerden con ellas y, además, a creer que cuestiones no decidibles por el momento tengan significado y puedan ser decididas en el futuro. Las paradojas de la teoría de conjuntos difícilmente son más preocupantes para la matemática que los engaños de los sentidos para la física. Ya se indicó (...) que pueden darse perfectamente nuevas intuiciones matemáticas que conduzcan a una decisión de problemas tales como la hipótesis del continuo de Cantor.
>
> "Debería observarse que la intuición matemática no tiene que ser concebida como una facultad que proporcione un conocimiento *inmediato* de los objetos que le conciernen. Parece más bien que, como en el caso de la experiencia física, *formamos* también nuestros conceptos de estos objetos a partir de algo más que *es* inmediatamente dado (...) Lo "dado" que subyace a las matemáticas está, evidentemente, muy relacionado con los elementos abstractos contenidos en nuestros conceptos empíricos. De esto no se sigue, sin embargo, que los datos de este segundo tipo sean algo puramente subjetivo, porque no pueden asociarse con acciones de ciertas cosas exteriores a nuestros órganos sensibles (...). Pueden representar más bien un aspecto de realidad objetiva, pero, en oposición a las sensaciones, su presencia en nosotres puede deberse a otro tipo de relación entre la realidad y nosotres mismes.
>
> "La cuestión de la existencia objetiva de los objetos de la intuición matemática (que, incidentalmente, es una réplica exacta de la cuestión de la

existencia objetiva del mundo exterior) no es, sin embargo, decisiva para el problema que aquí discutimos. El mero hecho psicológico de la existencia de una intuición que es lo bastante clara como para producir los axiomas de la teoría de conjuntos y una serie abierta de extensiones de estos basta para dar sentido a la cuestión de la verdad o falsedad de ideas tales como la hipótesis del continuo de Cantor".

(Kurt Gödel, "¿Qué es el problema del continuo de Cantor? — Suplemento", *Obras completas*, pp. 359–361.)

§ 1.27. Lectura de Gödel (Conferencia Gibbs). En 1951, Gödel fue distinguido por la *American Mathematical Society* con la invitación a pronunciar, en su Congreso Anual, la "Conferencia Gibbs" (así llamada en honor del matemático estadounidense Josiah Willard Gibbs). El título de la conferencia fue "Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas", pero el texto se conoce generalmente como "Conferencia Gibbs" a secas.

Se conserva el manuscrito original en inglés, con numerosas tachaduras, reconstruido por Hao Wang para el volumen 3 de las *Collected Works*, y también, de forma independiente, por Rodríguez Consuegra, para la selección en español titulada *Ensayos inéditos.* Es de esta última edición de la que hemos extraído el fragmento siguiente.

> "Sin embargo, me parece que a pesar de ello hay un ingrediente (...) que es perfectamente correcto y de hecho revela la verdadera naturaleza de la matemática. A saber: es correcto proclamar que las proposiciones matemáticas no dicen nada acerca de lo físico o psíquico que exista en el espacio y el tiempo, porque son ya verdaderas en virtud del significado de los términos que aparecen en ellas, con independencia del mundo de las cosas. Lo erróneo, sin embargo, consiste en decir que el significado de los términos (o sea, los conceptos que éstos denotan) sea algo hecho por nosotres y consista meramente en convenciones semánticas. Creo que la verdad es que esos conceptos forman una realidad objetiva por sí mismos, la cual no podemos crear o cambiar, sino solo percibir o describir.
>
> "Por tanto, las proposiciones matemáticas, aunque no digan nada acerca de la realidad espacio-temporal, pueden sin embargo poseer un contenido objetivo sólido, en la medida en que digan algo acerca de las relaciones entre los conceptos.
>
> "(...) nuestro conocimiento del mundo de los conceptos puede ser tan limitado e incompleto como el que tenemos del mundo de las cosas. Es cierto e innegable que este conocimiento es (en ciertos casos), no solo incompleto, sino incluso indiferenciado. Esto tiene lugar en las paradojas de la teoría de conjuntos, que se aducen frecuentemente como una refutación del platonismo, aunque en mi opinión de forma completamente injusta. Nuestras percepciones visuales contradicen a veces nuestras percepciones táctiles, por ejemplo en el caso de una vara inmersa en agua, pero nadie en su sano juicio concluiría de ello que el mundo externo no existe.
>
> (...)

"Una forma posible de psicologismo admite que la matemática investiga las relaciones entre los conceptos, y que los conceptos no pueden crearse a voluntad, sino que nos son dados como una realidad que no podemos cambiar; sin embargo, afirma que tales conceptos son solo estructuras o disposiciones psicológicas en nuestras mentes, es decir, que no son nada, sino las ruedas de nuestra máquina pensante, por así decir (...)

"La esencia de esta concepción psicologista es que el objeto de la matemática no es nada más que el conjunto de leyes psicológicas según las cuales los pensamientos, las convicciones, etc., tienen lugar en nosotres, en el mismo sentido en que el objeto de otra parte de la psicología es el conjunto de leyes según las cuales las emociones tienen lugar en nosotres. La principal objeción a esta concepción que se me ocurre en este momento es que si fuera correcta no poseeríamos conocimiento matemático alguno. No sabríamos, por ejemplo, que $2 + 2 = 4$, sino solo que nuestra mente está constituida de tal forma que acepta la verdad de tal enunciado, y que no habría entonces razón alguna para que, a través de otra línea de pensamiento, no pudiéramos llegar a la conclusión opuesta con el mismo grado de certeza. Por tanto, quienquiera que afirme la existencia de algún dominio, por pequeño que sea, de proposiciones *matemáticas* que *sepamos* ciertas, no puede aceptar esta concepción.

(...)

"Tengo la impresión de que, tras la suficiente clarificación de los conceptos en cuestión, será posible conducir estas discusiones con rigor matemático, y de que el resultado será entonces que (bajo ciertas hipótesis que difícilmente pueden negarse —en particular la hipótesis de que existe absolutamente algo como el conocimiento matemático—) la concepción platónica es la única sostenible. Con ello me refiero a la concepción de que la matemática describe una realidad no sensible, que existe independientemente tanto de los actos como de las disposiciones de la mente humana, y que es solo percibida por ella, aunque probablemente de forma incompleta".

(Kurt Gödel, "Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de la matemática y sus implicaciones filosóficas" (Conferencia Gibbs), *Ensayos inéditos*, pp. 165—169.)

§ 1.28. El dilema de Benacerraf. En 1973, el filósofo francés, profesor de la Universidad de Princeton, Paul Benacerraf, publicó en el *Journal of Philosophy* un artículo titulado "Mathematical truth", que ha tenido una notable influencia en el desarrollo de la filosofía de la matemática en las últimas décadas. Este artículo se encuentra recogido en el ya citado recopilatorio *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, que editó el mismo Benacerraf junto con Hilary Putnam. El artículo fue publicado en castellano en 2004 en la revista *Ágora*.

En dicho artículo, Benacerraf planteó la existencia de una disyuntiva fundamental en cuanto a dos de los objetivos básicos que persigue la filosofía de la matemática. Esta disyuntiva ha acabado siendo conocida como "dilema de Benacerraf", y es la siguiente.

Sin duda, dos de los objetivos básicos de la filosofía de la matemática son la *semántica* y la *epistemología* de las teorías matemáticas. Por una parte, queremos elaborar una buena teoría semántica, que dé cuenta del lenguaje en el que están expresadas las teorías matemáticas. Y por otra, queremos encontrar una explicación epistemológica aceptable, que dilucide la clase conocimiento que tenemos de dichas teorías.

Pues bien: según argumenta Benacerraf, las filosofías ensayadas hasta el momento de escribir su artículo solo habían conseguido cumplir satisfactoriamente uno de estos dos objetivos *a expensas del otro*. Esto es: o bien tenían una buena semántica pero una débil epistemología, o lo contrario, pero ninguna habría conseguido cubrir con éxito los dos frentes.

Asi por ejemplo, el platonismo puro constituye un caso típico de filosofía de la matemática con una buena semántica, al menos aparentemente, pero una mala epistemología. Su semántica tiene de bueno que se adapta perfectamente al uso lingüístico habitual, y por lo tanto, cabe esperar que pueda ser explicada de forma por entero paralela a la del resto del lenguaje natural. Su epistemología es muy poco convincente, como ya hemos argumentado de sobra.

Por el contrario, un ejemplo típico de filosofía de la matemática que proporciona una epistemología aceptable pero falla en la explicación semántica, es la concepción formalista, de la que nos ocuparemos en el Módulo 3. De acuerdo con esta otra concepción, para decirlo con pocas palabras, la matemática es una mera manipulación de símbolos (o se debe representar como una mera manipulación de símbolos), sometidos a un complejo conjunto de reglas, convenientemente especificado.

La concepción formalista exige reconstruir las distintas teorías matemáticas de tal modo que se explicite el entramado de reglas que corresponde a cada una. Y después de efectuada la reconstrucción, el significado de los términos matemáticos pasa a ser una complicada función relacionada con el entramado de reglas correspondiente. El resultado es farragoso, muy alejado del uso lingüístico habitual que hacemos de esos términos en las matematicas de andar por casa.

Sin embargo, la fundamentación epistemológica de la matemática bajo la concepción formalista es excelente, porque la sencilla razón de que no hay compromiso ninguno con la existencia de los objetos matemáticos ni de entidades abstractas. En efecto, como veremos en su momento, bajo esta concepción las teorías matemáticas se sustentan básicamente en la constatación de que determinadas manipulaciones simbólicas concuerdan con las reglas prefijadas, y punto.

He aquí por tanto dos filosofías de la matemática, platonismo y formalismo, que ejemplifican el dilema descrito por Paul Benacerraf: una de ellas consigue una buena semántica a cosa de la epistemología, y en la otra sucede exactamente lo contrario.

El dilema de Benacerraf ha constituido un notable acicate para la investigación en filosofía de la matemática en las últimas décadas. En efecto, han sido varies les filósofes que han tenido como motivación de su trabajo el deseo expreso de salvar ese escollo, tratando de confeccionar una teoría filosófica que cumpla satisfactoriamente los dos objetivos en cuestión. Así por ejemplo, cabe citar a Hartry Field (*Science without Numbers*, p. 98 y p. 126, Nota 66), Philip Kitcher (*The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 59), Penelope Maddy (*Realism in Mathematics*, pp. 36–45) o Michael Resnik (*Mathematics as a Science of Patterns*, p. 83), autores a quienes trataremos en el Módulo 6 (cf. § 6.11–§ 6.14 y § 6.18–§ 6.19). Y también a Mark Steiner, de quien nos vamos a ocupar inmediatamente.

Hasta qué punto el dilema de Benacerraf siga vigente (es decir, hasta qué punto se ha conseguido formular una filosofía de la matemática que cumpla satisfactoriamente los dos objetivos señalados por Benacerraf) es algo incierto, abierto a debate. Como tampoco ha faltado quien haya recusado el dilema desde el principio, tachándolo de "falso dilema" o "dilema inexistente", por razones en las que no entraremos aquí (véase, por ejemplo, Maddy, P., "Perception and intuition in mathematics", en la compilación de W. D. Hart (ed.) *The Philosophy of Mathematics*, pp. 114–141).

§ 1.29. El platonismo en Mark Steiner. En el mismo año y revista en que apareció el artículo de Benacerraf, se publicó también un artículo de Mark Steiner, titulado "Platonism and the causal theory of knowledge", después reimpreso con leves modificaciones en su libro de 1975, *Mathematical Knowledge*.

Steiner fue el primero en reaccionar al reto de Benacerraf (que ya conocía por versiones del trabajo previas a la publicada), identificándolo específicamente como un "dilema" y proponiéndose la tarea de resolverlo. Además, Steiner emprende una reivindicación del platonismo gödeliano, si bien en una versión ciertamente suavizada, que tiene diferencias importantes con respecto a la posición que acabamos de ver en el lógico austriaco.

Steiner parte de la consideración de la intuición matemática como "una facultad, análoga a la percepción sensorial, para adquirir conocimiento matemático" (*Mathematical Knowledge*, p. 121). Propone un estudio empírico serio de dicha facultad, para avanzar en nuestro conocimiento de la misma, y puntualiza que a través de esta percepción no se captarían objetos matemáticos individuales, sino *estructuras matemáticas* en su conjunto (p. 134). Así por ejemplo, no se podría obtener una captación aislada del número 2 como objeto individual, pero sí de la estructura de los números naturales con su relación de orden entre ellos, y dentro de esa estructura al número 2, ocupando el lugar que le corresponde.

En un libro más reciente, publicado en 1998, Steiner afronta a su vez el problema de la utilidad de la matemática para la ciencia natural: *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*. En este libro Steiner plantea una *"hipótesis empírica"* de alto nivel para justificar el empleo que se hace de la matemática en el resto de las ciencias, a saber: la coincidencia entre las principales categorías cognitivas del ser humano y la estructura fundamental del universo en el que vivimos.

Así pues, afirma Steiner,

> "el nuestro parece ser un universo intelectualmente asequible, un universo que permite a nuestra especie descubrir cosas sobre él"
> (Steiner, *The Applicability*, p. 8.)

Y ello explicaría que aplicando nuestras categorías cognitivas (y en especial, los conceptos matemáticos) a la realidad que nos rodea, hayamos obtenido un éxito tan notable en física y en el resto de las ciencias naturales.

La tesis de fondo que subyace a esta filosofía es claramente *antropocéntrica*: el universo está estructurado de alguna manera en armonía con la especie humana, que se encuentra en una situación "privilegiada" para conocer la esencia de las cosas (*The Applicability*, p. 55).

Sin embargo, hay que hacer notar que esta forma de platonismo tiene cierto corte *psicologista*, del tipo del que rechazaba Gödel en la Conferencia Gibbs. En efecto, los objetos matemáticos aparecen como un reflejo, aunque muy elaborado, de la estructura de nuestras propias facultades cognitivas. Y ello hace que, estrictamente hablando, no sean *"independientes"* de la mente humana. Aunque tampoco constituyan construcciones deliberadas que podamos manejar a voluntad, ya que sus patrones fundamentales vendrían dados por la propia constitución fisiológica de nuestro sistema cognitivo.

Otro autor que ha defendido el platonismo en una línea cercana, y en el que Steiner se inspira en buena medida, es Charles Parsons, cuyos principales ensayos están recopilados en su libro *Mathematics in Philosophy: Selected Essays*, de 1983.

La crisis de fundamentos

§ 1.30. Antecedentes de la crisis. La crisis de fundamentos en filosofía de la matemática fue un episodio histórico que se produjo a principios del siglo XX, y que tuvo una gran influencia en el posterior desarrollo de esta disciplina filosófica.

No vamos a hacer en este apartado sino un bosquejo breve y superficial de dicha crisis, y ello es así por dos razones: en primer lugar, porque las ulteriores aclaraciones y referencias a la misma serán constantes a todo lo largo del manual; y en segundo lugar, porque una explicación rigurosa exigiría conocimientos de teoría de conjuntos, análisis matemático y lógica, que no cabe presuponer al conjunto de estudiantes de esta asignatura.

En cualquier caso, durante el siglo XIX se produjeron tres antecedentes fundamentales que contribuyeron, en mayor o menor medida, a crear las circunstancias históricas en las que tuvo lugar la crisis de fundamentos: la llamada *"aritmetización del análisis"*, la creación de la teoría de conjuntos por parte de Cantor y la aparición de la moderna lógica matemática de Frege. A continuación vamos a detenernos brevemente en cada una de estas tres cuestiones.

§ 1.31. La aritmetización del análisis. La aritmetización del análisis consistió en un esfuerzo progresivo por perfeccionar el rigor en las definiciones y demostraciones matemáticas a lo largo del siglo XIX, y que culminó con la reducción de los diversos *campos numéricos* a los números naturales y a determinadas combinaciones de números naturales. (Véase por ejemplo Grattan-Guinness, *Del cálculo a la teoría de conjuntos*, pp. 125—193; o Collette, *Historia de las matemáticas*, vol. 2, pp. 342—385.)

Efectivamente, en matemáticas se investigan varios tipos de números, además de los números naturales que ya conocemos. Entre ellos se encuentran, por ejemplo: los números *negativos* (como el -1, el -2, el -3, etc.), los números *fraccionarios* (como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{5}$, etc.), y otros aún más intrincados (como el número π, que está entre los llamados *"irracionales"*, o $\sqrt{-1}$, que está entre los denominados *"imaginarios"*).

Al estudio de todos estos tipos de números y de las operaciones entre ellos se dedica el llamado *"análisis matemático"*, que es la continuación natural de la aritmética, o teoría elemental de números. (Una introducción asequible a los distintos campos numéricos puede verse en Pascoe, *Matemática moderna*, pp. 13–19.)

Pues bien: todos esos tipos de números, de los primeros a los últimos, se pueden representar exclusivamente en términos de números naturales y combinaciones de números naturales. Así se consiguió demostrar en el siglo XIX. Precisamente de esta época es la frase que se atribuye al matemático alemán Leopold Kronecker: "Dios hizo los números naturales, todo lo demás es obra del ser humano" (cf. McCarty, "Constructivism in Mathematics", pp. 319–320, en la compilación de Irvine (ed.), *Philosophy of Mathematics*).

También por entonces se consiguió eliminar del lenguaje matemático los llamados *"números infinitésimos"* (*"cantidades infinitesimales"*, o *"diferenciales"*). Estas eran entidades numéricas consistentes en cantidades infinitamente pequeñas pero *constantes*, que al ser incrementadas o restadas a otros números, producían a su vez números "infinitamente próximos" a cualquier número dado.

El estatuto de ese tipo de números había estado en litigio desde su introducción, hasta el punto de merecer las criticas del filósofo Berkeley, que en 1734 denunció la falta de rigor y la inconsistencia que los rodeaban, en su panfleto "The Analyst: A Discourse Addressed to an Infidel Mathematician" (*The Works of George Berkeley*, vol. 3, pp. 3—60).

Durante el siglo XIX, el trabajo de matemáticos como Cauchy y Weierstrass eliminó la necesidad de apelar a ese tipo de números, elaborando definiciones alternativas para aquellos conceptos matemáticos que hasta entonces los utilizaban. De este modo, conceptos como el de *límite* o el de *continuidad* pasaron a ser caracterizados mediante las llamadas *"definiciones epsilónticas"*, que siguen vigentes hoy día.

En este punto conviene hacer notar que muchos años después, en la década de 1960, Abraham Robinson inventaría una forma distinta de volver a introducir los números infinitésimos, esta vez con todo rigor, utilizando el aparato proporcionado por la lógica moderna. El resultado fue una disciplina denominada *"análisis no estándar"*, cuyo uso, sin embargo, como el de sus nuevos "infinitésimos" (ahora llamados *"hiperreales"*), ha quedado restringido a un ámbito bastante especializado.

El caso es que a finales del siglo XIX, la sensación por los logros conseguidos era exultante, hasta el punto proclamar uno de los matemáticos más eminentes de la época, Henri Poincaré, en el 2º Congreso internacional de matemáticas, celebrado en París con motivo de la Exposición Universal de 1900:

> "El análisis ha quedado actualmente reducido a los números enteros y a sistemas finitos o infinitos de enteros, relacionados entre sí por una red de relaciones de igualdad o desigualdad. Las matemáticas, decimos, han sido aritmetizadas (...) Podemos decir que hoy día se ha logrado un rigor absoluto." ("Du rôle de l'intuition et de la loqique en mathématiques", *Comptes Rendus du* 2^{me} *Congrès International des Mathématiciens, Paris, 1900*; citado en Dou, *Fundamentos de la matemática*, p. 58).

(Poincaré se refiere en esta cita a los números *enteros*, es decir, a los números naturales conjuntamente con los negativos, pero igualmente valdría tomar como base solo a los naturales, ya que la reducción de aquellos a estos resulta inmediata.)

§ 1.32. La creación de la teoría de conjuntos. Poco antes de que Poincaré pronunciara esas palabras, entre 1879 y 1884, Georg Cantor había publicado en los *Mathematische Annalen* su primer tratado, en seis partes, sobre lo que pronto sería conocido como *"teoría de conjuntos"*: una disciplina completamente nueva, inventada por él, en la que partiendo de la noción de *conjunto* y la relación de *pertenencia*, edificaba toda una rama autónoma de las matemáticas por derecho propio.

Pues bien, poco a poco se iría poniendo de manifiesto que dicha teoría proporcionaba las herramientas más eficaces para representar de una manera rigurosa la reducción de los distintos campos numéricos a *conjuntos* de números naturales y a *conjuntos de conjuntos* de números naturales.

Por aquel entonces, Cantor manejaba una idea sumamente sencilla de lo que era un conjunto (una "multiplicidad" o "conglomerado"; en alemán, *"Menge"* o *"Vielheit"*, entre otros términos):

> "Un conjunto es cualquier colección de objetos distintos y bien definidos de nuestra intuición o nuestro pensamiento, reunidos en un todo".
> ("Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. I", *Mathematische Annalen*, 1895; citado en Fraenkel, Bar-Hillel y Levy, *Foundations of Set Theory*, p. 15; una definición de corte similar puede leerse en sus *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*, de 1883, p. 137 de la ed. castellana).

Para nosotres, un prototipo de conjunto sería un *rebaño de ovejas* (reales o ideales), es decir: una colectividad de ovejas que, como tal rebaño, constituye una unidad, un nuevo objeto, distinto de las ovejas que lo componen.

Otro ejemplo de conjunto sería el de habitantes de la ciudad de Berkeley (California, así nombrada en honor del filósofo irlandés antes mencionado). Otro ejemplo es el conjunto de montañas de la Tierra de más de 8.000 metro. Otro ejemplo es el de los ideales de la revolución francesa. El primero de estos conjuntos tiene unos 125.000 elementos (cada una de las personas que viven en Berkeley), el segundo tiene 14 elementos (los montes "ochomiles" de la Tierra), mientras que el último tiene tres elementos (los ideales de libertad, igualdad y fraternidad). Y un cuarto conjunto lo podemos formar, de modo más heterogéneo, poniendo a una persona que viva en Berkeley (la filósofa Judith Butler, por ejemplo), el monte Everest y el ideal de la fraternidad. Este último conjunto también tiene tres elementos, pero bien dispares entre sí.

§ 1.33. La lógica matemática de Frege. Así las cosas, el empeño de varios pensadores, como el matemático alemán Richard Dedekind y sobre todo Frege, fue el de tratar de proporcionar un análisis de los propios números naturales en términos de nociones más básicas, al nivel que pueda estar la noción de *propiedad* o la de *conjunto*.

Como veremos con más detalle en el módulo siguiente, Frege tenía el proyecto de demostrar que el análisis matemático era reductible a la lógica, y para ello necesitaba representar los números naturales en términos que parecieran absolutamente abstractos y generales (esto es, en términos *"puramente lógicos"*),

Ya con esa idea, se había dedicado anteriormente a renovar la teoría lógica existente, con la intención de dotarla de la profundidad y precisión necesarias para poder acometer dicha reducción. Así, en su obra *Begriffsschrift* (*Conceptografía*), de 1879, Frege sentó las bases de la moderna lógica matemática, una disciplina incomparablemente más rica y potente que la lógica silogística, que era la que existía hasta entonces.

Hecho esto, en su segundo libro, *Die Grundlagen der Arithmetik* (*Los fundamentos de la aritmética*), de 1884, Frege planteó el proyecto filosófico de reducción de la teoría aritmética a la lógica, y elaboró una redefinición de los números naturales en términos absolutamente básicos y generales.

Y por último, en su obra magna, los *Grundgesetze der Arithmetik* ("Las leyes fundamentales de la aritmética", publicada en 2 volúmenes, el 1º en 1893 y el 2º en 1903), Frege desarrolló en detalle la derivación de los principales teoremas de la aritmética natural y del análisis matemático, a partir de esos términos básicos. Para ello utilizó el aparato lógico-formal que él mismo había creado, así como el denominado *"principio de comprehensión"*, del que vamos a hablar inmediatamente.

§ 1.34. El principio de comprehensión. Dada la idea intuitiva de conjunto que se manejaba en ese momento, parecía natural suponer que era posible postular libremente la existencia de conjuntos sin ningún tipo de restricción. En otras palabras, parecía natural suponer que enunciando cualquier condición precisa y significativa se determina un conjunto, a saber: el conjunto de todos los objetos que cumplen con la condición especificada.

Dicha suposición es la que se conoce como *"principio de comprehensión"*, y se puede resumir básicamente diciendo que "a cualquier condición precisa y significativa corresponde un conjunto".

El principio de comprehensión fue adoptado explícitamente por Frege, que lo colocó, en una versión formalizada, como el 5º axioma de su sistema de los *Grundgesetze*, y al que caracterizó como ley "puramente lógica" (cf. *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 1, Prefacio, y secc. 20; Geach y Black (eds.), *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, p. 138; y cf. también Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, p. 210; y Fraenkel, Bar-Hillel y Levy, *Foundations of Set Theory*, p. 31). También Richard Dedekind, en su propia obra sobre los fundamentos de la aritmética, de 1888, parece asumir la vigencia de este principio y utilizarlo con libertad (*¿Qué son y para qué sirven los números?*, seccs. 1, 2 y 66, pp. 105–106 y 116 de la ed. española).

Por su parte, Cantor fue más precavido al respecto y nunca defendió este principio, aparte de que estaba sobre aviso de otras contradicciones que se podían derivar si la formación de conjuntos no se restringía adecuadamente (cf. su célebre carta a Dedekind de agosto de 1899, recogida en la antología castellana *Fundamentos*, pp. 259–264; así como las pp. 65–73 y 274–277 de los estudios del profesor José Ferreirós, que acompañan dicha edición; y véase también Hallet, *Cantorian Set Theory*, pp. 33–34 y 126–128).

§ 1.35. El advenimiento de las paradojas. Y es que, en efecto, en el contexto que acabamos de dibujar, aparecieron tres argumentos que mostraban que era posible derivar contradicciones a partir de la naciente teoría de conjuntos.

El primero de esos argumentos fue publicado en 1897 por el matemático italiano Cesare Burali-Forti, en el *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, y actualmente se conoce como *"paradoja de Burali-Forti"*, o *"paradoja del máximo número ordinal"* (cf. traducción al inglés del artículo original en van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, pp. 104—112).

El segundo argumento fue descubierto por el propio Cantor, que se inspiró en el anterior y lo comunicó a Dedekind en su carta de 1899, que acabamos de citar. Este argumento lleva el nombre de *"paradoja de Cantor"* o *"paradoja del máximo número cardinal"*. La carta en cuestión no se publicaría hasta 1932, en la edición de Ernst Zermelo de las *Obras completas* de Cantor (puede consultarse, en inglés y en español, en los libros antes señalados).

Esas dos primeras paradojas, que no vamos a exponer aquí, afectaban a la formación de conjuntos muy grandes, en la parte más técnica o sofisticada de la teoría. Y no fueron percibidos como inconsistencias que afectaran al conjunto de la teoría hasta que apareció la tercera antinomia, la paradoja de Russell (cf. Garciadiego Dantan, *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de conjuntos*, pp. 54—74).

La paradoja de Russell fue formulada por Bertrand Russell en la primavera de 1901, al encontrar una contradicción tan básica y elemental que echaba por tierra todos los fundamentos de la teoría. Dicha contradicción, en efecto, invalidaba el 5º axioma formal de Frege, que este había utilizado como uno de los pilares fundamentales de su sistema, y obligaba a replantear profundamente la definición intuitiva en la que Cantor se había basado.

§ 1.36. La paradoja de Russell. Fue precisamente reflexionando sobre el argumento de Cantor de 1899, del que ya tenía noticia, como Russell llegó a formular su archiconocida derivación, que a continuación exponemos (cf. Russell, *La evolución de mi pensamiento filosófico*, p. 77).

Al menos aparentemente, hay algunos conjuntos que no pertenecen a sí mismos y otros que sí. Por ejemplo, el

$$\{\text{ conjunto de todos los seres humanos }\}$$

no es un ser humano, y por lo tanto, no pertenece a sí mismo. Pero el

$$\{\text{ conjunto de todas las cosas distintas de las manzanas }\}$$

es él mismo una *cosa distinta de las manzanas*, y por lo tanto, parece que debería pertenecer a sí mismo.

Así como el

$$\{\text{ conjunto de todos los conjuntos }\}$$

siendo él mismo un conjunto, parece que también debería pertenecer a sí mismo.

Consideremos ahora el primer tipo de conjuntos, esto es, aquellos que *no* pertenecen a sí mismos. Y sea R (por Russell), el conjunto formado por todos ellos. Es decir, sea por definición:

$$R \quad =_{def.} \quad \{\text{ conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos }\}$$

Si ahora suponemos que R pertenece a sí mismo (abreviadamente, $R \in R$), entonces, por definición de R, tendría que ser un *conjunto que no pertenece a sí mismo* (abreviadamente, $R \notin R$). Pero ello es imposible. Ahora bien, si suponemos que R *no* pertenece a sí mismo ($R \notin R$), entonces resulta que cumple la condición para pertenecer a R, por lo cual tendríamos que concluir que *sí* pertenece a sí mismo ($R \in R$). Lo cual tampoco puede ser.

De de cada suposición llegamos a la contraria, lo que constituye una contradicción:

$$R \in R \qquad \text{si y solo si} \qquad R \notin R$$

Y esta derivación, que es la que se conoce como *"paradoja de Russell"*, basta para desacreditar definitivamente el principio de comprehensión, así como la noción intuitiva de *conjunto* en que dicho principio está basado: *no siempre* se determina un conjunto mediante la enunciación de una condición precisa y significativa. Así lo demuestra la definición de R, que a pesar de ser precisa y significativa, no corresponde a ningún conjunto bien definido.

§ 1.37. La crisis de fundamentos. Russell comunicó su resultado a Frege por carta en 1902, a la que éste contestó a los pocos días. En su contestación, Frege admitía que:

> "Su descubrimiento de la contradicción me causó la mayor sorpresa y, diría incluso, consternación, ya que ha sacudido la base sobre la cual yo trataba de edificar la aritmética. Parece entonces (...) que mi 5º axioma es falso (...) Esto es aún más grave dado que, con la pérdida de mi 5º axioma, no solo parecen desvanecerse los fundamentos de mi aritmética, sino los únicos posibles fundamentos de la aritmética también.
>
> (...)
>
> "Está a punto de aparecer el segundo volumen de mis *Grundgesetze.* Sin duda tendré que añadir un apéndice en cual tenga en cuenta su descubrimiento. ¡Si es que para entonces tengo ya la forma correcta de hacerlo!"
> (cf. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel*, pp. 124—128; y recogiendo más correspondencia posterior, Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, pp. 130 y siguientes; de estas cartas no hay versiones castellanas completas, al menos que yo sepa.)

Y efectivamente, en un Apéndice al citado libro, Frege decía:

> "Difícilmente le puede acontecer a un científico algo más desafortunado que ver cómo se tambalea uno de los fundamentos de su obra después de que el trabajo ha sido terminado.
>
> "Esta es la posición en la que me colocó una carta del Sr. Bertrand Russell, justo cuando la impresión de este volumen estaba a punto de ser concluida."
> (Apéndice al volumen 2 de los *Grundgesetze der Arithmetik*; *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, p. 234; tampoco traducido al castellano.)

A la reacción de Frege se unió la de Dedekind, que ese mismo año decidió suspender la reedición de su libro sobre los fundamentos de la aritmética, por razones parecidas:

> "Cuando hace ocho años fui invitado a reemplazar la segunda edición de este escrito, entonces ya agotada, por una tercera, tuve escrúpulos en admitirlo porque entretanto se habían mostrado válidas ciertas dudas sobre la seguridad de importantes fundamentos de mi concepción."
> (Prólogo a la 3ª edición de *¿Qué son y para qué sirven los números?*, publicada en 1911 (1ª ed. pub. en 1888 y 2ª en 1893); p. 104 de la ed. española.)

Además, la derivación de Russell hizo llamar la atención sobre los otros dos argumentos anteriores, de Cantor y Burali-Forti, a los que hasta entonces no se había concedido la suficiente importancia. Así como hacia otro grupo de paradojas, las llamadas *"paradojas semánticas"*, entre las que destacaron las de *Richard* (1905), *Berry* (1906), *Grelling* (1908), y la vieja *paradoja del mentiroso*, cuyo interés volvió a suscitarse (cf. Beth, *Las paradojas de la lógica*, pp. 9—27, para todas ellas).

Aunque las paradojas semánticas no estaban directamente relacionadas con la teoría de conjuntos (ni surgieron, según parece, a consecuencia de las primeras, cf. otra vez Garciadiego Dantan, *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas"*, pp. 167—190), se las asoció enseguida a ellas, dentro del clima de inseguridad que se estaba creando. Este clima acabaría siendo conocido históricamente como la "crisis de fundamentos" en filosofía de la matemática.

Algún tiempo después, ya en la década de 1930, aparecería una sucesión de desconcertantes resultados en lógica, obtenidos por una generacion más joven, especialmente Alfred Tarski, Alonzo Church y el propio Gödel, de quien ya hemos hablado. Estos resultados mostraban limitaciones en la aplicación del método de formalización suministrado por la nueva lógica, por lo que a veces se los denomina *"resultados limitativos"*; y constituyeron otro duro golpe para la búsqueda de fundamentos a la matemática (y en especial para la escuela formalista, como veremos con mayor detenimiento en el Módulo 3).

Hacia la mitad del siglo XX, casi cinco décadas después de las reacciones de Dedekind y Frege, el gran matemático alemán Hermann Weyl todavía admitía que:

> "Estamos menos ciertos que nunca acerca de los fundamentos últimos de la matemática (y de la lógica). Como todo y como todes en el mundo en que vivimos, tenemos nuestra "crisis". La hemos tenido por casi cincuenta años. Aparentemente no parece obstaculizar nuestro trabajo diario, y sin embargo yo al menos confieso que ha tenido una influencia práctica considerable en mi vida matemática: ha encaminado mis intereses hacia campos que consideraba relativamente "seguros", y ha menoscabado constantemente el entusiasmo y la determinación con los que llevaba a cabo mi trabajo de investigación."
> ("Mathematics and logic", *American Mathematical Monthly*, 1946; citado en Fraenkel, Bar-Hillel y Levy, *Foundations of Set Theory*, p. 4.)

§ 1.38. Reconstrucción de la teoría de conjuntos. La teoría de conjuntos fue reconstruida poco después de la aparición de las paradojas, aunque adoptando una forma mucho más artificial y sofisticada. Bajo su nuevo formato, la teoría de conjuntos se ha seguido desarrollando hasta la actualidad sin dar lugar a nuevas paradojas. Hoy día constituye una disciplina matemática respetada y fecunda.

Para la reelaboración de la teoría de conjuntos se ensayaron diversos sistemas, cuyas consecuencias prácticas vienen a ser aproximadamente equivalentes. Uno de ellos es la *teoría de tipos* de Russell, de la que hablaremos algo en el módulo siguiente. Otros son los sistemas axiomáticos, y entre ellos la *teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel*, que es la que más corrientemente se usa. Una introducción asequible a esta última es la *Teoría intuitiva de conjuntos*, de Paul Halmos, a quien ya mencionamos.

Las teorías axiomáticas de conjuntos proceden fijando como punto de partida unos principios muy generales, que se llaman "axiomas", y derivando de ahí toda la teoría posterior. Lo que tales principios enuncian son hechos de carácter muy general acerca de la naturaleza de los conjuntos, y la mayoría de ellos son altamente intuitivos, aunque no todos, como vamos a ver.

El axioma más sencillo de la moderna teoría de conjuntos es el *axioma de extensionalidad*, que se limita a decir que si dos conjuntos tienen los mismos elementos entonces son iguales. Otro axioma sencillo y también intuitivo es el *axioma del emparejamiento* (o *axioma del par*), según el cual, dados dos objetos cualesquiera, existe un conjunto cuyos elementos son precisamente esos dos objetos.

Otro axioma de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel es el *axioma de infinitud*, según el cual existe un conjunto infinito dotado de una particular estructura, que viene a ser una réplica de la estructura de los números naturales. Este axioma es mucho menos intuitivo y ha sido objeto de debate. A partir de dicho axioma, en combinación con otros, se pueden formar conjuntos infinitos arbitrariamente grandes.

Otro ejemplo de axioma que ha sido discutido es el *axioma de elección*, del que hablaremos en el Módulo 4. Y otro axioma un tanto singular, que a veces también se discute, es el *axioma de regularidad* (o *axioma de fundamentos*). Este último establece cierto requisito especial, casi con la única finalidad de impedir, por decreto, que ningún conjunto pueda ser miembro de sí mismo.

La mayor parte de estos axiomas recogen ideas sobre los conjuntos que ya se manejaban en los orígenes de la teoría (salvo el de regularidad, que evidentemente es posterior). Pero es importante hacer notar que, de inicio, esas ideas se consideraban consecuencias naturales del concepto intuitivo de *conjunto*; mientras que después, en el seno de la teoría axiomática, aparecen con el rango de estipulaciones necesarias. De hecho, en la teoría axiomática de conjuntos no hay una definición previa de la noción de conjunto, de la cual deriven los axiomas. Muy al contrario, bajo la teoría axiomática se considera que son los propios axiomas los que encierran la definición del concepto matemático de conjunto y regulan su uso.

La paradoja de Russell no puede surgir en la moderna teoría de conjuntos, y ello es así, no solo por la presencia del axioma de regularidad, sino porque resultaría imposible, utilizando el resto de axiomas, introducir el conjunto de Russell (es decir, el supuesto "conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos"). Así como también resulta imposible introducir el conjunto de todas las cosas que no son manzanas, o el conjunto de todos los conjuntos, etc. Estas "colecciones" (o "clases propias", como se las llama en el lenguaje de la moderna teoría de conjuntos) *no* constituyen conjuntos, a pesar de las apariencias, por lo que no pueden formar parte de la teoría.

§ 1.39. Alcance y limitaciones de la teoría axiomática de conjuntos. Como vemos, en la teoría axiomática de conjuntos no se puede suponer sin más la existencia de un conjunto cualquiera, sino que hay que demostrarla a partir de los axiomas. Así pues, un conjunto ha dejado de ser *cualquier colección de objetos reunidos en un todo*, para convertirse en *cualquier colección de objetos que satisfaga los axiomas de la teoría*. La noción de conjunto que subyace a la teoría axiomática está, por consiguiente, enormemente alejada de la que se manejaba en los inicios de esta teoría.

Y es que, en efecto, la noción de conjunto que deriva de la teoría axiomática ya no destila la naturalidad propia de una "noción puramente lógica", que estaba en la base de los tratamientos de Cantor, Dedekind y Frege. Esta nueva noción tiene un perfil de concepto eminentemente matemático, regido por postulados matemáticos.

En cualquier caso, hay que señalar que el proyecto reduccionista con el que nació la teoría de conjuntos se ha conseguido desarrollar prácticamente hasta el final, aunque sea bajo las limitaciones del formato axiomático. En efecto, hoy en día se considera que la práctica totalidad de los objetos matemáticos (incluyendo los números de todos los campos numéricos, así como las funciones definidas entre ellos, etc.), se pueden representar en términos de conjuntos y combinaciones de conjuntos. Y se considera, a su vez, que la práctica totalidad de los teoremas matemáticos pueden ser demostrados a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos.

Por todo ello, la teoría axiomática de conjuntos se ha ido asentado como el principal pilar en el estudio de los fundamentos de la matemática, junto a la propia lógica. Y se ha convertido en el lenguaje común de las distintas ramas de la matemática, llegando a impregnar de “jerga conjuntista” hasta los libros de texto de matemáticas más elementales, correspondientes a la enseñanza primaria.

MÓDULO 2

El logicismo

El programa logicista de Frege

§ 2.1. Presentación de la posición logicista. El punto de vista logicista con respecto a una teoría matemática es aquel que defiende que el único fundamento de esa teoría reside en la lógica. O dicho con otras palabras: que tal teoría matemática consiste meramente en una elaboración, más o menos compleja, a partir del razonamiento lógico puro.

Esto se suele expresar de forma resumida diciendo que esa teoría matemática "se reduce a la lógica". Y el principal objetivo de los defensores del logicismo es mostrar cómo se puede, en efecto, llevar a cabo dicha reducción.

¿Qué cabe entender por "lógica" en este contexto? Aunque habría muchos matices que hacer según diferentes autores, podemos partir de la base, para entendernos, de que la lógica consiste en el conjunto de leyes más básicas y generales que regulan nuestro razonar y discurrir. En ese conjunto de leyes está incluido el *principio de no contradicción*, por ejemplo, que nos obliga a rechazar que los enunciados "está lloviendo" y "no está lloviendo" puedan ser verdaderos respecto a un mismo lugar y un mismo tiempo.

Lo que viene a defender el logicismo, en resumidas cuentas, es que las entidades matemáticas existen como consecuencia directa de esas leyes generales. Esto es: que al igual que esas leyes obligan a que no pueda *llover y no llover* en un mismo lugar al mismo tiempo, obligan también a postular la existencia de determinadas entidades, entre las que se encuentran las entidades matemáticas.

Una de las principales aspiraciones del logicismo es encontrar una caracterización alternativa de cada una de las entidades matemáticas, de tal forma que su naturaleza lógica se haga patente. O lo que es lo mismo: encontrar una caracterización alternativa de las diversas entidades matemáticas, en *"términos puramente lógicos"*.

§ 2.2. Las bases del programa logicista de Frege. El representante por excelencia del logicismo en la filosofía de la matemática contemporánea es Gottlob Frege. Frege fue un matemático alemán, profesor en la Universidad de Jena, profundamente preocupado por los fundamentos de la ciencia a la que se dedicaba.

Queriendo establecer si los enunciados matemáticos tenían o no algún apoyo empírico en sus demostraciones, Frege llevó a cabo una minuciosa investigación sobre la estructura y naturaleza de éstas. Y con el propósito de representar dicha estructura con el máximo rigor, acabó por elaborar un sistema de lógica totalmente nuevo, que es al que está dedicada su primera gran obra, la *Begriffsschrift* (*Conceptografía*), de 1879 (cf. el Prólogo a dicha obra, en *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Y otros estudios filosóficos*, pp. 7–10).

Con la *Conceptografía*, Frege inaugura la teoría que hoy conocemos como *"lógica de primer orden"*, en lo que supuso un avance gigantesco en la materia, solo comparable al trabajo pionero de Aristóteles. Entre otros logros, Frege consiguió superar en dicha obra el análisis lógico de la proposición en términos de sujeto y predicado, que era el único que se conocía hasta Kant; introdujo los cuantificadores, la lógica de relaciones y el análisis moderno del universal condicional; unificó la lógica de predicados y la lógica de enunciados en una teoría común, elaboró para dicha teoría el primer sistema formal axiomático, y la delimitó a su vez de la lógica de segundo orden.

El segundo libro de Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik* (*Los fundamentos de la aritmética*), de 1884, contiene el grueso de su contribución filosófica al estudio de los fundamentos de la matemática. En esta obra expone Frege su posición logicista. En particular, defiende largamente la tesis de que la aritmética es reductible a la lógica; critica filosofías de la matemática "rivales"; y propone un análisis de lo que son los números naturales por medio de nociones absolutamente generales, es decir, en lo que parecían ser efectivamente "términos puramente lógicos". Nótese, por cierto, que el logicismo de Frege afecta únicamente a los números (a la aritmética y al análisis matemático), pero no por ejemplo a la geometría (volveremos a esta observación incidental en p. 58).

Por último, en la obra magna de Frege, sus *Grundgesetze der Arithmetik* ("Las leyes fundamentales de la aritmética", publicada en 2 volúmenes, en 1893 y 1903, y hasta hoy no traducida al castellano), nuestro autor desarrolló en detalle la derivación de los principales teoremas de la aritmética elemental y del análisis matemático a partir de esos términos básicos, en el seno del aparato lógico-formal que él mismo había diseñado.

La principal obra de referencia sobre el proyecto logicista de Frege es debida, curiosamente, a un eminente intuicionista: Michael Dummett, que no obstante dedicó cuatro largas monografías a explorar distintos aspectos de las contribuciones filosóficas de este pensador (*Frege: Philosophy of Mathematics*, y otros tres títulos que pueden consultarse en la Bibliografía general; ninguno de ellos disponible en castellano, por el momento).

Aunque Frege mantuvo correspondencia con figuras notorias de su época como Husserl o Hilbert, lo cierto es que la importancia de sus contribuciones no fue apreciada en su momento como se merecía. No llegó a acceder a la cátedra universitaria, tuvo que sufragar de su bolsillo la edición de sus *Grundgesetze der Arithmetik*, y uno de sus alumnos, Rudolf Carnap, nos cuenta que en 1913 atendían sus clases solo tres personas (cf. Carnap, *Autobiografía intelectual*, p. 32).

Hoy día, sin embargo, Frege es reconocido por el conjunto de su obra no solo como el fundador de la lógica matemática, sino también de la filosofía de la matemática, la filosofía de la lógica y la filosofía del lenguaje contemporáneas. Así como en general, de toda la tradición que se conoce como *"filosofía analítica"*. Y dentro de esta tradición, del llamado *"giro lingüístico"*, que consiste en primar la revisión del lenguaje natural como medio de elucidación de los problemas filosóficos, en la idea de que, para enfocar correctamente los problemas, antes hay que intentar detectar los posibles engaños y confusiones producidos por las peculiaridades de nuestro lenguaje (cf. Dummett, *Frege: Philosophy of Language*, pp. 665–669). Un giro lingüístico que, en efecto, dominó la filosofía analítica a lo largo de todo el siglo XX, y que como ya dijimos, conoce hoy día un cierto declive.

En su momento, la persona que más contribuyó a divulgar la obra de Frege y a promulgar su valía, fue Bertrand Russell (irónicamente, el mismo que desbarataró su programa, con el descubrimiento de la paradoja que ya conocemos). En una carta al profesor Jean van Heijenoort, autorizando la publicación de la correspondencia entre ambos, Russell dice de su admirado colega:

> "Cuando pienso en actos de gracia e integridad, me doy cuenta de que no conozco ninguno comparable con la dedicación de Frege a la verdad. Estaba Frege dando cima a la obra de toda su vida, la mayor parte de su trabajo había sido ignorado en beneficio de investigadores infinitamente menos competentes que él, su segundo volumen estaba a punto de ser publicado y, al darse cuenta de que su supuesto fundamental era erróneo, reaccionó con placer intelectual, reprimiendo todo sentimiento de decepción personal. Era algo casi sobrehumano y un índice de aquello de lo que las personas son capaces cuando están dedicadas al trabajo creador y al conocimiento, y no al crudo afán por dominar y hacerse famosas."
>
> (Bertrand Russell, Carta a Jean van Heijenoort del 23–11–1962, en van Heijenoort (ed.) *From Frege to Gödel*, p. 127; traducción tomada del extracto citado en Mosterín, *Los lógicos*, p. 61.)

§ 2.3. El análisis fregeano de los números naturales. La columna vertebral del programa logicista de Frege es el análisis de los números naturales, al cual está dedicada su obra de referencia en filosofía de la matemática, esto es, sus *Fundamentos de la aritmética* (cf. en especial las secciones de la 45 a la 83).

De dicha obra existen dos traducciones al castellano: la de la editorial Laia, debida al filósofo venezolano Carlos Ulises Moulines, y la de la Universidad Nacional Autónoma de Mexico, en la selección titulada *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Y otros estudios filosóficos.* Resulta preferible la primera, que es la que reproduciremos aquí en los fragmentos abajo citados.

¿Qué ocurre, se pregunta Frege, cuando hacemos un conteo del número de objetos que componen un determinado grupo? Frege razona que al contar los objetos de un grupo, los aspectos individuales de cada objeto nos resultan irrelevantes. Precisamente, al efectuar el conteo lo único que tenemos en cuenta de cada objeto es que pertenezca al grupo que estamos considerando.

Así pues, lo importante es que haya algo común a todos los objetos que componen el grupo cuyos elementos están siendo contados o enumerados (es decir, que exista una propiedad común, en la que todos los objetos que estamos contando coincidan).

Por poner algunos ejemplos (distintos a los que utiliza Frege), cuando decimos:

"el archipiélago Balear consta de 5 islas"

"el Sistema Solar tiene 8 planetas"

"el Patio de los leones de la Alhambra tiene 124 columnas"

estamos basándonos en un *concepto común* en cada caso, que es el que caracteriza al grupo en cuestión. A saber, respectivamente:

el concepto *ser una isla del archipiélago Balear*

el concepto *ser un planeta del Sistema Solar*

el concepto *ser una columna del Patio de los leones de la Alhambra*

Por lo tanto, siguiendo el razonamiento de Frege, de lo que se predica el número en cuestión es de cada uno de esos conceptos, o propiedades, y no de los individuos que caen bajo ellos. Y la predicación, o atribución numérica, consiste en especificar cuántos individuos caen bajo cada uno de los conceptos seleccionados.

A este planteamiento subyace una estrategia peculiar, a saber: la de de trasladar la cuestión inicial, sobre la naturaleza ontológica de los números naturales, al comportamiento lingüístico de las expresiones mediante las cuales nos referimos a ellos. Pues bien, este es el modo en que Frege inaugura el giro lingüístico (cf. Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, secc. 62, p. 86 de la ed. de Laia; y Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, pp. 111ss.).

De ese modo, los enunciados anteriores podrían ser parafraseados, respectivamente, como:

> "el concepto *ser una isla del archipiélago Balear* está ejemplificado exactamente por 5 objetos"
>
> "el concepto *ser un planeta del Sistema Solar* está ejemplificado exactamente por 8 objetos"
>
> "el concepto *ser una columna del Patio de los leones de la Alhambra* está ejemplificado exactamente por 124 objetos"

Incluso en enunciados numéricos aparentemente más variables u ocasionales, también habría involucrado un concepto concreto y bien definido. Por ejemplo, si yo pronuncio el enunciado

"Murcia tiene 460.349 habitantes"

y el día en que lo estoy pronunciando es el 2 de febrero de 2023, entonces el concepto al que mi enunciado se refiere será

el concepto *ser un habitante de Murcia a fecha de 02.02.2023*

Y por lo tanto, mi enunciado podría ser parafraseado diciendo:

> "el concepto *ser un habitante de Murcia a fecha de 02.02.2023* está ejemplificado exactamente por 460.349 objetos"

(en este caso, personas).

Este mismo análisis, curiosamente, resulta también aplicable a los enunciados en los que se atribuye el número 0 (es decir, a aquellos conteos cuyo resultado es que hay 0 objetos en el grupo). Un ejemplo es el enunciado (este sí tomado de Frege)

"Venus tiene 0 satélites"

Aquí es evidente que la predicación numérica no puede referirse a los satélites de Venus, puesto que no los hay, sino al concepto o propiedad de *ser un satélite de Venus*. En efecto, este concepto tiene sentido por sí mismo aunque no haya ningún objeto que lo cumpla). Y es de tal concepto del que se predica, precisamente, que no se encuentra ejemplificado por objeto alguno; o dicho en otras palabras, es de ese concepto del que se predica que el número de objetos que lo ejemplifican es igual a 0.

§ 2.4. La noción de "extensión de un concepto" y la clasificación universal de todos los conceptos. En *Los fundamentos de la aritmética* Frege no habla en términos del "conjunto de objetos" que satisfacen una determinada propiedad o concepto, sino que se refiere a la *"extensión del concepto"* (en alemán, *Umfang eines Begriffes*). Pero es claro que la extensión abarcada por un concepto, es decir, el dominio al que ese concepto se extiende, coincide precisamente con el conjunto de objetos que participan de él (es decir, que coincide con el conjunto de todos los objetos que satisfacen el concepto en cuestión).

En cualquier caso, resulta curioso constatar que Frege rehúsa detenerse a explicar la noción de *extensión de un concepto*, dando su significado por sabido. Y lo hace en lo que cabría leer como un titubeo subliminal, casi imperceptible, presagio del desastre al que acabaría conduciendo la utilización de esa noción (cf. secc. 68, nota al pie nº 13; y secc. 107, hacia el final de la obra).

Como quiera que sea, Frege pasa a considerar, a continuación, una clasificación de todos los posibles conceptos atendiendo al tamaño de sus extensiones, es decir, atendiendo al conjunto de objetos que satisfacen a cada uno. O puesto en otras palabras: Frege considera una forma de clasificar todos los posibles conceptos en función del número de objetos por el que cada uno de ellos se encuentra ejemplificado.

El primer grupo de conceptos de esta clasificación será, naturalmente, el de aquellos que no se encuentran ejemplificados por ningún objeto, es decir, el de aquellos conceptos con *extensión vacía* (como por ejemplo, el concepto *ser un satélite de Venus*).

A continuación vendrá el grupo de conceptos que se encuentran ejemplificados exactamente por un objeto, es decir, el de aquellos conceptos con *extensión unitaria*, o que cuentan con un único objeto en su extensión. Un ejemplo de este otro grupo sería el concepto *ser un satélite natural de la Tierra*.

A continuación vendrá el grupo de conceptos con 2 objetos en su extensión, luego el de 3, y así sucesivamente.

Para designar a los conceptos que pertenecen a cada uno de estos grupos, Frege inventa el término *"equinuméricos"* (en alemán, *gleichzahlig*), queriendo decir que tienen la misma cantidad de objetos en sus extensiones respectivas. O lo que viene a ser lo mismo, pero puesto en terminología más moderna: que corresponden a conjuntos con el mismo número de elementos (lo que hoy se conoce como *"conjuntos equipolentes"*).

Así pues, todos los conceptos del grupo 0 serán equinuméricos entre sí. También serán equinuméricos entre sí los conceptos del grupo 1. Y así sucesivamente.

§ 2.5. El Principio de Hume. En este punto, Frege nos hace notar una interesante observación, y es que para comprobar que dos conceptos son equinuméricos (es decir, que pertenecen al mismo grupo de la clasificación que acabamos de bosquejar) no necesitamos contar el número de objetos que componen la extensión de cada uno. Basta con ir emparejando los elementos respectivos, a ver si conseguimos que no quede ninguno sin emparejar en ninguno de los dos.

Esto es, en efecto, lo que hoy día se llama una *"correspondencia biunívoca"* (o *"biyección"*) entre dos conjuntos: un emparejamiento entre los elementos de uno y otro conjunto, en el que cada elemento tiene una única y exclusiva pareja en el otro, y no queda sin emparejar ningún elemento de ninguno de los dos.

Es evidente que cuando resulta posible establecer este tipo de correspondencia entre dos conjuntos es porque tienen el mismo tamaño, es decir, porque tienen el mismo número de elementos. Como el propio Frege explica, con toda claridad,

> "Si un camarero quiere estar seguro de que pone sobre la mesa igual número de cuchillos que de platos, (...) basta con que coloque a la derecha de cada plato un cuchillo, de modo que cada cuchillo de la mesa se encuentre justo a la derecha de un plato."
> (Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, secc. 70, p. 93 de la ed. de Laia.)

Y éste es el llamado *"Principio de Hume"*, que Frege retrotrae al conocido filósofo escocés (cf. *Los fundamentos de la aritmética*, secc. 63; Hume, *Tratado de la naturaleza humana* (1739), Parte 3ª, secc. 1ª, p. 173 de la ed. española; y para una formulación anterior, más elaborada, cf. Galileo, *Dos nuevas ciencias* (1638), "Jornada 1ª", pp. 61–62 de la ed. en castellano). En este principio se apoyará Frege, crucialmente, para dar una definición de los números naturales que no utilice a los propios números naturales en la definición.

§ 2.6. La definición del cero. Hecho todo esto, Frege se encuentra ya en condiciones de proporcionar una definición exacta y contundente de lo que son los números naturales. Y además, lo va a hacer de tal manera que la definición de cada nuevo número descanse sobre el anterior, consiguiendo así que la existencia infinita de todos ellos quede garantizada por la propia lógica del proceso.

Para conseguir esto, empieza por plantearse la definición del número 0, que va a ser la base de toda su construcción. Y la idea que se le ocurre a Frege es muy sencilla: tomar como definición del 0 al conjunto de todos los conceptos que tienen una extensión vacía, es decir, al conjunto de todos los conceptos que tienen 0 objetos en su extensión.

El número 0 será identificado, por tanto, con un gigantesco conglomerado de conceptos (el conjunto de todos los conceptos vacíos), pero considerado como un todo, como una unidad; es decir, considerado él mismo como un solo objeto.

Entre los conceptos pertenecientes a dicho conglomerado estará el de *ser un satélite de Venus*, por ejemplo, así como todos los que, como él, no se encuentran ejemplificados por objeto alguno.

Una vez hecho esto, Frege da un paso más, porque necesita encontrar un procedimiento para poder caracterizar tal conglomerado de conceptos de una forma autónoma, sin mencionar al propio 0 en la definición. Y a tal efecto, Frege se propone escoger, de entre todos los conceptos con extensión vacía, uno en particular, que venga a servir como representante canónico de todos ellos.

Pues bien, el concepto elegido por Frege para desempeñar este cometido es

el concepto *ser distinto de sí mismo*

Es decir, aquella propiedad que satisface un objeto si y solo si es diferente de sí mismo.

Resulta patente que no va a existir ningún objeto que pueda satisfacer dicho concepto. Y lo que es más interesante: se trata de un concepto que expresa una relación puramente "lógica", la negación de la relación de igualdad. Y además, si sabemos que no va a existir ningún objeto que satisfaga ese concepto es por razones puramente lógicas también. En efecto, es imposible que haya un objeto distinto de sí mismo, por razones parecidas, al menos aparentemente, a las que hacen imposible que llueva y no llueva a la vez, en el mismo lugar y al mismo tiempo. De ambas cosas tiene sentido decir que son "lógicamente imposibles".

En resumidas cuentas, el concepto *ser distinto de sí mismo* es un concepto con extensión vacía. Y por consiguiente, cualquier otro concepto equinumérico a él tendrá la extensión vacía también. Eso quiere decir que el conjunto de todos los conceptos equinuméricos al concepto *ser distinto de sí mismo* será precisamente el conjunto de todos los conceptos de extensión vacía.

Por lo tanto, Frege puede dar ya una caracterización de ese conjunto, que es el que va a identificar con el número 0, sin necesidad de mencionar al propio 0 en la caracterización. A saber:

> el número 0 es el conjunto de todos los conceptos equinuméricos al concepto *ser distinto de sí mismo.*

O lo que es lo mismo, pero puesto en la terminología de Frege:

> el número 0 es la extensión del concepto *ser equinúmerico al concepto "ser distinto de sí mismo".*

Ésa la verdadera "esencia", para Frege, del número 0. Y el hecho de que los términos de la definición, y la propia construcción de la misma, aparezcan como "puramente lógicos", sin apelación a noción empírica alguna, es la prueba de que la naturaleza de este número, como entidad u objeto en sí mismo, es "puramente lógica" también.

§ 2.7. La definición del uno. Frege identifica al número 1, a su vez, con el conjunto de todos los conceptos de extensión unitaria, es decir, con el conjunto de todos los conceptos que tienen exactamente 1 elemento en su extensión.

El número 1 será definido, por lo tanto, como otro gigantesco conjunto, o conglomerado de conceptos, también considerado como un todo en sí mismo (un conglomerado entre los que estará el concepto *ser un satélite natural de la Tierra* y todos los demás conceptos que, como él, están ejemplificados exactamente por 1 objeto).

Una vez hecho esto, Frege tiene que buscar de nuevo un procedimiento para poder caracterizar dicho conjunto de conceptos de una forma autónoma, sin mencionar en la definición al propio número 1, que es lo que está tratando de definir ahora.

Para conseguirlo, Frege se propone elegir un representante canónico de los conceptos con extensión unitaria. Y el concepto elegido, en este caso, es uno que se apoya en la construcción precedente, y que es ni más ni menos que

el concepto *ser idéntico al número 0*

Donde, por "número 0", se entiende el objeto que se acaba de definir anteriormente; es decir, el conjunto de todos los conceptos con extensión vacía.

Para entender bien la definición de Frege en este punto, tenemos que recalcar lo siguiente. Una vez que hemos admitido la formación de aquel gran conglomerado de conceptos que constituía el número 0 (reuniendo a todos los conceptos de extensión vacía en un todo, o en una unidad), adjudicamos al objeto así formado una entidad por sí mismo, que es la identificamos con el número 0.

solo hay, por lo tanto, un objeto que sea el número 0, de acuerdo con esta construcción. Y se trata precisamente de ese gran conjunto o conglomerado de conceptos vacíos. Al igual que si decimos, por ejemplo,

"ser idéntico a la Luna"

solo habrá un objeto que satisfaga eso, a saber, la propia Luna.

Por consiguiente, el concepto *ser idéntico al 0* tiene exactamente 1 elemento en su extensión, que es el propio 0. Y al tener exactamente 1 elemento en su extensión, dicho concepto nos puede servir como representante de todos los conceptos que tienen en su extensión exactamente 1 elemento (esto es, como representante de todos los conceptos de extensión unitaria).

En resumidas cuentas: el conjunto de todos los conceptos equinuméricos al concepto *ser idéntico al 0* será, precisamente, el conjunto de todos los conceptos de extensión unitaria.

Y es así como Frege puede dar una caracterización de tal conjunto, que es el que va a identificar con el número 1, sin necesidad de mencionar al propio 1 en la caracterización. A saber:

> el número 1 es el conjunto de todos los conceptos equinuméricos al concepto *ser idéntico al 0.*

O lo que viene a ser lo mismo, pero puesto en la terminología de Frege:

> el número 1 es la extensión del concepto *ser equinumérico al concepto "ser idéntico al 0".*

Ésa es la verdadera "esencia", para Frege, del número 1. Y el hecho de que los términos de la definición, y la forma de construcción de la misma, basada en la previa construcción del 0, aparezcan también aquí como "puramente lógicos", sin apelación a nociones empíricas, es la prueba de que este otro número natural tiene una naturaleza puramente lógica también.

§ 2.8. La definición del dos y de los restantes números naturales. Una vez que hemos aceptado la construcción de los números 0 y 1 como objetos en sí mismos, pasamos a definir el número 2. Para ello partimos del concepto

ser idéntico al 0 ó al 1

Obviamente, el 0 y el 1 son dos objetos distintos, y son los únicos que satisfacen el concepto de *ser idéntico al 0 ó al 1*. Por lo que dicho concepto puede ser tomado como representante de todos los demás conceptos que tengan también exactamente 2 objetos en su extensión. Al igual que si decimos, por ejemplo,

ser idéntico a la Luna o al Sol

habrá en esta ocasión dos objetos exactamente que satisfagan la condición en cuestión, a saber: la Luna y el Sol.

Es inmediato entonces plantear la definición:

> el número 2 es el conjunto de todos los conceptos equinuméricos al concepto *ser idéntico al 0 o al 1*

O lo que es lo mismo:

> el número 2 es la extensión del concepto *ser equinumérico al concepto "ser idéntico al 0 o al 1"*

Y así, resulta claro cómo se pueden seguir construyendo los restantes números naturales, sucesivamente, hasta el infinito.

Es importante notar que este procedimiento de definición de los números naturales garantiza que éstos no se acaben nunca; esto es, que siempre se pueda seguir definiendo números naturales cada vez mayores. Esta propiedad de la construcción de Frege se consigue definiendo los números como objetos, y haciendo reposar la definición de cada número natural en las definiciones de los números naturales anteriores. Así se consigue que la construcción lógica elaborada sirva de respaldo a la existencia de infinitos números naturales.

§ 2.9. Lectura de Frege (<u>Los fundamentos de la aritmética</u>). Reproducimos a continuación algunos fragmentos de la Introducción y Conclusión de la obra que venimos comentando, *Los fundamentos de la aritmética*.

Cuando Frege habla aquí de "número" a secas, se refiere a los números naturales, a cuya exploración está dedicada la obra (para ése y los restantes campos numéricos, véase la referencia indicada en el Módulo 1, p. 26). Un juicio "analítico" es, para Frege, aquél cuya verdad depende únicamente de leyes lógicas generales y definiciones. Y un juicio "a priori" es el que puede ser probado sin ninguna apelación a los hechos (cf. secc. 3 de *Los fundamentos de la aritmética*).

> "A la pregunta de qué es el número uno, o de qué denota el signo '1', se suele responder: pues una cosa. Y si se hace notar entonces que el enunciado
>
> "el número uno es una cosa"

no es una definición, porque a un lado se halla el artículo determinado y al otro, el indeterminado, y que tal enunciado solo expresa que el número uno pertenece a las cosas, pero no nos dice qué cosa es, entonces quizá quien nos ha formulado la pregunta nos invitará a que escojamos una cosa cualquiera, a la que decidamos llamar "uno". Pero si todo el mundo tuviese derecho a entender bajo este nombre lo que quisiera, resultaría que el enunciado anterior sobre el uno se referiría a cosas distintas para distintas personas; no habría ningún contenido común a tales enunciados (...)

"La mayoría de matemátiques tampoco dispondrán de una respuesta satisfactoria a tales preguntas. ¿Pero no es vergonzoso para la ciencia que se halle en este estado de confusión ante el objeto que más le atañe y que es, aparentemente, tan simple? Todavía menos podrá decirse lo que es el [concepto general de] número. Cuando un concepto que está en la base de una gran ciencia ofrece dificultades, es, sin duda, tarea ineludible investigarlo detenidamente y superar estas dificultades, especialmente porque resultará difícil llegar a clarificar completamente los números negativos, fraccionarios o complejos, mientras siga siendo defectuosa la comprensión de los fundamentos del edificio de la aritmética.

(...)

"Y para refutar la ilusión de que, con relación a los números enteros positivos no existe ninguna dificultad, sino que hay un acuerdo general, me ha parecido bien comentar algunas opiniones de filósofes y matemátiques sobre las cuestiones que aquí entran en consideración. Veremos cuán poco acuerdo puede hallarse, hasta el punto de que aparecen afirmaciones exactamente contrapuestas.

(...)

"En consecuencia, mis argumentaciones serán, ciertamente, más filosóficas de lo que a mucha gente puede parecerle adecuado; pero una investigación fundamental del concepto de número resultará siempre algo filosófica. Esta tarea es común a la matemática y a la filosofía.

"Si la colaboración entre estas dos ciencias, a pesar de algunos intentos por ambas partes, no está tan desarrollada como sería de desear y como sería, sin duda, posible, radica esto, según creo, en el predominio de consideraciones psicológicas en filosofía, que penetran incluso en la lógica (...) Parece incluso que algunos piensan que los conceptos nacen en el alma individual como las hojas en los árboles, y creen que pueden averiguar su esencia investigando su surgimiento y tratando de explicarlo psicológicamente a partir de la naturaleza del alma humana. Pero esta concepción lo aboca todo a lo subjetivo y, si se prosigue hasta el fin, suprime la verdad. Lo que se llama historia de los conceptos es o bien una historia de nuestro conocimiento de los conceptos, o bien de los significados de las palabras. Es frecuente que solo a través de una gran labor intelectual, que puede durar siglos enteros, se consiga conocer un concepto en su pureza, despojándolo de envolturas extrañas que lo escondían al ojo de la mente.

(...)

"Ahora bien, si las matemáticas no deben admitir ningún auxilio por parte de la psicología, en cambio, no pueden negar su estrecha conexión con la lógica. (Gottlob Frege, Introducción a *Los fundamentos de la aritmética*, pp. 13–19 de la ed. de Laia, con leves modificaciones.)

"Espero haber hecho verosímil en esta obra la idea de que las leyes aritméticas son juicios analíticos y que, por consiguiente, son a priori. La aritmética, por tanto, sería solamente una lógica más extensamente desarrollada, y cada enunciado aritmético sería una ley lógica, aunque una ley derivada. Las aplicaciones de la aritmética en la explicación de la naturaleza serían elaboraciones lógicas de hechos observados; calcular sería deducir. Las leyes numéricas no necesitan (. . .) una confirmación práctica para ser aplicables en el mundo exterior; pues en el mundo exterior, la totalidad de lo espacial, no hay conceptos ni propiedades de conceptos, ni números. O sea, que las leyes numéricas no son propiamente aplicables a las cosas externas: no son leyes naturales. Pero sí, en cambio, son aplicables a juicios válidos para cosas del mundo exterior: son leyes de las leyes naturales. No afirman una conexión entre fenómenos naturales, sino una conexión entre juicios."
(Gottlob Frege, Conclusión a *Los fundamentos de la aritmética*, secc. 87, p. 111 de la ed. de Laia.)

§ 2.10. Fracaso del programa de Frege. Frege pretendía definir los números naturales como entidades puramente lógicas. Y parecía haberlo logrado con su laboriosa construcción, partiendo únicamente de la ideas de *concepto* y de *extensión de un concepto*.

En *Los fundamentos de la aritmética*, Frege dedujo de su definición las propiedades más inmediatas de los números naturales. Y en su obra magna, los *Grundgesetze der Arithmetik* ("Las leyes fundamentales de la aritmética"), llevó a cabo una derivación formal rigurosa de los principales resultados de la aritmética natural y del análisis, a partir de esa base.

Frege mantiene un punto de vista claramente platónico con respecto a los conceptos y a las extensiones de los conceptos. Las extensiones de los conceptos, en particular (es decir, los conjuntos de objetos que caen bajo cada concepto), tienen la consideración de objetos en sí mismas. La extensión de cada concepto es tratada en su conjunto como una unidad, es decir, como un nuevo objeto.

Así, los números naturales aparecen caracterizados como objetos, pero como objetos que consisten en las extensiones de determinados conceptos.

En *Los fundamentos de la aritmética*, Frege adopta implícitamente el principio de que si podemos formular de forma precisa un concepto, también podemos asumir la existencia de su extensión (es decir, del conjunto de objetos que lo satisfacen). Dicho en otras palabras, que a cualquier condición precisa y significativa corresponde un conjunto. Es el famoso principio de comprehensión, del que ya hemos hablado. De hecho, el uso de la noción de extensión de un concepto por parte de Frege va íntimamente ligado a la utilización de ese principio, que luego aparecerá formulado como el 5º axioma formal de los *Grundgesetze* (aunque expresado allí de forma distinta, en términos del recorrido de una función: *Wertverlauf einer Funktion*; véanse: Frege, *Los fundamentos de la aritmética*, seccs. 69, 76, 77; *Grundgesetze der Arithmetik*, vol. 1, seccs. 3, 9 y 20; así como Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*, p. 210; y Fraenkel, Bar-Hillel y Levy, *Foundations of Set Theory*, p. 31).

Sin embargo, al aparecer la paradoja de Russell, el principio de comprehensión quedó completamente desacreditado. Y la existencia de aquellos gigantescos conjuntos, o conglomerados de conceptos, que Frege había dado por sentada basándose en el mencionado principio, se vino abajo. Como también se vino abajo, por las mismas razones, el conjunto o "totalidad" de "todas las cosas que pueden ser objeto de mis pensamientos", que había sido postulado con naturalidad por Richard Dedekind en 1888, para demostrar la existencia de un conjunto infinito (*¿Qué son y para qué sirven los números?*, secc. 66, p. 116 de la ed. española).

De este modo, el sistema formal construido por Frege en sus *Grundgesetze* se reveló inconsistente, y sus largas y trabajosas derivaciones resultaron invalidadas de un plumazo.

Tras algunos intentos infructuosos por encontrar una solución con la que salvar su sistema, Frege llegó a la conclusión de que resultaba imposible llevar a cabo la reducción de los números naturales a términos puramente lógicos, al menos por la ruta que él había explorado.

En sus últimos manuscritos, poco antes de morir, Frege escribe, pesimista y frustrado:

> "Mis esfuerzos por aclarar lo que sean los números han conducido a un completo fracaso."
> (1924.)
>
> "(...) Esta expresión ["la extensión de un concepto"] parece designar un objeto a causa del artículo determinado; pero no hay objeto alguno al que así pudiéramos designar correctamente. De aquí han surgido las paradojas de la teoría de conjuntos (...) Y tratando de fundamentar lógicamente los números, yo mismo he caído en esa trampa, al querer considerar los números como conjuntos (...) Las dificultades a las que nos arrastra esta idiosincrasia del lenguaje son incalculables (...) En el lenguaje de las matemáticas se pueden evitar aquellos rasgos del lenguaje hablado que, como hemos visto, conducen a errores lógicos. Sin embargo, la influencia del lenguaje hablado es tan grande, que no siempre son evitados."
> (1924/1925.)
>
> "(...) Me he visto obligado a abandonar la opinión de que la aritmética sea una rama de la lógica y por tanto que todo en la aritmética pueda ser probado lógicamente."
> (1924/1925. Gottlob Frege, *Posthumous Writings* ("Escritos póstumos"), pp. 265, 269–270 y 278 resp.; traducción castellana tomada en parte de las citas contenidas en el Prólogo de la edición de *Los fundamentos de la aritmética* de la editorial Laia, p. 12, reproducidas luego en Mosterín, *Los lógicos*, pp. 61–62.)

Otras propuestas logicistas

§ 2.11. El programa logicista en Russell. A pesar del aparente fracaso del programa logicista, y de la profunda crisis de fundamentos que desencadenó, lo cierto es que el logicismo ha seguido, y sigue hoy día, contando con defensores. Es decir, que sigue habiendo filósofes dedicades a buscar la manera de reformular el planteamiento de Frege de algún modo que lo haga invulnerable a las paradojas, y a encontrar nuevos argumentos que sustenten la reductibilidad de la aritmética a la lógica.

Curiosamente, el primero de estos filósofos fue el propio Bertrand Russell. Russell plantea una filosofía logicista muy similar a la de Frege, pero desarrollada en gran parte después del descubrimiento de las paradojas (y con la firme determinación de llevarla a término a pesar de las paradojas, es decir, resolviéndolas).

A ello dedicó Russell su obra cumbre, escrita conjuntamente con su antiguo profesor, el también matemático y filósofo inglés Alfred North Whitehead: *Principia Mathematica* ("Los principios de la matemática"; publicada en 3 volúmenes, entre 1910 y 1913, y una 2ª edición entre 1925 y 1927; traducción española parcial en Whitehead y Russell, *Principia Mathematica: hasta el *56*).

Los *Principia Mathematica*, además de contener una propuesta detallada para salvar la tesis logicista de las paradojas, desempeñaron también un importante papel en la sistematización y difusión de la nueva lógica formal, convirtiéndose durante muchos años en el principal tratado de referencia sobre la misma.

No hay que confundir esta obra con otra anterior, escrita por Russell como autor único y titulada en inglés *The Principles of Mathematics* (publicada en 1903, y una 2ª ed. en 1937; y ésta sí traducida al castellano en su totalidad, y en dos versiones distintas, bajo el título *Los principios de la matemática*, cf. la Bibliografía general). Para la fecha de publicación de esta obra anterior, la posición de Russell ante las paradojas no estaba claramente fijada, y su teoría de tipos tan solo aparece en un Apéndice y formulada de un modo rudimentario. Otro libro de Russell en el que expone su doctrina logicista a un nivel más divulgativo (y escrito por cierto en la cárcel, en 1919), es su *Introducción a la filosofía matemática*, que también está disponible en traducción completa a nuestra lengua.

§ 2.12. El Principio del Círculo vicioso. Siguiendo una sugerencia de Henri Poincaré, Russell diagnostica que el origen de las paradojas es el llamado *"principio del círculo vicioso"*:

> "Lo que quiera que involucre la totalidad de una colección no debe ser parte de esa colección."
> (*Principia Mathematica*, vol. 1, p. 37; y con distinta traducción en *Principia Mathematica: hasta el *56*, p. 94).

Así pues, de acuerdo con este principio, resulta inaceptable definir un objeto matemático en términos de un conjunto de objetos entre los que se encuentre el objeto definido. Cuando esto ocurre, sostiene Russell, no quedan correctamente caracterizados ni el objeto que queremos introducir, ni el conjunto de objetos al que pertenece. Las definiciones que proceden de ese modo reciben la denominación de *"definiciones impredicativas"*; y es su presencia en las primeras formulaciones de la teoría de conjuntos, según Russell y Poincaré, la causante de las paradojas.

Supongamos, por ejemplo, que la familia Martínez tiene contratado un jardinero a su servicio, jardinero que no tiene ningún parentesco con esta familia. En tal caso, la expresión

"el jardinero de la familia Martínez"

no es impredicativa, porque la familia que se utiliza como referencia para identificar dicho jardinero (la familia Martínez) es un conjunto de personas al cual el jardinero no pertenece.

Mientras que sí sería impredicativa, sin embargo, la expresión

"el padre de la familia Martínez"

porque dicho padre es necesariamente un miembro de la familia en cuestión. Claro está que al padre de la familia Martínez lo podemos describir de otras maneras, además de por referencia a la familia de la cual forma parte. Así por ejemplo, ese hombre tendrá una cara, un nombre, un lugar de nacimiento, etc. En definitiva, disponemos de otras descripciones de esta persona, al margen de identificarlo como un miembro particular de la familia a la que pertenece.

El problema ocurre cuando un objeto matemático solo puede ser caracterizado por referencia a un conjunto de objetos del cual es uno de sus miembros. Es entonces cuando debemos rechazar, según Russell, que el objeto haya sido correctamente definido, y es entonces cuando debemos abstenernos de postular su existencia.

Así ocurre, por ejemplo, con

"el conjunto de todas las cosas distintas de las manzanas"

Este objeto, como conjunto de cosas, se determina por referencia a "todas las cosas que no son manzanas". Y a su vez, el conjunto de "todas las cosas que no son manzanas" se determina por referencia a "todas las cosas", pues es necesario tener delimitado el conjunto de todas las cosas para poder seleccionar, de entre ellas, las que no son manzanas.

Ahora bien, el supuesto "'conjunto de todas las cosas distintas de las manzanas", si ha de ser él mismo un objeto, será miembro del conjunto de "todas las cosas". Y es por ello que la caracterización que acabamos de dar es impredicativa, y resulta ilegítimo, por tanto, postular su existencia sobre la base de dicha caracterización.

Por lo mismo, siguiendo este principio, tampoco es válido postular la existencia de

"el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos"

al ser impredicativa la condición que se utiliza para delimitar el alcance del conjunto definido. En efecto, dicha condición hace mención al "conjunto de todos los conjuntos", para poder delimitar dentro de él a los que no pertenecen a sí mismos. Pero a ese conjunto pertenece, obviamente, el propio conjunto que se intenta caracterizar, por lo que, aplicando el principio del círculo vicioso, esta caracterización es también ilegítima. Y es así como el principio del círculo vicioso bloquea la aparición de la paradoja de Russell: porque aplicando este principio, la expresión "el conjunto de todos los conjuntos que no pertenecen a sí mismos" resulta una definición inaceptable.

Por el contrario, muchos otros conjuntos ordinarios siguen siendo válidos, de acuerdo con este principio. Como el "conjunto de todas las manzanas", por ejemplo, que se define por apelación a las manzanas, sin que el conjunto definido sea él mismo una manzana, ni haya ninguna otra impredicatividad en la definición.

§ 2.13. La teoría de tipos. En los *Principia Mathematica*, Russell desarrolla un sistema teórico enormemente original, que respeta a la perfección el principio del círculo vicioso, y está por tanto libre, al menos aparentemente, de la amenaza de las paradojas. Se trata de la *"teoría de tipos lógicos"*.

La teoría de tipos consiste en una estratificación del universo de discurso en una jerarquía de niveles perfectamente diferenciados. Esta jerarquía se subdivide a su vez en dos capas de complejidad, la *teoría simple* y la *teoría ramificada*. La primera jerarquía corresponde a la *teoría simple de tipos*, y consiste esencialmente en la diferenciación de estratos o niveles que a continuación se describe:

tipo 0: individuos (objetos simples)

tipo 1: conjuntos de individuos

tipo 2: conjuntos de conjuntos de individuos

...

Esto es: hay un tipo 0, en el que están contenidos los individuos. A continuación hay un tipo 1, en el que están contenidos los conjuntos de objetos del tipo 0, es decir, los conjuntos de individuos. A continuación hay un tipo 2, en el que están los conjuntos que contengan objetos del tipo 1, es decir, todos conjuntos entre cuyos elementos haya conjuntos de individuos. Y así sucesivamente.

Así por ejemplo, si entre los individuos del tipo 0 tenemos ovejas, entonces en el tipo 1 tendremos rebaños de ovejas. En el tipo 2 tendremos, a su vez, conjuntos de rebaños de ovejas (el conjunto de rebaños de ovejas que pastan en España, pongamos por caso). En el tipo 3 tendremos conjuntos de conjuntos de rebaños (por ejemplo, el conjunto formado por el conjunto de rebaños de España, el conjunto de rebaños de Italia y el conjunto de rebaños de Portugal). Y así sucesivamente.

A la jerarquía simple de tipos se superpone, a continuación, la *teoría ramificada*. La teoría ramificada de tipos consiste en diferenciar dentro de cada tipo una escala infinita de *órdenes*, de acuerdo con el nivel a que pertenezcan los objetos utilizados en la definición de cada objeto dado. Sin entrar en detalles sobre el engranaje técnico de este sistema, baste decir que sus reglas de funcionamiento restringen la formación de aquellas expresiones que no respeten la estructura lógica de la jerarquía de tipos.

Así por ejemplo, la jerarquía de tipos impide la formación de expresiones que indiquen que un determinado objeto del tipo 1 pertenece a otro del tipo 0. Ello es imposible, dado que en el tipo 0 solo hay individuos, y estos pueden pertenecer a los objetos del tipo 1 (que son conjuntos de individuos), pero no al revés. En general, la expresión

$$“A \in B”$$

es decir, "A pertenece a B", solo resulta aceptable cuando el tipo del objeto A es inferior al del objeto B.

Cuando una expresión infringe las reglas del sistema, se considera que está mal formada (es decir, que no significa nada) y queda fuera de la teoría. Eso es lo que ocurre, en particular, con la expresión "$R \in R$", ya que cualquiera que sea el objeto R, siempre tendrá el mismo tipo que sí mismo. Y es así como la teoría de tipos evita que la paradoja de Russell se pueda llegar a producir.

§ 2.14. La derivación de la aritmética dentro de la teoría de tipos. Dentro de este marco teórico, Russell propone una definición de los números naturales inspirada en la definición que había elaborado Frege, pero con variantes. El número 1, por ejemplo, está representado por el conjunto de todos los conjuntos unitarios, es decir, por el conjunto de todos los conjuntos con 1 elemento.

Sin embargo, dado que en la teoría de Russell los conjuntos vienen distribuidos por tipos, los conjuntos unitarios, en particular, serán distintos en cada uno de los tipos de la jerarquía. Y habrá, por tanto, muchos "conjuntos de conjuntos unitarios", dependiendo del nivel en el que nos movamos. Ello tiene como consecuencia que el número 1, tal y como lo define Russell en su sistema, aparece "ramificado" en una infinidad de objetos distintos, pertenecientes a distintos tipos de la jerarquía.

Es decir, que en cada tipo lógico, al menos a partir de un determinado nivel, hay un objeto que hace las veces de "número 1" y se comporta como tal. Pero este objeto es distinto al que desempeña el mismo papel en el tipo siguiente, y así sucesivamente. Esto resulta bastante farragoso y poco intuitivo.

Además, para fundamentar la existencia de infinitos números naturales, Russell se ve obligado a postular un *axioma de infinitud*, mediante el cual estipula por decreto que existen infinitos objetos. Russell necesita este axioma para garantizar la existencia de infinitos tipos lógicos, así como la existencia de infinitos números naturales dentro de cada tipo. Y para poder desarrollar el análisis matemático, ha de echar mano asimismo del polémico *axioma multiplicativo*, o *axioma de elección*, que ya hemos mencionado, y sobre el que volveremos en el Módulo 4.

Por si ello no bastara, Russell se ve obligado también a introducir un artificioso *axioma de reducibilidad*, que estipula cierta forma de coordinación, nada evidente, entre los distintos órdenes de cada tipo (cf. *Principia Mathematica: hasta el *56*, pp. 112–117). Todos esos ingredientes, en fin, dotan a la teoría de tipos de un grado de artificialidad que hace dudar muy mucho de la naturaleza lógica de dicha teoría.

§ 2.15. La derivación de la aritmética en la teoría axiomática de conjuntos. Por su parte, en la teoría axiomática de conjuntos, de la que ya hemos hablado (cf. § 1.38, p. 32), se lleva a cabo también una reconstrucción de la aritmética natural, así como de la práctica totalidad de las teorías matemáticas, pero con un grado de artificialidad comparable al de la teoría de tipos lógicos de Russell.

En la teoría axiomática, para empezar, la construcción de conjuntos aparece mediatizada por el engranaje de la teoría: no se puede dar por supuesta la existencia de ningún conjunto que se nos ocurra formular, sino que hay que demostrarla paso a paso a partir de los axiomas. Ello descarta como conjuntos a aquellos conglomerados gigantescos que habían postulado Frege y Dedekind. Tales conglomerados no son conjuntos, en efecto, porque no hay forma de definirlos utilizando los axiomas de la teoría.

En su lugar, para definir a los números naturales, la teoría axiomática de conjuntos escoge unos determinados conjuntos, aparentemente sin nada de particular, pero que resultan técnicamente convenientes para ejercer esa función. De este modo, el 0 se define como el conjunto vacío:

$$0 =_{def.} \varnothing$$

El 1 se define como aquel conjunto cuyo único elemento es el 0:

$$1 =_{def.} \{ 0 \}$$

El 2 se define como aquel conjunto cuyos únicos elementos son el 0 y el 1:

$$2 =_{def.} \{ 0, 1 \}$$

Y así sucesivamente. A partir de aquí se edifica la llamada *"teoría de los ordinales y cardinales"*, debida al gran matemático y lógico John von Neumann, y que también es reflejo en buena medida de la construcción fregeana, pero notablemente modificada.

En la teoría axiomática de conjuntos resulta necesario utilizar el axioma de infinitud, que se postula sin más, y que tiene el efecto de asegurar que la construcción de los números naturales pueda continuarse hasta el infinito. También suele estar presente el axioma de elección. Y también se suele utilizar el axioma de regularidad, que ya comentamos, para impedir que ningún conjunto pueda ser miembro de sí mismo.

La formulación de esos axiomas queda muy lejos de hacerlos aparecer como verdades lógicas. Más bien revisten el aspecto de postulados matemáticos, que obedecen a una utilidad matemática. Y es así como son considerados por la mayor parte de autores.

§ 2.16. Más logicistas notables. La filosofía logicista de la matemática ha tenido más defensores notables, además de Frege y Russell, y los sigue teniendo. El propio Alfred Whitehead, por supuesto, compartía las tesis que plasmó con Russell en su gran obra conjunta. Y el matemático alemán Richard Dedekind también abrazó una forma de logicismo en su obra de 1888, *¿Qué son y para qué sirven los números?*, a la que ya nos hemos referido.

Después, otres como Carnap, Hempel, Church, Wittgenstein o Quine, han defendido el logicismo en algún momento de su carrera, contribuyendo con sus esfuerzos a profundizar en esta concepción filosófica. Ello no obstante, Wittgenstein por ejemplo cambió radicalmente su visión sobre la fundamentación de la matemática a partir de cierto momento de su vida, adoptando el tipo de perspectiva convencionalista de la que nos ocuparemos en el Módulo 5. Y otro tanto cabe de decir de Quine, en una deriva distinta (cf. Módulo 6).

Más recientemente, dos defensores tenaces de la filosofía logicista de la matemática han sido los profesores Bob Hale y Crispin Wright, cuyas principales aportaciones están contenidas en los siguientes libros (ninguno de ellos traducido aún a nuestra lengua):

C. Wright, *Frege's Conception of Numbers as Objects* (1983).

B. Hale, *Abstract objects* (1987).

B. Hale y C. Wright, *The Reason's Proper Study: Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics* (2001).

La línea general que siguen estos autores es tratar de formular un *principio de abstracción* que permita estipular la existencia de objetos abstractos de cualquier tipo, siempre que cumplan unos determinados criterios. Dicho principio sería aplicable también para legitimar la existencia de los objetos matemáticos, como objetos abstractos que son; y substituiría al principio de comprehensión que usó Frege, y que tan mal destino tuvo. Los intentos de formulación de este principio de abstracción van ligados al comportamiento lingüístico de los términos para el objeto abstracto en cuestión, así como a la estructura lógica subyacente (siguiendo una metodología de análsis lógico-lingüístico, de inspiración claramente fregeana también).

No obstante, las dificultades para encontrar una versión satisfactoria de dicho principio son muy arduas, y está por ver cuál sea la recepción que se prodigue a esta propuesta a largo plazo. Una concisa crítica de esta línea de investigación puede encontrarse en el artículo de Dummett, "La existencia de los objetos matemáticos", en la revista *Teorema* 17(2), 1998, pp. 5–24.

MÓDULO 3

El formalismo

Las bases del método formal axiomático

§ 3.1. Presentación de la posición formalista. El punto de vista *formalista* con respecto a una teoría matemática es aquel según el cual esa teoría consiste únicamente en un conjunto de manipulaciones simbólicas, efectuadas de acuerdo con ciertos patrones constantes. Es decir, de tal modo que lo que subyace a la teoría es un entramado de reglas para operar con los signos matemáticos, y transformarlos de una determinada manera, pero sin que dichos signos tengan contenido alguno, ni se refieran a ningún dominio particular de objetos.

En definitiva, la teoría matemática sería, según esta filosofía, "pura forma" carente de contenido, y de ahí la denominación de *"filosofía formalista"*.

Lo que hay en el fondo de una teoría matemática, según esto, es un mero juego de símbolos. Aprender la teoría consiste en interiorizar las reglas de ese juego, adquiriendo el dominio en su uso. Y cuando calificamos un enunciado matemático como "verdadero", lo que estamos haciendo es señalar que dicho enunciado resulta conforme con las reglas del juego correspondientes a la teoría en cuestión.

El primer objetivo de la filosofía formalista es el de reformular las distintas teorías matemáticas mediante una descripción explícita y detallada del sistema de reglas que subyace supuestamente a cada una de ellas. Una vez que tengamos a la vista esos sistemas, resultará patente, de acuerdo con esta filosofía, que en ellos se encierra todo el interés suscitado por las teorías matemáticas correspondientes.

El segundo objetivo básico de les formalistas es analizar las propiedades de tales sistemas de reglas, principalmente con vistas a mostrar su consistencia, esto es, la coherencia de las reglas recopiladas, unas respecto a otras.

§ 3.2. Las bases del método formal axiomático. Para describir adecuadamente las reglas o patrones simbólicos que subyacen a una teoría matemática, así como para el estudio de sus propiedades, el formalismo utiliza el llamado "método formal axiomático", del cual vamos a hablar en el presente apartado. Como su propio nombre indica, este método consiste en una combinación de dos métodos o procedimientos, de distinto origen y naturaleza: el método formal y el método axiomático.

El método axiomático es muy antiguo, se remonta a Aristóteles (que fue quien lo concibió) y a Euclides (que fue el primero en elaborar un tratado completo de acuerdo con sus dictados). Dicho método consiste esencialmente en reducir una teoría a un conjunto limitado de *"postulados básicos"* (o *"axiomas"*), a partir de los cuales se pueda deducir cualquier otro enunciado que pertenezca a esa teoría. El tratado escrito por Euclides mediante la utilización del método axiomático es la obra *Elementos*, de la que ya hemos hablado (cf. p. 16) y sobre la que enseguida volveremos.

El método formal, por su parte, se basa en la elaboración de un lenguaje artificial, completamente especificado de antemano, que permita representar con la máxima claridad la estructura lógica de los enunciados matemáticos y sus demostraciones. La creación del método formal fue debida principalmente a Frege, como ya sabemos, a finales del siglo XIX.

Pero con el fin de entender mejor la relación entre ambos métodos, así como el papel que desempeñaron en la gestación del ideario formalista, nos vamos a interesar antes por un episodio singular en la historia de la matemática, acaecido en la primera mitad del siglo XIX. Un episodio tan sorprendente y revelador, que resulta de inexcusable referencia para cualquier introducción a la filosofía de la matemática que se precie: el descubrimiento de la geometría no euclídea. Para una introducción asequible a esta cuestión, complementaria a la exposición que vamos a hacer aquí, puede consultarse el artículo de Poincaré, "Las geometrías no euclidianas", en su libro *Filosofía de la ciencia*, pp. 145–161 (también recogido en su *Ciencia e hipótesis*, pp. 89–103).

§ 3.3. Los Elementos. La geometría es la parte de las matemáticas que se encarga del estudio del espacio y sus propiedades; es decir, del estudio de nociones como *punto*, *recta*, *plano*, *ángulo*, las figuras geométricas, sus transformaciones y las relaciones entre todas ellas.

El primer gran tratado de geometría fueron los *Elementos* de Euclides, del siglo III a. C. Se conoce también como los "Elementos de geometría", y está dedicado principalmente a esta rama de las matemáticas, aunque contiene aportaciones a otras partes, basadas en el uso de un lenguaje geométrico o parcialmente geométrico (como la demostración de la infinitud de los números primos, por ejemplo, a la que nos referimos en su momento).

Euclides se propuso exponer de forma sistemática todo el conocimiento acumulado en la geometría de su tiempo. Y para ello confeccionó una lista de conceptos básicos, a los que caracterizó mediante definiciones escuetas, y enunció un reducido número de postulados fundamentales, como base en la que apoyar todas las demostraciones de la obra (cf. *Elementos*, Libro I, Definiciones, Postulados y Nociones comunes, pp. 189–201 del vol. 1 de la edición española).

Partiendo de dicha plataforma, Euclides procedió a definir nuevos conceptos en términos de los primeros, y a demostrar un larguísimo número de enunciados geométricos, siempre sobre la base de los axiomas establecidos al principio.

De este modo, los *Elementos* de Euclides se convirtieron, no solo en el primer gran tratado escrito siguiendo el método axiomático, sino en la referencia por antonomasia de la aplicación de este método, hasta finales del siglo XIX.

§ 3.4. Los cinco postulados de Euclides. De los postulados fundamentales en los que se basó Euclides, hay un primer grupo de cinco, de contenido puramente geométrico, y a continuación un segundo grupo de principios de carácter más general. Son esos cinco primeros postulados los que se conocen habitualmente como *"los postulados de Euclides"*.

Sin entrar en detalles sobre el papel que juega cada uno, conviene que los tengamos a la vista, si bien los presentaremos en una formulación algo modificada, transcritos a un lenguaje actual:

1. Por cualesquiera dos puntos distintos pasa una única recta.
2. Cualquier segmento determina una única recta, que contiene a todos sus puntos.
3. Dado un punto cualquiera, y un segmento que lo tenga como extremo, existe un único círculo con dicho punto como centro y dicho segmento como radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si dos rectas distintas son cortadas por una tercera, formando a uno de los lados ángulos internos cuya suma es menor que dos rectos, al prolongarlas indefinidamente se cortarán por ese lado.

(cf. Euclides, *Elementos*, Libro I, Postulados, pp. 197–198 del vol. 1 de la edición española; y para una versión similar a la nuestra, Dou, *Fundamentos de la matemática*, p. 20.)

Un comentario resulta obligado con respecto al cuarto postulado: los ángulos rectos no los definió Euclides como aquellos que miden 90º, en cuyo caso resultaría absurdo introducir como postulado el hecho de que sean todos iguales. La definición de Euclides procede a partir de las rectas *perpendiculares*, caracterizando éstas como aquellas que al cortarse forman ángulos adyacentes de la misma magnitud, y definiendo entonces el ángulo recto como cada uno de esos ángulos adyacentes, o contiguos, así formados.

§ 3.5. El axioma de las paralelas. Además, llama la atención la mayor complejidad del quinto postulado con respecto a los otros cuatro. De hecho, aunque estos cinco postulados fueron recibidos como verdades evidentes, y como descripciones cabales del espacio físico real (y así permanecerían hasta comienzos del siglo XIX), una pequeña duda existió siempre con respecto al quinto de ellos.

Ya Ptolomeo, en el siglo II después de Cristo, intentó demostrar el quinto postulado deduciéndolo de los otros cuatro. Y desde entonces, durante los dieciséis siglos posteriores, se sucedieron innumerables intentos de hacer lo mismo.

En muchos de estos intentos sucedía algo curioso. En la búsqueda de un camino para demostrar el quinto postulado a partir de los otros cuatro, se solía infiltrar alguna otra proposición geométrica, tampoco deducible de ellos, y que al final resultaba ser muchas veces una formulación equivalente al postulado que se quería demostrar. Lo que se encontraba, en definitiva, no era una prueba del quinto postulado, ni una demostración del quinto postulado a partir de los otros axiomas, sino sencillamente, otra forma distinta de expresar el quinto postulado.

Una de esas proposiciones, equivalentes al quinto postulado de Euclides, es la que dice que

Los ángulos internos de un triángulo suman 180º.

Otra, la más sencilla de entender, establece que

Por un punto exterior a una recta pasa una y solo una paralela.

El hecho de que estas formulaciones sean equivalentes al quinto postulado de Euclides se traduce en lo siguiente: utilizando el quinto postulado de Euclides se puede demostrar cualquiera de esas otras formulaciones, y a la inversa, utilizando cualquiera de ellas se puede demostrar a su vez el quinto postulado de Euclides.

De hecho, no es difícil establecer la conexión entre las tres versiones que hemos dado aquí, aunque se trata de un detalle poco relevante para nosotres, y en el que no nos detendremos (cf. por ejemplo Hilbert, *Fundamentos de geometría*, pp. 32–33, recordando que las rectas paralelas son aquellas que estando en el mismo plano nunca se cortan, que 180º es la suma de dos rectos, y que dos rectas cortadas por una tercera formarán un triángulo si y solo si *no* son paralelas).

La proposición de las paralelas (es decir, la última formulación que hemos dado, la más sencilla de entender) está inspirada en la Proposición 31 del propio Libro I de los *Elementos* (p. 241 de la ed. española). Su primera formulación explícita se debe a Proclo, en el siglo V después de Cristo, y desde 1795 fue popularizada por el matemático escocés John Playfair. Tanto ha llegado a generalizarse el uso de esta formulación, que el quinto postulado de Euclides ha pasado a ser conocido como "el axioma de las paralelas", y las más de las veces aparece recogido con esa formulación, equivalente a la que Euclides originalmente recogió.

§ 3.6. El descubrimiento de la geometría hiperbólica. Pues bien, después de tantos intentos por demostrar que el quinto postulado era deducible de los cuatro primeros, el trabajo de algunos matemáticos audaces durante la primera mitad del siglo XIX consiguió establecer un hecho sorprendente: que el quinto postulado de Euclides no solo era *independiente* de los otros cuatro, sino que resultaba posible apartarse del mismo, utilizando en su lugar principios incompatibles con él, y desarrollar toda una geometría alternativa a la geometría euclídea (o euclidiana), mediante la utilización de esos otros principios.

Posiblemente, el primero en llegar a la conclusión de que el axioma de las paralelas no era una verdad física a priori, y que incluso cabía plantear una verificación empírica de su validez, fue el monumental matemático alemán Carl Friedrich Gauss, a principios del siglo XIX.

Frustrado por sus propios esfuerzos en demostrar la deducibilidad del axioma de las paralelas a partir de los otros cuatro postulados, Gauss empezó a explorar la posibilidad de una geometría distinta, en la que tal axioma fuera sencillamente rechazado. De este modo, se convirtió en el principal precursor de la geometría no euclidiana (aunque nunca se atrevió a publicar sus trabajos sobre esta materia, por temor al ridículo y a la incomprensión, como él mismo explica en su correspondencia; cf. Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, vol. 3, capítulo 36, "La geometría no euclídea", p. 1150).

Además, Gauss llegó a realizar una medición real de la suma de ángulos internos de un gran triángulo, formado por los vértices de tres montañas cercanas a su ciudad, con la intención de comprobar si la suma era efectivamente de 180º. Aunque la medición efectuada vino a dar un resultado superior, no fue concluyente, porque la diferencia era muy pequeña, y quedaba comprendida en la probabilidad de error observacional, dados los instrumentos de medida utilizados.

Poco tiempo después de esta primera incursión, apareció la primera teoría geométrica que desarrollaba de forma sistemática una premisa contraria al quinto postulado. Fue publicada en 1829 por el matemático ruso Nikolai Lobachevsky, y tres años después, de forma independiente, por el húngaro Janos Bolyai.

La geometría de Lobachevsky y Bolyai era similar a la que había pergeñado Gauss, y se conoce hoy día como *"geometría hiperbólica"*. Está elaborada sobre la premisa de que por un punto exterior a una recta pasa *más de una* paralela. A partir de esta suposición, se demuestra que pasan en realidad un número infinito de ellas. Y se demuestra también, dada esa premisa inicial, que la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre menor de 180º.

El "plano hiperbólico" se suele representar no como un plano, sino como una superficie curva, semejante a la de una silla de montar a caballo. Ello se hace así para conseguir acomodar nuestras intuiciones geométricas a este otro sistema, que tanto se aparta, en principio, de ellas.

§ 3.7. El descubrimiento de la geometría elíptica. Por si eso fuera poco, dos décadas más tarde apareció otro sistema de geometría distinto a la euclidiana, y distinto también a la explorada por Lobachevsky y Bolyai. Es lo que se conoce hoy día como *"geometría elíptica"*, y fue descubierta por un discípulo de Gauss, Bernhard Riemann, que la hizo pública en 1854, al leer su tesis de habilitación como profesor en la Universidad de Gotinga.

En la geometría elíptica, el quinto postulado de Euclides se sustituye por la suposición contraria a la adoptada por la geometría hiperbólica, esto es, por la suposición de que por un punto exterior a una recta no pasa *ninguna* paralela. A partir de dicha suposición, resulta inmediato concluir que en la geometría elíptica no existen las rectas paralelas en absoluto: todas las rectas se cortan en algún punto. También cae el primer postulado (en la formulación que hemos dado aquí), ya que hay parejas de puntos por los que pasan infinitas rectas distintas, y no solo una. Por último, la suma de los ángulos internos de un triángulo resulta ser, en este sistema, mayor de 180º.

El "plano elíptico", que tampoco concuerda con nuestras intuiciones geométricas inmediatas, se suele representar a su vez como una superficie curva, pero similar en este caso a la de una esfera.

Con posterioridad, Riemann elaboró otra teoría geométrica todavía más general, que es la llamada "geometría riemanniana". En la geometría riemanniana quedan comprendidos una infinidad de espacios geométricos distintos, el abanico de los llamados "espacios de curvatura variable". Entre esos espacios, las tres geometrías anteriores aparecen como casos particulares, los más sencillos posibles: la geometría hiperbólica y la geometría elíptica constituyen espacios de curvatura fija, o constante (negativa y positiva, respectivamente), mientras que la geometría euclidiana constituye un espacio de curvatura cero, esto es, un espacio sin curvatura.

Precisamente uno de esos espacios de curvatura variable de la geometría riemanniana fue el adoptado por Einstein, a principios del siglo XX, para su teoría general de la relatividad. De lo cual se deduce que si la teoría general de la relatividad es una descripción correcta del espacio físico de nuestro universo, éste no constituye un espacio euclidiano, sino un espacio de curvatura variable de la geometría riemanniana.

§ 3.8. La naturaleza de los postulados geométricos. El descubrimiento de la geometría no euclídea ha supuesto, en palabras del filósofo y matemático Hilary Putnam,

> "el evento más importante en la historia de la ciencia, para la epistemología" (Putnam, *Philosophical Papers*, vol. 1, p. x).

Y, en efecto, para muches filósofes de la matemática la sola existencia de las geometrías no euclidianas demuestra el carácter empírico de esta rama de las matemáticas; es decir, demuestra que la geometría es una ciencia empírica más, como el resto de ciencias de la naturaleza, cuyas verdades solo se pueden establecer por medio de la experiencia.

Pero esa es solo una reacción posible ante la aparición de las geometrías no euclidianas. Otra posibilidad es considerar que los postulados de los distintos sistemas geométricos no son verdaderos ni falsos, sino simples construcciones simbólicas, que después se pueden intentar aplicar o no a distintos dominios. En consecuencia, según este punto de vista, el valor de los axiomas residiría en el marco teórico que constituyen por sí mismos. Tal es precisamente la posición que adopta la escuela formalista, de la que nos estamos ocupando en este módulo, y que tiene en la existencia de las geometrías no euclídeas uno de sus principales apoyos y fuentes de inspiración. Y es que la doctrina formalista, como veremos, encaja como un guante con esta situación de coexistencia pacífica de sistemas axiomáticos incompatibles entre sí, pero valiosos y dignos de interés cada uno en sí mismo, que es justamente la situación a que dio lugar el advenimiento de las geometrías no euclidianas.

Finalmente, una tercera reacción posible ante la existencia de estos nuevos sistemas, es la de seguir manteniendo a la geometría euclídea como única geometría verdadera de la matemática pura, sobre la base de que solo ella concuerda con nuestras intuiciones constitutivas acerca del espacio. Esta última podría ser aproximadamente la opinión de Frege, por ejemplo, que siempre consideró a la geometría y a la aritmética como ramas de la matemática esencialmente distintas, y nunca se propuso reducir la geometría a la lógica ni a ninguna otra cosa (cf. su correspondencia con Hilbert, en Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*, esp. p. 43).

§ 3.9. Una nueva concepción del método axiomático. El descubrimiento de la geometría no euclídea, además de obligar a un replanteamiento sobre la naturaleza de los principios geométricos, originó también una nueva forma de concebir el método axiomático, distinta a la que se había considerado hasta entonces.

En efecto, de acuerdo con la antigua concepción del método axiomático, forjada por Aristóteles y Euclides, los axiomas de una teoría constituyen las verdades más básicas y evidentes de la misma. Es decir, que los axiomas constituyen las verdades más elementales, a partir de las cuales se deriva todo lo demás.

Sin embargo, tras la aparición de las geometrías no euclídeas, se constató que la geometría euclidiana seguía teniendo un interés intrínseco, junto con las otras teorías descubiertas. En efecto, casi nadie puso en duda que la construcción axiomática elaborada por Euclides siguiera siendo valiosa, aún después de que la verdad supuestamente "evidente e indubitable" de su quinto postulado hubiera quedado en entredicho. Así pues, la teoría de Euclides seguía teniendo importancia como construcción axiomática en sí misma, esto es, como procedimiento sintético para representar un determinado sistema geométrico, con independencia de que se tratara de un sistema geométrico verdadero o no.

Y así surgió una nueva concepción del método axiomático: aquella según la cual los axiomas de una teoría no tienen por qué ser proposiciones evidentes, ni siquiera verdaderas, sino que pueden ser *cualesquiera enunciados de la teoría, escogidos de tal forma que permitan derivar cualquier otro enunciado de la misma.*

§ 3.10. Definiciones implícitas. Por añadidura, de acuerdo con esta nueva concepción, ya no resulta necesario empezar la construcción axiomática de una teoría definiendo sus objetos básicos, como había hecho Euclides. Al contrario, lo propio a la nueva concepción del método axiomático es considerar que son los axiomas por sí mismos los que proporcionan, implícitamente, la definición de tales objetos.

Ello tiene esta curiosa consecuencia: si la teoría no define los objetos de los que trata, sino que solo los caracteriza mediante los axiomas, entonces cualquier conjunto de individuos que satisfaga esos axiomas podrá considerarse un legítimo objeto de la teoría en cuestión. Es por ello que las teorías axiomáticas no tienen un dominio de objetos definido, sino que son aplicables a cualquier dominio de objetos en el que se cumplan los axiomas de la teoría.

En este contexto, cuando un conjunto de objetos satisface los axiomas de una teoría axiomática, entonces decimos que dicha teoría es "verdadera acerca de esos objetos", o que dicha teoría "se encuentra realizada" (o "tiene un modelo") en ese dominio de objetos. De este modo, el valor de la teoría como construcción axiomática aparece desligado de cualquier interpretación particular de sus postulados (así como de cualquier pretensión de ser "verdadera" en un sentido general o universal).

Tal es la concepción del método axiomático que se encuentra a la base del ideario formalista, y tal es la concepción que será preconizada por la citada escuela, no solo para la geometría, sino para todas las teorías matemáticas.

§ 3.11. Combinación con el método formal. El método axiomático así concebido encuentra un complemento feliz en el método formal, que consiste, como ya hemos visto, en el diseño de un lenguaje artificial íntegramente especificado de antemano, para representar la estructura lógica de los enunciados matemáticos y de sus demostraciones.

Hoy sabemos que el método formal es en buena medida independiente del método axiomático: en efecto, existen sistemas formales adecuados para la lógica de primer orden, y para otras teorías matemáticas, que no contienen axiomas en absoluto. Esto se consigue sustituyendo los axiomas por las llamadas "reglas de inferencia", que vienen a desempeñar una función equivalente a los axiomas, con lo que al final la potencia demostrativa es la misma.

Frege no conocía este recurso, que se descubrió poco después. Frege utilizaba axiomas, y axiomas formales, y en este sentido se puede decir que fue precursor del método formal axiomático. Pero lo interpretaba de manera muy distinta a como se hace bajo la escuela formalista, ya que para él no tenía sentido elaborar un sistema de axiomas en cuya verdad no creyese firmemente (de hecho, él creía en la verdad de los axiomas que utilizó para su formalización de la aritmética, incluido el axioma 5º, hasta el momento en que Russell demostró que llevaba a contradicción; cf. otra vez su correspondencia con Hilbert, en Frege, *Phil. and Math. Correspondence*, p. 43).

Lo característico de la filosofía formalista, por el contrario, es que aspira a reducir las teorías matemáticas a mecanismos de transformación de símbolos, sin pretensión alguna sobre su posible significado o su verdad. La propuesta es sacar a la luz tales mecanismos de transformación, para que se vea que el método formal axiomático permite (o al menos permitiría, en principio) reemplazar cualquier teoría matemática por una representación formal suya.

El programa formalista de Hilbert

§ 3.12. Los cinco axiomas de Peano. El principal precursor de la escuela formalista fue el matemático italiano de la Universidad de Turín, Giuseppe Peano. Junto con Gottlob Frege y Richard Dedekind, Peano fue el otro matemático notable que se dedicó a investigar los fundamentos de la aritmética a finales del siglo XIX (una monografía comparativa de sus propuestas respectivas la tenemos en Gillies, *Frege, Dedekind and Peano on the Foundations of Arithmetic*).

Peano publicó en 1889 una pequeña obra escrita en latín, y titulada *Arithmetices principia: nova methodo expositia* (*Los principios de la aritmética expuestos con un nuevo método*). En este libro, Peano lleva a cabo una reconstrucción de la aritmética elemental, en un lenguaje completamente formalizado que había desarrollado él mismo (diferente al de Frege), y que también constituyó una contribución importante en los orígenes de la nueva teoría lógica.

En *Los principios de la aritmética*, Peano trata de derivar toda la aritmética a partir de nueve axiomas fundamentales. De esos nueve axiomas, hay cuatro que regulan la relación de igualdad y cinco de contenido propiamente aritmético. Son estos últimos, los axiomas aritméticos en los que se basa Peano para su construcción, los que se conocen habitualmente como *"axiomas de Peano"*.

Transcritos a nuestro lenguaje actual y ligeramente reformulados, podemos presentar los cinco axiomas de Peano de la manera siguiente:

1. El cero es un número.

2. Todo número tiene un sucesor, que es otro número.

3. Dos números con sucesores iguales son iguales.

4. El cero no es el sucesor de ningún número.

5. Si una propiedad se aplica al cero, y al sucesor de cualquier número que la tenga, entonces se aplica a todos los números.

(cf. Peano, *Los principios de la aritmética*, p. 59; y para una presentación similar a ésta, Garrido, *Lógica simbólica*, p. 319.)

Los números así descritos son nuestros números naturales, qué duda cabe. Recordemos que el sucesor de un número no es más que el siguiente, como ya dijimos (cf. p. 18). Y en cuanto al quinto axioma, es el llamado *"principio de inducción matemática"*, o *"principio de inducción completa"* (que, por cierto, nada tiene que ver con la *inducción empírica*, por la cual proyectamos nuestra experiencia para formular hipótesis generales acerca del mundo exterior).

La inducción matemática se usa como principio de razonamiento en multitud de pruebas y demostraciones, especialmente en aritmética, así como también en la metateoría de la propia lógica formal. Aunque a primera vista no lo parezca, se trata de un principio equivalente a aquel *principio del número menor*, que mencionamos en p. 18 (para una prueba de esta equivalencia, cf. Machover, *Set theory, logic and their limitations*, pp. 6–8).

Estos axiomas, que Peano expone en lenguaje formalizado, los tomó de Dedekind, precisamente de su libro de 1888 del que ya hemos hablado (*¿Qué son y para qué sirven los números?*; cf. Definición 71, p. 118 de la ed. española). Sin embargo, tales axiomas no eran para Dedekind más que una primera caracterización, un punto inicial a partir del cual buscar la manera de definir los números naturales en términos de nociones más básicas. Mientras que para Peano, por el contrario, la única definición posible de los números naturales estaba encerrada en los propios axiomas, y no cabía ir más allá:

> "He representado mediante signos todas las ideas que aparecen en los principios de la aritmética, de modo que cualquier proposición quede enunciada exclusivamente mediante estos signos.
> "(...) Los axiomas (...) expresan las propiedades fundamentales de los signos que carecen de definición."
> (Peano, *Los principios de la aritmética*, pp. 31–33.)

En otro librito publicado por Peano ese mismo año, venía a decir lo mismo, pero aplicado a los conceptos básicos de la geometría:

> "Tenemos, por tanto, una serie de entes llamados puntos. Estos entes no están definidos. Quien lea esto puede entender (...) cualquier categoría de entes (...) Los axiomas serán satisfechos o no dependiendo del significado asignado a los signos no definidos."
> (Peano, *I principi di geometrìa: lògicamente esposti*, citado en la Introducción a Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, p. XXVII.)

§ 3.13. David Hilbert: los Fundamentos de la geometría. Con las citadas obras, Peano sentó las bases de lo que habría de ser la concepción formalista de las matemáticas; pero el representante por excelencia de esta escuela sería sin duda el gran matemático alemán David Hilbert.

La primera contribución de Hilbert a los fundamentos de la matemática es su obra de 1899, *Grundlagen der Geometrie* (*Fundamentos de la geometría*, disponible en edición española, con traducción algo deficiente). Hilbert era ya un matemático muy conocido por aquella época, aunque apenas se había ocupado de la geometría con anterioridad.

En los *Fundamentos de la geometría*, Hilbert se propone reconstruir el sistema axiomático de la geometría euclídea, mejorando la estructura diseñada por Euclides dos mil años atrás. Como él mismo explica al comienzo de la obra,

> "La geometría, lo mismo que la aritmética, necesita solamente para su consecuente construcción de unas pocas y sencillas proposiciones fundamentales.
>
> "Estas proposiciones fundamentales se llaman *axiomas* de la geometría. El poner de manifiesto los axiomas de la geometría y averiguar sus conexiones es problema que se encuentra discutido desde tiempos de Euclides en numerosos y excelentes tratados de la literatura matemática (. . .)
>
> "La presente investigación es un nuevo ensayo para construir la geometría sobre un sistema *completo de axiomas, lo más sencillo posible*, deduciendo de él los más importantes teoremas, de manera tal, que en ese proceso aparezcan con la máxima claridad la interpretación de los distintos grupos de axiomas y el alcance de las consecuencias que aisladamente se deriven de cada uno de ellos."
>
> (Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, p. 1.)

Aunque, ciertamente, Hilbert no había sido el primero que se propusiera mejorar el edificio axiomático construido por Euclides, sí fue el que consiguió un resultado más logrado, y sus *Fundamentos de la geometría* se convirtieron con rapidez en un clásico.

Además, Hilbert (a diferencia de Euclides) estaba en disposición de demostrar la independencia del axioma de las paralelas con respecto a los demás axiomas. En efecto, la propia existencia de las geometrías no euclídeas, que desarrollaban de forma coherente proposiciones contrarias al axioma de las paralelas, bastaba para establecer que dicho axioma era independiente del resto.

§ 3.14. La necesidad de una prueba de consistencia. Sin embargo, a diferencia de Euclides (y a semejanza de Peano), Hilbert no sintió la necesidad de comenzar su obra definiendo los conceptos básicos de la geometría, como *punto*, *recta* y *plano*. Por el contrario, introdujo estas nociones sencillamente como "sistemas de entes" cuya caracterización "se encuentra contenida en los propios axiomas" (*Fundamentos de la geometría*, p. 3).

Como el propio Hilbert decía a un colega, en 1891,

> "Uno debería ser capaz de decir siempre, en lugar de 'puntos', 'rectas' y 'planos', 'mesas', 'sillas' y 'jarras de cerveza'."
>
> (cf. Reid, *Hilbert*, citado en la Introducción a Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, p. XXIX.)

Y dado este posicionamiento, no resulta sorprendente que Hilbert dedicara una sección, nada más terminar la exposición de los axiomas, a investigar su consistencia (esto es, a investigar si el conjunto de axiomas descrito pudiera resultar contradictorio: Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, sección 9, pp. 38–41). Nada parecido se le hubiera ocurrido a Euclides, puesto que él partía de la base de que sus axiomas eran universalmente verdaderos. Sin embargo, al considerar Hilbert que los axiomas eran meras estipulaciones arbitrarias, le surgió inmediatamente la duda de si, en sus más lejanas consecuencias, tales estipulaciones podrían entrar en contradicción unas con otras.

El peligro de que una teoría sea contradictoria radica en el hecho de que *de una contradicción se sigue cualquier cosa* (es el llamado *"ex contradictione quodlibet"*, o *"principio de explosión"*). Por lo tanto, si de una teoría se deriva una contradicción, de esa contradicción se podrá derivar a su vez cualquier otra proposición que queramos, y con ello la teoría habrá quedado invalidada.

La necesidad de una prueba de consistencia es característica de la filosofía formalista de la matemática, y constituye la permanente espada de Damocles de esta posición filosófica. En efecto, en la medida en que consideremos que las teorías matemáticas son construcciones gratuitas, sin ningún anclaje en una realidad predeterminada, entonces necesitaremos una prueba especial que nos garantice que se trata de construcciones consistentes.

§ 3.15. De la geometría a la aritmética. En la sección 9 de los *Fundamentos de la geometría*, Hilbert proporcionó una prueba de la consistencia de su sistema de axiomas, bajo la suposición previa de que el análisis matemático fuera consistente también. Esto es: proporcionó una prueba de la consistencia de la geometría, *relativa* a la consistencia del análisis.

Quedaba pendiente, por lo tanto, la demostración de la consistencia del análisis matemático. Y en definitiva, la demostración de la consistencia de la aritmética de los números naturales, de la cual depende aquella.

Hilbert asistió al 2º Congreso internacional de matemáticos celebrado en París en el año 1900 (al que ya nos hemos referido, cf. p. 27), y en una memorable ponencia enunció los que a su juicio eran los principales problemas matemáticos pendientes para el siglo que comenzaba. Son los llamados *"problemas de Hilbert"*, como todavía se conocen, y que en efecto, tuvieron una influencia indudable en el desarrollo de la matemática posterior.

El segundo de esos problemas era precisamente el de demostrar la consistencia de la aritmética:

> "Sobre todo deseo designar a éste como el problema más importante entre las numerosas cuestiones que pueden formularse con respecto a los axiomas: *demostrar que no se contradicen entre sí, es decir, que mediante un número finito de inferencias lógicas basadas en ellos, nunca se pueden obtener resultados contradictorios*. En la geometría, la demostración de la consistencia de los axiomas (...) se reduce al teorema de la consistencia de los axiomas aritméticos. En cambio, se necesita un método directo para demostrar la consistencia de los axiomas aritméticos."
> (Hilbert, *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 3, citado en Alcolea Banegas, *Logicismo, formalismo, intuicionismo*, pp. 77–78; la lista completa de los problemas de Hilbert puede consultarse en la Introducción a Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, pp. XVII–XVIII.)

Muy poco después de que Hilbert pronunciara esas palabras se descubre la paradoja de Russell, y ésta a su vez llama la atención sobre los argumentos paradójicos de Cantor y Burali-Forti. La naciente teoría de conjuntos queda en entredicho, y con ella algunos de los intentos más serios de fundamentación de la aritmética, como los de Dedekind y Frege.

Se produce una sensación de desconcierto: es la *crisis de fundamentos* de la que venimos hablando, y que como vemos afectó también a la geometría, en la medida en que la consistencia de sus axiomas había sido establecida presuponiendo la consistencia de la aritmética, y los fundamentos de esta parecían en duda. La necesidad de una prueba de consistencia de la aritmética empezó a convertirse en algo perentorio.

§ 3.16. De la aritmética a la lógica matemática: el programa de Hilbert. La preocupación por las paradojas llevó a Hilbert a interesarse paulatinamente por los lenguajes formalizados y por la nueva lógica matemática, a la que no había prestado atención anteriormente (y que estaba del todo ausente, de hecho, de sus *Fundamentos de la geometría*).

Y es así, combinando su filosofía de fondo con el instrumental de la lógica matemática recién descubierta, como se configura la filosofía formalista de Hilbert, que acaba por adoptar la forma de un "programa de investigación" muy concreto: el *programa de Hilbert.* Este programa para fundamentar la matemática se puede resumir en tres grandes objetivos: *formalización*, *consistencia* y *automatización.*

Los dos primeros (y más importantes) objetivos de este programa, en efecto, son la formalización de todas las teorías matemáticas, transformándolas en sistemas lógico-axiomáticos, y el estudio de las propiedades de dichos sistemas, buscando establecer, en particular, una prueba de consistencia de los mismos.

Y a estos se une una tercera aspiración, más lejana, que es la búsqueda de un método para automatizar la prueba de teoremas y solucionar cualquier problema matemático (siempre que estuviera expresado en un lenguaje formal). Es decir, la búsqueda de un procedimiento que permitiese decidir mecánicamente cualquier conjetura formulada en el interior de una teoría matemática, una vez que tal teoría hubiese sido convenientemente formalizada. Éste es el famoso *"problema de la decisión"* (en alemán, *Entscheidungsproblem*), que Hilbert plantea, por ejemplo, en *Pensamiento axiomático* (p. 21).

§ 3.17. Matemática y metamatemática. La mayor parte de los enunciados de las teorías matemáticas son, para Hilbert, *"enunciados ideales"* (en alemán, *ideale Aussagen*). Estos son todos aquellos enunciados que versan sobre objetos abstractos (como números, funciones o conjuntos), y su legitimidad no proviene de que existan en realidad esos objetos, sino de que las teorías en las que se formulan tales enunciados sean consistentes.

Precisamente para garantizar la consistencia de las teorías matemáticas es para lo que resulta conveniente formalizarlas, a fin de poder desarrollar la prueba de consistencia de los sistemas correspondientes con todo rigor.

Al estudio de las propiedades de los sistemas formales lo llama Hilbert *"teoría de la prueba"* o *"teoría de la demostración"* (*Beweistheorie*), y también *"metamatemática"* (*Metamathematik*), dado que se trata, en definitiva, de una "matemática acerca de la matemática".

Los enunciados pertenecientes a la metamatemática son, estos sí, *"enunciados reales"* (*reale Aussagen*), porque sus objetos de estudio son objetos concretos, a saber: los propios signos que conforman las teorías formalizadas, sus propiedades y las transformaciones definidas entre ellos.

Para el cultivo de la metamatemática, Hilbert decreta el uso de un *método finitista* (o *finitismo*), destinado a garantizar, más allá de toda duda razonable, la seguridad de las demostraciones de consistencia que se quiere obtener. Lo que Hilbert pretende mediante este método es restringir los procedimientos de demostración usados en la metamatemática, evitando usar en ella el tipo de razonamiento abstracto que se usa habitualmente en los enunciados ideales, es decir, en la matemática propiamente dicha. Esto tiene sentido si tenemos en cuenta que la prueba de consistencia suministrada por la *metamatemática* es la que ha de dar legitimidad a las teorías abstractas de la *matemática* a secas.

No vamos a describir aquí el método finitista, lo cual sería complicado (empezando porque Hilbert nunca dio una caracterización precisa del mismo). Baste decir que es una forma de *constructivismo*, cercana al *intuicionismo* que estudiaremos en el módulo sigiente, aunque con una diferencia importante: mientras que el intuicionismo propone implantar sus métodos restrictivos en toda la matemática, el formalismo los prescribe solo para la metamatemática, es decir, para la búsqueda de una prueba de consistencia (entendiendo que, una vez obtenida esta, las matemáticas reales podrían desarrollarse libremente).

§ 3.18. Difusión del programa formalista. La filosofía formalista de Hilbert aparece por primera vez, en una versión rudimentaria, en una conferencia de 1904, titulada “Sobre los fundamentos de la lógica y de la aritmética” (publicada en 1905, y después recogida como Apéndice VII de los *Fundamentos de la geometría* en ediciones posteriores de la obra, cf. pp. 250–263 de la edición española).

Dicha conferencia le valió las críticas de Poincaré y del joven matemático holandés L. E. J. Brouwer, creador del intuicionismo, que ya en su tesis de doctorado atacó duramente a Hilbert y a toda la matemática clásica. El desarrollo de la filosofía formalista de la matemática, de hecho, se produjo en gran medida en debate con las otras dos escuelas fundacionales, el logicismo y el intuicionismo, y muy en particular con esta última.

La siguiente publicación de Hilbert sobre fundamentos corresponde a otra conferencia, la llamada “conferencia de Zurich”, pronunciada en 1917 y publicada un año después en los *Mathematische Annalen*, bajo el título “Pensamiento axiomático” (aparecida en español como libro con ese mismo título, y con traducción más lograda en la antología *Fundamentos de las matemáticas*, pp. 23–35).

Algo después, en 1922, publicó “Nueva fundamentación de la matemática”, que corresponde a tres conferencias dadas ese año en Copenhague y Hamburgo. Este es un trabajo importante, en el que ya aparece expresado el programa formalista con toda claridad. No se encuentra incluido entre los Apéndices a *Fundamentos de la geometría*, pero hay traducción castellana en la citada antología *Fundamentos de las matemáticas*, pp. 39–62.

Otra contribución notable fue su conferencia “Acerca del infinito”, pronunciada en 1925, y recogida después como Apéndice VIII de los *Fundamentos de la geometría*, (cf. pp. 264–287 de la edición española, y con traducción mejorada en sus *Fundamentos de las matemáticas*, pp. 83–121).

La misma compilación de *Fundamentos de las matemáticas*, que venimos citando, incluye otros dos trabajos representativos del formalismo de Hilbert: “Los fundamentos lógicos de las matemáticas” y “La fundamentación de la teoría elemental de números”, procedentes de conferencias impartidas en 1922 y 1925 respectivamente. Y los Apéndices IX y X de sus *Fundamentos de la geometría* recogen asimismo artículos procedentes de conferencias de Hilbert: "Los fundamentos de la matemática" y "Problemas en la fundamentación de la matemática", pronunciadas respectivamente en 1927 y 1928.

También en 1928 publicó Hilbert, junto con Wilhelm Ackermann, sus *Grundzüge der theoretischen Logik* (*Elementos de lógica teórica*), tratado de lógica matemática que acabaría por convertirse en una de las grandes obras de referencia de la nueva disciplina.

Finalmente, Hilbert escribió junto a Paul Bernays su obra cumbre en el desarrollo de su filosofía de la matemática: los *Grundlagen der Mathematik* ("Fundamentos de la matemática"), publicados en dos volúmenes, el primero en 1934 y el segundo en 1939 (no traducidos al castellano ni al inglés, que yo sepa).

Por lo demás, a la obra escrita de Hilbert hay que añadir la enorme autoridad que ejerció como matemático eminente, así como su carismática personalidad, lo que hizo que la influencia de su programa en el campo de los fundamentos de la matemática fuese muy grande.

§ 3.19. Lectura de Hilbert ("Acerca del infinito"). Reproducimos a continuación un fragmento del artículo de Hilbert "Acerca del infinito", que es una de sus referencias clásicas y más citadas.

La teoría de los números transfinitos de Cantor, a la que se refiere Hilbert al principio de este fragmento, no es más que la teoría de conjuntos transfinita, de la que ya hablamos (cf. p. 20). "El paraíso que Cantor creó para nosotres" que Hilbert menciona hacia el final, es la propia teoría de conjuntos, en especial la transfinita, así como todo el dominio de objetos matemáticos comprendidos en ella. Y la "contradicción descubierta por Zermelo y Russell" es la paradoja de Russell, que el matemático Ernst Zermelo descubrió independientemente de Russell, por la misma época.

> "Cantor ha logrado desarrollar con éxito estas ideas, dando forma a una teoría de los números transfinitos y a un cálculo completo para los mismos. De este modo, y como culminación del trabajo conjunto de Frege, Dedekind y Cantor, el infinito alcanzaría vertiginosamente el pináculo del éxito en las matemáticas.
>
> Sin embargo, la reacción a todo ello no tardó en hacerse sentir y asumió formas en extremo dramáticas (...) Los principios y métodos utilizados para la formación de conceptos permitían el surgimiento de contradicciones. Las primeras inconsistencias se presentaron de manera aislada, pero adquirieron gradualmente mayor gravedad al surgir las llamadas paradojas de la teoría de conjuntos. Fue, en especial, la contradicción descubierta por Zermelo y Russell la que, al ser dada a conocer al mundo matemático, tuvo prácticamente el efecto de una catástrofe en nuestra disciplina.
>
> A causa de estas paradojas, tanto Dedekind como Frege abandonan la posición que habían sustentado hasta entonces e inclusive la rama misma de la investigación que los había ocupado por tanto tiempo. De hecho, durante años Dedekind se mostró renuente a autorizar una nueva edición de su fundamental tratado *Was sind und was sollen die Zahlen?* ("¿Qué son y para qué sirven los números?"), mientras que Frege se vio obligado, como él mismo reconoce en

una nota al final de los *Grundgesetze der Arithmetik*, a admitir como errónea la tendencia general de ésta, su obra más importante.

A consecuencia de todo esto, también la teoría de los números transfinitos de Cantor es objeto de severos y apasionados ataques provenientes de los más diversos ámbitos. La reacción es tan radical, y en ocasiones tan desmesurada, que pone en tela de juicio muchos de los conceptos fundamentales y muchas de las argumentaciones y los métodos más importantes de las matemáticas, llegándose al grado de sugerir una prohibición total de sus aplicaciones.

Ciertamente no faltaron defensores de lo que parecía derrumbarse, pero las medidas de protección y las soluciones que sugieren son más bien débiles, además de que se trata, en general, de llevarlos a la práctica en puntos que no son los más apropiados. Se ofrecen demasiados remedios para las paradojas, pero los métodos de clarificación propuestos distan de tener homogeneidad.

Lo primero que tenemos que hacer es percatarnos con toda claridad de que, a la larga, las paradojas nos colocan en una situación absolutamente intolerable. Imaginemos simplemente lo que sucedería si en el paradigma de verdad y confiabilidad científicas que las matemáticas representan, las construcciones conceptuales y las inferencias que nos son familiares nos condujeran a absurdos. ¿En dónde podríamos buscar la certeza y la verdad si el pensamiento matemático mismo falla?

Por fortuna, existe una vía enteramente satisfactoria que con absoluto apego al espíritu de nuestra disciplina nos permite escapar de las paradojas. Las consideraciones y metas que orientan este camino son las siguientes:

1. Queremos examinar con todo cuidado aquellas construcciones conceptuales y aquellos métodos de investigación que enriquezcan nuestra disciplina, queremos cultivarlos, apoyarlos y servirnos de ellos siempre que se presente la más ligera posibilidad de obtener un resultado. Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotres.

2. Es absolutamente necesario alcanzar en los modos de inferencia el mismo grado de seguridad que la que existe en la teoría elemental de números ordinaria, en la que todo el mundo confía plenamente y en la que una paradoja o una contradicción solo pueden surgir por nuestra falta de atención."

(Hilbert, "Acerca del infinito", *Fundamentos de las matemáticas*, pp. 93–94.)

§ 3.20. Lectura de Hilbert ("Los fundamentos de la matemática"). Sigue un extracto de otro artículo de Hilbert, "Los fundamentos de la matemática", en el que expone con toda claridad su filosofía formalista y las líneas maestras de su programa.

"Es para mí un gran honor, y al mismo tiempo una necesidad, completar y ampliar mis ideas sobre los fundamentos de la matemática, ideas que durante cinco años he venido desarrollando y a las que, desde entonces, sin interrupción, me he dedicado con el máximo interés. Con este nuevo fundamento de la matemática, que propiamente puede designarse como una teoría de la demostración, persigo una finalidad importante, ya que deseo eliminar definitivamente los problemas relativos a los cimientos de la matemática, tal y como ahora están planteados, convirtiendo cualquier enunciado matemático en una fórmula concreta que pueda ser expuesta y derivada con todo rigor, y reformulando las definiciones e inferencias matemáticas de tal modo que sean irrefutables, y que proporcionen además una imagen adecuada de esta ciencia en su conjunto. Creo poder alcanzar completamente tal meta por medio de mi teoría de la demostración, aunque para desarrollarla del todo todavía resta por hacer mucho trabajo.

"La matemática, como cualquier otra ciencia, no puede ser fundada únicamente en la lógica; antes bien, como condición para el uso de inferencias lógicas y la realización de operaciones lógicas, algo debe sernos dado en nuestra facultad de representación: ciertos objetos extralógicos concretos, que están intuitivamente presentes como experiencia inmediata previa a todo pensamiento. Para que la inferencia lógica resulte fiable, debe ser posible escrutar estos objetos exhaustivamente en todas sus partes. Y en efecto, el que estos objetos estén presentes, el que difieran unos de otros, y el que unos sigan a otros o estén concatenados con otros, es algo dado a la intuición inmediatamente, junto con los propios objetos, sin que pueda ser reducido a ninguna otra cosa ni requiera ser reducido. Esta es la posición filosófica básica que yo veo como un requisito para las matemáticas y, en general, para todo el pensamiento, comprensión y comunicación científicos. Y en matemáticas, en particular, lo que está bajo consideración son los propios signos concretos, cuya forma, de acuerdo con la concepción que hemos adoptado, resulta inmediatamente clara y reconocible. Esto es verdaderamente lo mínimo que se debe presuponer; ningún científico puede prescindir de ello, y por consiguiente todo el mundo debe aceptarlo, conscientemente o no.

"Presentaré a continuación la idea fundamental de mi teoría de la demostración.

"Todas las proposiciones que integran la matemática son transformadas en fórmulas, de tal modo que la propia matemática se convierte en un inventario de fórmulas. Éstas difieren de las fórmulas habituales en matemáticas solo en que, además de los signos usuales, también aparecen en ellas los signos lógicos [transcritos a notación y terminología actual]:

$\rightarrow$	$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\forall$	$\exists$
si, entonces	y	o	no	para todo	existe

Ciertas fórmulas, que sirven como los ladrillos de construcción del edificio formal de la matemática, son llamadas axiomas. Una prueba es una figura que debe ser reconocible como tal por nuestra capacidad perceptiva; consiste en inferencias que conforman con el esquema

$$\frac{\begin{array}{c} S \\ S \rightarrow T \end{array}}{T}$$

donde cada una de las premisas, esto es, la fórmula S y la fórmula $S \to T$ de la figura, o bien es un axioma, o bien se obtiene por sustitución a partir de un axioma, o bien coincide con la última fórmula de una inferencia anterior en la prueba, o se obtiene de una tal fórmula por sustitución. Decimos que una fórmula es demostrable cuando es o bien un axioma o bien la última fórmula de una demostración.

"Los axiomas y las proposiciones demostrables, es decir, las fórmulas que resultan de este procedimiento, son reproducciones de los pensamientos que conforman la matemática ordinaria tal y como se ha desarrollado hasta ahora.

(...)

"Donde quiera que se utilice el método axiomático, se presenta la cuestión de probar la consistencia de los axiomas. En geometría y en las teorías físicas esta prueba se lleva a cabo con éxito por medio de una reducción a la consistencia de los axiomas aritméticos. Este sistema falla obviamente en el caso de la propia aritmética. Haciendo posible este último paso (...) nuestra teoría de la prueba se convierte en la clave de bóveda del método axiomático."

(Hilbert, "Los fundamentos de la matemática", Apéndice IX a los *Fundamentos de la geometría*, pp. 288–299, con traducción en parte distinta a la aquí ofrecida.)

§ 3.21. Fracaso del programa de Hilbert: los resultados limitativos. Como ya hemos dicho, el programa formalista de Hilbert ejerció una notable influencia sobre la matemática de su tiempo, constituyendo un importante acicate para la exploración de la nueva lógica formal, estrenada unas décadas atrás. De hecho, la teoría de la prueba inaugurada por Hilbert constituye hoy día una de las ramas principales de esta disciplina, aunque su cultivo ya no esté sujeto al seguimiento del método finitista.

Y como consecuencia de este interés promovido por Hilbert, la década de 1930 conoció una sucesión de resultados extraordinariamente brillantes y significativos en lógica, que vendrían a establecer definitivamente los límites del alcance de la disciplina. Tales resultados fueron, sin embargo, esencialmente *negativos*, en cuanto que las mostraban las limitaciones inherentes a los métodos formales de la nueva lógica. Por eso se les conoce a veces como *"los resultados limitativos"*.

Y es que, en efecto, los resultados limitativos supusieron un duro revés a las aspiraciones del programa formalista, y en el caso de uno de ellos en particular (el segundo teorema de incompletitud de Gödel), la imposibilidad prácticamente absoluta de completarlo.

No podemos detenernos aquí a explicar con detalle estos resultados, lo cual requeriría toda una asignatura de lógica avanzada. Pero sí haremos un esbozo de tres de ellos, los más significativos: el teorema de Church y los dos teoremas de incompletitud de Gödel. (Una exposición detallada de estos y otros resultados limitativos, como el llamado "teorema de Tarski" y los "modelos no estándar de Skolem", se puede encontrar en el libro de Machover, *Set theory, logic and their limitations*, ya mencionado.)

§ 3.22. El teorema de Church. El teorema de Church data de 1936, y establece que *la lógica de primer orden es indecidible.* Esto equivale a decir que en lógica de primer orden no puede existir un procedimiento mecánico para verificar si una fórmula es derivable de otra o no. De ahí se deduce que, aunque hayamos formalizado completamente una teoría matemática (y salvo que esta fuera inconsistente), nunca existirá un procedimiento mecánico mediante el cual verificar cuáles son las proposiciones derivables de sus axiomas.

Nunca podremos, por tanto, diseñar un automatismo que se encargue por sí solo de encontrar las pruebas los teoremas matemáticos. Tendremos que seguir buscando estas pruebas una a una, ya sea con nuestra paciencia e ingenio, o con la ayuda que los ordenadores nos puedan prestar, pero sin la comodidad de un mecanismo general que las resuelva todas.

La única excepción sería una teoría matemática inconsistente. En tal caso, como ya sabemos, cualquier proposición formulada en el lenguaje de la teoría se derivaría de ella, lo cual la convertiría en decidible pero de una manera trivial. Es obvio que una teoría así carecería de todo interés y de toda utilidad, y no cualificaría como teoría matemática respetable, del tipo de las que el formalismo intenta fundamentar.

El teorema de Church se aplica también a los programas de ordenador, que al fin y al cabo no dejan de ser sino conjuntos de instrucciones mecánicas, más o menos complejos. En virtud de este teorema, en efecto, tampoco podrá existir jamás un programa de ordenador capaz de probar todos los teoremas de una teoría matemática consistente, por sencilla que esta sea. La capacidad de encontrar pruebas de cada ordenador concreto, o de cada programa, por muy potente que lo queramos imaginar, estará siempre limitada a un fragmento de la teoría en cuestión, nunca cubrirá la teoría entera.

Y por esto decíamos en su momento (p. 17) que el surtido de conjeturas no decididas en matemáticas es inagotable, en cuanto que nunca dispondremos de una máquina o procedimiento automatizado para resolverlas todas. Y es así como el problema de la decisión, el tercero de los objetivos que se había fijado el programa formalista, recibió, por efecto del teorema de Church una respuesta negativa.

§ 3.23. Los dos teoremas de incompletitud de Gödel. Por su parte, los dos teoremas de incompletitud de Gödel aparecieron simultáneamente en un memorable artículo, titulado “Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los ‘Principia Mathematica’ y sistemas afines” y publicado en 1931 en la revista *Monatshefte für Mathematik und Physik* (disponible en castellano como libro suelto con ese título, y con distinta traducción en sus *Obras completas*, pp. 55–89).

Estos dos teoremas fueron, entre los resultados limitativos que estamos comentando, los primeros en aparecer cronológicamente, y al mismo tiempo los más devastadores para el programa formalista (en especial el segundo de ellos).

El primer teorema de incompletitud de Gödel establece que *cualquier teoría formal axiomatizable para la aritmética es incompleta*. Una teoría es axiomatizable (o, dicho más exactamente, *“recursivamente axiomatizable”*) cuando existe un procedimiento mecánico para identificar sus axiomas; es decir, cuando existe un procedimiento mecánico para determinar qué fórmulas del lenguaje formal corresponden a los axiomas de la teoría y qué otras no. Nótese la diferencia entre “identificar los axiomas” (es decir, los postulados de los que emana la teoría) e “identificar los teoremas” (es decir, los resultados que se derivan de dichos postulados).

Pues bien, lo que establece el primer teorema de incompletitud de Gödel es que cualquier teoría formal para la aritmética cuyos axiomas sean identificables de esta forma es necesariamente incompleta, esto es, que deja fuera algunas verdades aritméticas (que no serán derivables de sus axiomas, y por tanto no serán teoremas de esa teoría). Y nótese, también, que aquí no estamos hablando ya del procedimiento para encontrar las pruebas de esos teoremas, sino de que hay verdades aritméticas que *no* son teoremas de esa teoría en absoluto, y escapan, por consiguiente, a la misma.

Así por ejemplo, podemos trasladar a un lenguaje formal los cinco axiomas de Peano, o una extensión conveniente de los mismos, y el resultado será una teoría formal que comprenderá una gran parte de los enunciados aritméticos verdaderos. Pero por muchos axiomas que añadamos a la teoría, mientras esta sea axiomatizable, siempre habrá algunos enunciados aritméticos verdaderos que se queden fuera de ella.

El primer teorema de incompletitud de Gödel supone así un fuerte revés al primer objetivo del programa de Hilbert, la formalización. En efecto, de acuerdo con esta limitación inherente a la lógica formal, la representación de teorías matemáticas mediante versiones formalizadas está condenada a dejar siempre fuera algunas verdades matemáticas, que "se pierden", por así decirlo, en el proceso de formalización.

En cuanto al segundo teorema de incompletitud, por su parte, es de un calado aún mayor, y se suele contar entre los mayores descubrimientos matemáticos de todo el siglo XX. Lo que establece este teorema, cuya prueba se apoya en el primero, es que *la consistencia de la aritmética no puede ser demostrada dentro de la propia aritmética*.

El segundo teorema de incompletitud afecta a cualquier teoría formal axiomatizable de la aritmética que contenga los axiomas de Peano, o algún otro conjunto de axiomas de alcance similar. Y establece que, para demostrar la consistencia de una teoría así, hace falta utilizar principios de razonamiento más fuertes que los contenidos en la propia teoría (y en particular, principios de razonamiento más fuertes que el quinto axioma, el principio de inducción).

Por razones técnicas en las que no entraremos, si la prueba de consistencia de la aritmética exige principios de razonamiento más fuertes que la inducción matemática, entonces la posibilidad de encontrar una prueba finitista de consistencia (y no ya de la aritmética, sino de cualquier teoría matemática) es prácticamente nula. Así las cosas, el segundo objetivo del programa formalista de Hilbert (y en definitiva, el programa entero, tal y como originalmente había sido diseñado) resulta imposible de realizar. (Véase por ejemplo Dummett, "El significado filosófico del teorema de Gödel", en su libro *La verdad y otros enigmas*, pp. 265–281.)

§ 3.24. Un episodio más en la crisis de fundamentos. La opinión de que el programa de Hilbert se había mostrado inviable cundió rápidamente entre la mayoría de especialistas en estas materias, y así se mantiene. Sin embargo, los nervios de los primeros momentos oscurecieron esta conclusión. Así por ejemplo, el propio Gödel niega sorprendentemente, al final de su memorable artículo, que su resultado suponga un obstáculo definitivo al programa de Hilbert (cf. Gödel, *Obras completas*, pp. 88–89). Y tres años después, al publicar junto con Bernays el primer volumen de sus *Grundlagen der Mathematik*, Hilbert añadió una aclaración muy reveladora, que recuerda a aquella nota precipitada de Frege años atrás, aunque con una gran diferencia: en este caso, Hilbert se resistía a admitir el impacto negativo del resultado sobre su posición, en vez de reconcerlo:

> "Me gustaría manifestar que la opinión, temporalmente extendida, de que

> ciertos resultados de Gödel implican que mi teoría de la demostración no es posible, ha resultado ser errónea. De hecho, esos resultados demuestran únicamente que para obtener una prueba adecuada de la consistencia se debe utilizar el método finitista de una forma más afinada de la que se necesita cuando se trata el formalismo elemental."
> (Hilbert y Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, citado en la Introducción a Hilbert, *Fundamentos de la geometría*, p. LI.)

Como quiera que sea, a pesar de estos gestos iniciales, enseguida se haría patente que la crisis de fundamentos no solo no había quedado resuelta con el programa de Hilbert, como este había ambicionado, sino todo lo contrario: se agudizaba al constatarse el fracaso de su programa, y conocía así un episodio más.

§ 3.25. Otras vertientes formalistas. A pesar del fracaso del programa de Hilbert en su diseño original, la filosofía formalista de la matemática continuó extendiéndose, gozando de una vasta influencia que todavía perdura.

En efecto, hoy en día el formalismo como filosofía de la matemática ha penetrado profundamente en la mentalidad reinante, junto al propio platonismo puro, con el que a veces se alterna de forma singular. Como comentan Davis y Hersh en su libro de 1981,

> "Típicamente, le matemátique en activo es platonista entre semana y formalista los domingos. Es decir, mientras está haciendo matemáticas está bajo el convencimiento de tratar con una realidad objetiva, cuyas propiedades se esfuerza por determinar. Pero después, cuando se le desafía a que dé una descripción filosófica de tal realidad, le resulta más fácil fingir que no cree en ella para nada.".
> (Davis y Hersh, *Experiencia matemática*, p. 237).

Además de Peano y Hilbert, y sus respectivos colaboradores, otras figuras notables del formalismo han sido John von Neumann y Haskell Brooks Curry. También tuvo mucho efecto sobre el llamado *"grupo Bourbaki"*, sociedad de matemátiques en su mayoría franceses, cuyos trabajos se publicaban de forma conjunta bajo el pseudónimo de "Nicolas Bourbaki", y que fue fundada en 1935 por André Weil y Jean Dieudonné, entre otres.

Georg Kreisel y Solomon Feferman han contribuido asimismo a desarrollar variantes del programa formalista, y en particular el método finitista, en líneas de trabajo cercanas al constructivismo que estudiaremos en el módulo siguiente.

Por último, una esforzada defensa del formalismo hilbertiano, tratando de mostrar con argumentos filosóficos y técnicos que los teoremas de Gödel no suponen una refutación definitiva del mismo, ha sido la desarrollada por el profesor Michael Detlefsen en su libro *Hilbert's Program: An Essay on Mathematical Instrumentalism*, de 1986. (Atención al ejemplar de este libro que está depositado en la Biblioteca Luis Vives, porque en su cubierta exterior no aparece el nombre del autor, sino el del editor de la colección editorial a la que pertenece: "Jaakko Hintikka").

Y ya para cerrar este módulo, volveremos a citar al filósofo español Jesús Mosterín, pero esta vez por la encendida defensa del formalismo que hace en la Introducción a su *Teoría axiomática de conjuntos*:

"Así como la fantasía musical del ser humano produce sinfonías diversas, así también nuestra imaginación matemática concibe teorías distintas (...) En el campo matemático hay sitio para muchos juegos. Y todos ellos son peligrosos, pues no está asegurada la consistencia de ninguno. Pero más vale arriesgarse que aburrirse. La misión de este libro no es sino la de presentar uno de esos juegos. Ojalá el lector lo encuentre divertido."
(Mosterín, *Teoría axiomática de conjuntos*, p. 31.)

MÓDULO 4

El intuicionismo

El intuicionismo de Brouwer y Heyting

§ 4.1. Presentación de la posición intuicionista. El punto de vista *intuicionista* en filosofía de la matemática es aquel según el cual las teorías matemáticas consisten en la elaboración, manipulación y transformación de *construcciones mentales*.

Un ejemplo de este tipo de construcciones puede estar representado por la operación imaginaria de alinear cerillas sobre una superficie plana, formando una fila. La construcción consistente en colocar una sola cerilla puede ser identificada con el número 1, la construcción consistente en colocar dos cerillas alineadas puede ser identificada con el número 2, la construcción consistente en colocar tres cerillas con el número 3, y así sucesivamente.

La construcción consistente en no colocar ninguna cerilla, por su parte, podría ser identificada con el número 0.

Así por ejemplo, el enunciado "$2 + 2 = 4$" expresa, bajo este punto de vista, la coincidencia entre dos procesos de construcción en principio distintos: aquel que consiste en colocar dos cerillas alineadas, y a continuación otras dos, y aquel que consiste en alinear directamente cuatro cerillas.

La naturaleza de estas construcciones no es física, sino mental. Lo importante es nuestra imagen ideal del proceso, que puede ser visualizada con cerillas, palillos, palotes, o con cualquier otro tipo de objeto.

Todo enunciado matemático debe ser traducible, según el punto de vista intuicionista, a la realización de construcciones de este tipo. Y la principal aspiración de esta escuela consiste en reconstruir las teorías matemáticas, hasta donde sea posible, siguiendo este punto de vista (es decir, en términos constructivos).

§ 4.2. Infinito actual e infinito potencial. Uno de los aspectos donde más claramente se manifiesta la adopción del punto de vista intuicionista es en la concepción matemática del *infinito*.

Según una vieja distinción aristotélica, cabe diferenciar entre el *infinito actual*, es decir, la presencia simultánea de una infinidad de objetos, y el *infinito potencial*, es decir, la mera posibilidad de obtener más y más objetos de una manera indefinida (cf. Aristóteles, *Física*, Libro III, párrafo 206b, pp. 204–206). Se trata de dos conceptos completamente diferentes.

Así por ejemplo, la construcción que se acaba de describir (la de colocar imaginariamente cerillas alineadas una detrás de otra) es un caso claro de infinito potencial, porque proporciona una pauta que se puede prolongar indefinidamente, esto es, que no se acaba nunca. Sin embargo, no llega a ser en ningún momento infinito actual o infinito *en acto*, porque en ningún momento llegamos a tener ante nosotres una construcción que correspondiese a esa totalidad infinita ya terminada.

Aplicando esta distinción, podemos decir que, bajo el intuicionismo, los números naturales son "infinitos" solo en cuanto que la elaboración de las construcciones que les corresponden puede prolongarse indefinidamente. O dicho de otro modo: son infinitos en cuanto que es posible construir, en principio, un número natural tan grande como queramos.

Mientras que, por el contrario, resulta inaceptable, desde el punto de vista intuicionista, considerar al conjunto de todos los números naturales como una totalidad ya acabada. Y ello es así por la sencilla razón de que no existe ninguna construcción mental, ni siquiera imaginaria, que corresponda a esa totalidad. Disponemos de construcciones concretas para cada número natural, y disponemos de una construcción para su sucesión (o prolongación indefinida); pero no disponemos de una construcción que corresponda al conjunto de los infinitos números naturales como una totalidad cerrada y completa.

§ 4.3. Verdad y falsedad bajo la óptica intuicionista. Otro de los aspectos en los que se muestra la peculiaridad de esta posición filosófica es su concepción acerca de la verdad y falsedad de los enunciados matemáticos. Efectivamente, bajo el prisma intuicionista, la verdad de un enunciado matemático reside en el hecho de que nosotres tengamos en nuestro poder una construcción matemática que corresponda a dicho enunciado, es decir, una construcción que *realice* lo que ese enunciado señala; o bien, en todo caso, que estemos en disposición de tener dicha construcción, es decir, que tengamos los medios para producir esa construcción en principio, salvo limitaciones de espacio y tiempo.

Y por su parte, lo que hace que un enunciado matemático sea falso, bajo esta misma perspectiva, es el hecho de que nosotres tengamos o estemos en disposición de tener una construcción matemática que *refute* lo dicho por ese enunciado. Y ¿qué cuenta como "refutación" en este contexto? Pues una construcción que, de ser aplicada a cualquier construcción hipotética que efectuase lo que dice el enunciado en cuestión, condujera a una contradicción.

Todo esto se suele resumir diciendo que, desde el punto de vista intuicionista, la verdad de un enunciado p equivale al hecho de que *se ha probado* p, y la falsedad de p equivale al hecho de que *se ha refutado* p. Lo cual casa con la metafísica antirrealista que subyace a esta escuela: en efecto, lo que hace que los enunciados matemáticos sean verdaderos o falsos no es algún tipo de estructura o realidad exterior ajena a nosotres, sino el repertorio de pruebas y refutaciones (en definitiva, el repertorio de construcciones) que nosotres mismes seamos capaces de elaborar.

Una consecuencia inmediata de esta postura es que algunos enunciados matemáticos resultan no ser ni verdaderos ni falsos. En efecto, esto es lo que ocurrirá con aquellos enunciados para los que no tenemos ni una prueba ni una refutación, en un momento dado. Tales enunciados son precisamente las conjeturas matemáticas no decididas, que comentamos en su momento. Pues bien, lo que sostienen les intuicionistas sobre tales conjeturas no es que no *sepamos* si son verdaderas o falsas, sino que *no son ni verdaderas ni falsas, hasta que no estemos en condiciones de dar una prueba o una refutación de las mismas*. Este punto de vista, ciertamente radical, supone el rechazo de una de las leyes lógicas más básicas y arraigadas, el principio de tercio excluso, como pronto veremos.

§ 4.4. Matemática intuicionista y matemática clásica. Les matemátiques intuicionistas denominan *"matemática clásica"* al corpus de teorías, conceptos y resultados matemáticos habitualmente aceptados. Estos conforman la matemática ordinaria, tal y como ha sido desarrollada tradicionalmente durante siglos. Pues bien, para quien adopta el punto de vista constructivo (y acepta la restricción al infinito potencial, etc), muchos de los conceptos y resultados de la matemática ordinaria tienen que ser abandonados, porque son imposibles de mantener dentro de esos cánones.

En una palabra: que para ser fiel a la filosofía intuicionista hay que renunciar a una porción considerable de la matemática clásica.

Un ejemplo de ello son los infinitos de distinto tamaño que se estudian en teoría de conjuntos, y de los que hablamos en el Módulo 1 (p. 20). Entonces decíamos que los números naturales forman el conjunto más pequeño de entre estos conjuntos infinitos (es decir, el infinito más pequeño que se estudia en dicha teoría, entre otros de tamaño mayor).

Ahora bien, en la matemática intuicionista solo se admite como válido el infinito de los números naturales, y aún este es entendido exclusivamente como infinito potencial, no como infinito en acto. Por consiguiente, el tratamiento matemático de todos los conjuntos de tamaño mayor que los naturales resulta imposible de traducir a términos constructivos, y es por ello criticado y rechazado por les intuicionistas, que lo consideran inadmisible, ilegítimo e incluso carente de sentido.

De la misma manera, el tratamiento del análisis matemático que se lleva a cabo dentro de la escuela intuicionista presenta profundas diferencias con el de la matemática clásica. En efecto, muchas nociones básicas reciben definiciones distintas a las habituales; además, aparecen distinciones nuevas, y muchos teoremas de la matemática clásica no se pueden demostrar. Incluso en la aritmética elemental cambian algunas cosas (como por ejemplo el principio del número menor, que resulta ser no válido bajo el intuicionismo, como enseguida veremos).

Existen también, curiosamente, algunos teoremas de la matemática intuicionista que son no válidos en matemática clásica. Pero esto hay que entenderlo como una rareza, consecuencia de la interpretación que se da en esta escuela a los términos lógicos y matemáticos en general. Considerada globalmente, la matematica intuicionista es mucho más restrictiva que la clásica, y permite probar menos cosas.

§ 4.5. La lógica intuicionista y la lógica clásica: el caso de los enunciados existenciales. También la lógica deductiva, y la propia estructura lógica de los enunciados matematicos, experimentan una reforma de calado dentro de esta escuela. El resultado es lo que se denomina *"lógica intuicionista"*, cuyas diferencias con la lógica habitual (la *lógica clásica*) son muy profundas.

En particular, como ya hemos dicho, todos los enunciados matemáticos deben ser traducibles a la afirmación de que se ha llevado a cabo efectivamente una construcción, o que se ha mostrado la posibilidad de llevarla a cabo. La construcción en cuestión vendrá exigida por el contenido y estructura lógica del enunciado del que se trate.

Tomemos, por ejemplo, los enunciados *existenciales*, esto es, aquellos que afirman la existencia de un objeto u objetos con ciertas características. Desde el punto de vista platónico, estos enunciados afirman la existencia objetiva de esa entidad o entidades matemáticas, como algo exterior e independiente de la mente humana. Bajo el punto de vista intuicionista, sin embargo, se cuestiona esa filosofía platónica, y en su lugar, se toman los enunciados existenciales como afirmando algo mucho más humano e "inmanente": que estamos en disposición de efectuar una construcción que responda a las características del objeto en cuestión.

Así por ejemplo, el enunciado

"Existe un número natural que multiplicado por sí mismo es igual a 49"

leído en términos intuicionistas, nos dice que estamos en condiciones de construir un número natural que, al multiplicarlo por sí mismo, da como resultado 49. En este caso el enunciado es verdadero, y la construcción en cuestión es fácil de producir, se trata del número 7.

Un caso algo más complejo es el de los enunciados matemáticos que afirman la existencia de *infinitos* objetos de determinadas características. Desde el punto de vista intuicionista, como ya hemos visto, el infinito al que aluden tales enunciados se interpreta como infinito *en potencia*, lo cual equivale a la afirmación de que poseemos (o podemos elaborar) una construcción para generar una sucesión indefinida de objetos de las características en cuestión. En otras palabras: tales enunciados se interpretan, bajo el prisma intuicionista, como afirmando que tenemos (o podemos elaborar) una construcción mediante la cual generar una sucesión indefinida de objetos de las características señaladas.

Así por ejemplo, el enunciado

"Existen infinitos números primos"

debe ser interpretado, desde el punto de vista intuicionista, como la afirmación de que poseemos un procedimiento para generar números primos cada vez mayores, indefinidamente. Puesto en otras palabras, ello equivale a decir que tenemos un procedimiento para calcular, dado cualquier número natural n, un número que sea primo y mayor que n. En este caso, de hecho, conocemos dicho procedimiento, y además es sencillo. En efecto, basta con calcular

$$n! + 1$$

(es decir, $n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$), y a continuación determinar cuál es el menor divisor primo de esa cantidad. Es inmediato determinar que el número resultante (digamos, p) es primo y mayor que n.

La prueba que se acaba de esbozar es una variante de las pruebas de infinitud de los números primos que mencionamos en su momento (cf. p. 16), pero con una diferencia importante. La prueba que acabamos de dar es *directa* (o *constructiva*), en tanto en cuanto nos muestra un procedimiento efectivo para encontrar un primo mayor que cualquier número dado. Mientras que las otras variantes se limitan a suponer que los números primos fueran finitos (es decir, que existiera un número primo que fuera el último, el mayor de todos), y a derivar de ahí una contradicción.

El razonamiento que hay detrás de esas pruebas *indirectas* (*no constructivas*) es que si no hay un último número primo, los números primos han de ser necesariamente infinitos. Pero este razonamiento encubre una premisa de corte platónico. En efecto, ¿"si no hay un último primo, entonces los números primos han de ser infinitos", pero dónde?, ¿en universo platónico? Si queremos renunciar de verdad al platonismo, tenemos que rechazar este modo indirecto de razonar en matemáticas, por muy habitual que sea.

Pues bien, eso es precisamente lo que hace la matemática intuicionista: rechaza este tipo de prueba para la infinitud de los números primos, y en sulugar exige una construcción que nos permita generar de forma efectiva números primos cada vez mayores, de forma indefinida.

En cuanto a otro enunciado que comentamos en su momento, el de la infinitud de los primos gemelos (cf. p. 17)

"Existen infinitos primos gemelos"

hay que señalar que, a fecha de hoy, no se ha podido probar ni refutar, ni bajo la matemática intuicionista ni bajo la matemática clásica. No hay demostración de ese enunciado (ni constructiva ni no constructiva), como tampoco hay refutación para el mismo. Se trata de una conjetura matemática no decidida, bajo todos los puntos de vista.

Por último, conviene comentar que el *principio del número menor*, que también mencionamos en su momento (cf. p. 18), resulta ser *no admisible* para les intuicionistas, que rechazan su validez y no lo consideran un teorema matemático aceptable. Y ello es por el mismo tipo de razón que acabamos de comentar: porque no existe un procedimiento general para determinar cuál sea el menor número de un conjunto no vacío de naturales, arbitrariamente propuesto. Por muy intuitivo que parezca decir que *todo conjunto no vacío de números naturales tiene un menor número*, lo cierto es que esa afirmación se basa en una premisa platónica (a menos que poseyéramos un procedimiento general para encontrar ese número, lo cual no es el caso).

Así por ejemplo, podemos plantearnos cuál será el menor número natural que se repite trece veces seguidas en la expansión decimal de π. Se ha encontrado una secuencia de trece "8" seguidos (en la posición 2.164.164.669.332), pero no sabemos si habrá cifras menores que también se repitan trece veces, en alguna posición más alta. Por consiguiente, no estamos en condiciones de determinar cuál es el menor número natural n que cumple con la condición de aparecer trece veces seguidas en la expansión decimal de π.

Ahora bien, según el principio del número menor aplicado a este caso, existe un n que cumple con esa condición (la condición de aparecer trece veces seguidas en π), y así se admite en matemática clásica, bajo el razonamiento de que "dicho número debe existir en algún sitio, independientemente de que nosotres lleguemos a averiguar algún día cuál es". Pero dicho razonamiento contiene un componente platónico, similar al que hemos comentado antes (¿existe tal número, ¿dónde?, ¿en un "universo matemático"?). Tal componente o presupuesto platónico resulta inaceptable bajo el punto de vista intuicionista. Bajo los cánones intuicionistas no se puede aceptar que exista tal número, en tanto en cuanto no seamos capaces de determinar cuál es, o tengamos algún procedimiento para encontrarlo.

Y lo cierto es que, a fecha de hoy, no tenemos un procedimiento para averiguar cuál es ese número. Sabemos que el 8 aparece trece veces seguidas, por lo que el número en cuestión podría ser el 8, o un número menor. Pero no estamos en condiciones de determinar cuál es. Y por eso, la presunción de que existe tal número es no constructiva, y en el intuicionismo la rechazan.

§ 4.6. Negaciones y disyunciones. Por su parte, la negación intuicionista no debe interpretarse simplemente como que carecemos de la construcción correspondiente al enunciado negado, lo cual sería una forma demasiado trivial y poco operativa de entender esta operación lógica.

En su lugar, lo que les intuicionistas proponen (como ya hemos adelantado) es que la negación de un enunciado matemático sea entendida como una refutación del mismo, es decir: como la afirmación de que se ha conseguido llevar a cabo una construcción que muestra que lo que propone el enunciado negado es absurdo (y por tanto, imposible).

Así por ejemplo, el significado intuicionista de

"No existe un número natural que multiplicado por sí mismo sea igual a 51"

consiste en afirmar que estamos en posesión de una prueba de que no existe tal número, esto es, una prueba de que no hay una construcción n dentro de la serie de los números naturales tal que $n \times n = 51$.

A su vez, dicha prueba debe constituir ella misma un razonamiento constructivo, y más concretamente, debe consistir en la descripción de un procedimiento para retrotraer cualquier construcción hipotética que estableciese ese enunciado, a un *absurdo básico.* Este *absurdo básico* debe ser un enunciado matemático cuya falsedad sea inmediatamente reconocible, y perteneciente a la misma teoría que el enunciado que queremos refutar (la aritmética, por ejemplo). La identidad "$1 = 2$" es un caso prototípico de absurdo básico en el sentido que estamos comentando.

Volviendo a nuestro ejemplo, de lo que se trata en este caso es de retrotraer cualquier hipotética prueba de que haya un natural que multiplicado por sí mismo dé 51, a una prueba de que $1 = 2$. En el caso que nos ocupa, esto es sencillo. Basta con tener en cuenta que $7 \times 7 = 49$ y $8 \times 8 = 64$, por lo que, si hubiera un número natural cuyo cuadrado fuera 51, este tendría que estar entre el 7 y el 8. Pero sabemos que no hay ningún número natural entre el 7 y el 8; de hecho, $8 = 7 + 1$. Entonces, si hubiera un número intermedio, tendríamos simultáneamente $8 = 7 + 2$. Y de esas dos identidades combinadas se deduce $1 = 2$.

En otros casos puede ser algo más complicado llegar a este absurdo básico, pero la consecuencia es la misma: si partiendo de un determinado enunciado conseguimos demostrar que $1 = 2$, entonces es enunciado ha quedado refutado. (Russell, jocosamente, elaboró esta demostración de que él era el Papa, apoyándose en la premisa de que $1 = 2$: "El Papa y yo somos dos. Ahora bien, si $1 = 2$, entonces el Papa y yo somos uno. Por consiguiente, yo soy el Papa".)

A continuación vamos a aplicar este mismo análisis a la negación de la conjetura de los primos gemelos:

"No existen infinitos primos gemelos"

En este caso, el significado intuicionista de dicha negación consistiría en una refutación de la existencia de infinitos primos gemelos, es decir: consistiría en una prueba de que nunca va a ser posible demostrar que los primos gemelos sean infinitos. Y esta prueba habría de proceder, a su vez, retrotrayendo cualquier hipotética prueba de que los primos gemelos son infinitos, a una prueba de $1 = 2$.

En este caso no poseemos dicha construcción, porque como sabemos, la conjetura de los primos gemelos no ha sido, a fecha de hoy, ni probada ni refutada. No conocemos ningún argumento (ni constructivo ni de ningún otro tipo) que pruebe o refute la existencia de infinitos primos gemelos.

Dicho todo esto, y ya para terminar esta sección, nos ocuparemos del significado intuicionista de los enunciados disyuntivos, o *disyunciones*. Una disyunción es un enunciado en el cual se plantea una alternativa entre distintas posibilidades, normalmente dos, que constituyen lo que se llama *"disyuntos"*. Así por ejemplo,

"O se mantienen las actuales medidas de protección, o se extinguirá el lince ibérico"

Pues bien: lo que dicen este tipo de enunciados en matemáticas, bajo la interpretación intuicionista, es que se ha llevado a cabo (o se ha mostrado cómo llevar a cabo) al menos una de las construcciones correspondientes a la disyunción. Es decir, que al aseverar una disyunción estamos afirmando, en términos intuicionistas, que estamos en condiciones de producir, al menos, la construcción correspondiente a uno de sus dos disyuntos.

§ 4.7. El rechazo al principio de tercio excluso. Y es así como llegamos a la explicación del rechazo a una ley lógica tan básica y fundamental como el *principio de tercio excluso*. En efecto, Brouwer decía, a este respecto:

> "Considero la creencia en la validez universal del principio de tercio excluso como un fenómeno en la historia de la civilización, del mismo tipo que la vieja creencia en la rotación del firmamento alrededor de la Tierra."
> (Brouwer, *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, p. 7, ligeramente modificado.)

Como es bien sabido, el principio de tercio excluso es aquella ley lógica que nos permite afirmar la disyunción entre cualquier enunciado y su propia negación, como por ejemplo:

"O está lloviendo o no está lloviendo"

Si podemos afirmar una oración así, independientemente del tiempo que haga, es porque en dicho enunciado ya quedan recogidas todas las posibilidades existentes (al menos bajo la suposición, ciertamente idealizada, de que el concepto de *lluvia* sea suficientemente preciso).

Pues bien, para entender por qué esta ley lógica es rechazada bajo la escuela intuicionista, basta considerar la disyunción

"O existen infinitos primos gemelos o no existen infinitos primos gemelos"

De acuerdo con el análisis que acabamos de hacer, lo que dice este enunciado (leído en términos intuicionistas) es que estamos en disposición de proporcionar la construcción correspondiente a uno de los dos disyuntos. Pero no es ese el caso, como también sabemos. En efecto, a fecha de hoy no disponemos de una construcción que pruebe que existen infinitos primos gemelos, como tampoco disponemos de una construcción que pruebe lo contrario.

Por consiguiente, no estamos en condiciones de aseverar ninguno de los dos disyuntos de ese enunciado, y es por eso que, bajo la concepción intuicionista, tampoco estamos en condiciones de aseverar la disyunción.

La clave que subyace a todo esto reside en que, para les intuicionistas, el enunciado disyuntivo sobre los primos gemelos no trata de una realidad objetiva, externa (a diferencia del enunciado sobre la lluvia, por ejemplo), sino que trata sobre nuestras propias construcciones mentales. Y por eso, razonan, mientras no consigamos establecer mediante nuestras construcciones mentales que se da alguno de los dos disyuntos de ese enunciado, carecemos de base para afirmar que el enunciado disyuntivo es cierto. Solo bajo un prisma platónico, que supone que la verdad de uno de los dos disyuntos está predeterminada (y es completamente independiente de nuestro hacer y conocer), se puede aseverar esa disyunción.

De este modo, vemos que el intuicionismo rompe también con otro principio lógico elemental, emparentado con la ley de tercio excluso: el llamado *"principio de bivalencia"*. Según este otro principio, todo enunciado tiene un valor de verdad predeterminado, verdadero o falso, con independencia de que nosotres lo conozcamos o no. Pues bien, dicho principio tampoco resulta válido dentro de la concepción intuicionista, como estamos viendo. Según la filosofía de esta escuela, no podemos afirmar que el enunciado "Existen infinitos primos gemelos" tenga un valor de verdad predeterminado, mientras no estemos en condiciones de proporcionar una prueba o una refutación constructiva del mismo.

Y en fin, como estas, hay muchas otras diferencias entre la lógica clásica y la lógica intuicionista, que afectan a otras leyes, y a la estructura lógica de otros enunciados (como los enunciados condicionales y los enunciados universales, por ejemplo). Pero nosotres no nos vamos a detener ya en ellas (una introducción asequible a la lógica intuicionista en su conjunto es la "Lógica intuicionista" de García Suárez, en Garrido (ed.), *Lógica y lenguaje*, pp. 178–189).

§ 4.8. El intuicionismo de Brouwer y Heyting. El principal fundador y figura de referencia en la escuela de matemática intuicionista fue el matemático holandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer, que sentó los cimientos de esta doctrina en su tesis de doctorado, publicada en 1907 y titulada "Over de grondslagen der wiskunde" ("Sobre los fundamentos de la matemática").

En esa primera obra, Brouwer destaca la importancia que tiene para las matemáticas nuestra *"intuición del tiempo"*, esto es, nuestra capacidad de percibir el paso del tiempo y la repetición de secuencias temporales. Se trata de una idea de raigambre kantiana, que está en el origen, según Brouwer, de nuestra concepción de los números naturales, y a partir de ahí, de toda la matemática. Ello explica la denominación de "intuicionismo", escogida por Brouwer pocos años después para dar nombre a su concepción (cf. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, pp. 127ss., 147ss.).

Aunque la tesis doctoral de Brouwer estaba escrita en holandés, y su impacto inicial fue muy pequeño, sus publicaciones posteriores y la fama que ganaría como matemático notable, atrajeron una considerable atención hacia él y hacia su particular manera de entender la naturaleza de la matemática.

Así, Brouwer entró con fuerza en el debate de principios de siglo sobre los fundamentos de la matemática. Hilbert criticó sus posiciones con dureza, porque entrañaban una renuncia a grandes fragmentos de la matemática clásica, y porque contribuía a magnificar la sensación de crisis acaecida tras el descubrimiento de las paradojas. Sin embargo, uno de sus principales discípulos, Hermann Weyl, se alineó con Brouwer durante un tiempo, contribuyendo decisivamente a la propagación de sus doctrinas. Cuando Hilbert escribió "nadie nos expulsará del paraíso de Cantor" (cf. p. 67), era a Brouwer y a sus seguidores a quienes se estaba refiriendo.

Con el tiempo, sin embargo, la escuela intuicionista quedaría restringida a un círculo minoritario de matemátiques, aunque siempre con algunas figuras distinguidas del momento (cf. Fraenkel, Bar-Hillel y Levy, *Foundations of Set Theory*, p. 215).

La obra de referencia más importante de Brouwer son sus *Cambridge Lectures*, de las que hemos hecho una mención en la sección anterior. Se trata de una publicación póstuma, a partir de sus notas para unas series de conferencias impartidas entre 1946 y 1951. El grueso de sus publicaciones en filosofía de la matemática (sin incluir las *Cambridge Lectures* pero sí su tesis doctoral) se encuentran recopiladas en el primer volumen de sus *Collected Works, vol. 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*.

Una referencia esencial para el intuicionismo brouweriano es el denso y erudito ensayo de van Stigt titulado *Brouwer's Intuitionism*, publicado en 1990. Otro tratado de referencia inexcusable son los *Elements of Intuitionism* de Michael Dummett, que contiene una larga exposición filosófica en la que Dummett elabora su propia posición al respecto. Y también merece mención la introducción de Carl J. Posy titulada *Mathematical Intuitionism*, editada en la serie *Cambridge Elements in the Philosophy of Mathematics*. Ninguna de estas obras ha sido traducida al castellano por el momento.

Sí disponemos de traducción castellana del manual de *Introducción al intuicionismo* que publicó en 1956 el discípulo y principal continuador de la obra de Brouwer, el también holandés Arend Heyting, y del cual ha sido extraído el fragmento que vamos a reproducir a continuación.

También hay un extenso capítulo dedicado al intuicionismo en el libro de Jesús Alcolea *Logicismo, formalismo, intuicionismo*.

§ 4.9. Preliminares a la lectura de Heyting. La *Introducción al intuicionismo* de Heyting es un curioso tratado de matemática intuicionista escrito en forma de diálogo, cuyos personajes representan distintos puntos de vista en filosofía de la matemática. Entre ellos está "For", que representa el punto de vista formalista, "Clas", que representa a la matemática clásica, e "Int", en representación del intuicionismo, que es el que más habla a lo largo de la obra.

En el fragmento que vamos a reproducir a continuación, Heyting propone considerar las definiciones de dos números naturales, n y m. Según la definición de n, éste será el mayor número primo tal que $n-1$ sea también primo, si es que lo hay; y en caso de que no exista tal número, entonces se estipula que n sea sencillamente el número 1.

A partir de esta definición, se ve enseguida que n tiene que ser igual a 3. En efecto, el 2 y el 3 son primos consecutivos, y son los únicos, por lo que 3 es el mayor primo tal que $3-1$ es también primo.

Por otra parte, Heyting define a m como el mayor número primo tal que $m - 2$ sea también primo, si es que lo hay, y el número 1 en caso de que no exista tal número. En este caso hay 2 unidades entre m y $m - 2$, con lo que que se trata de dos primos gemelos.

Pues bien, si los primos gemelos fueran infinitos, entonces no habría ningún par de primos gemelos que fuera el mayor de todos, y por tanto tendríamos $m = 1$.

Sin embargo, si los primos gemelos fueran finitos, entonces sí habría un último par, el mayor de todos, y en tal caso m sería el segundo de los componentes de ese par.

Mientras que no sepamos si los primos gemelos son infinitos o no (es decir, mientras no esté resuelta la conjetura de los primos gemelos), no estaremos en condiciones de especificar el valor de m. Y en esto se apoya Heyting para rechazar la legitimidad de esa definición.

En cuanto a los números enteros, a los que Heyting se refiere varias veces, son los naturales conjuntamente con los negativos, como ya dijimos en el Módulo 1.

§ 4.10. Lectura de Heyting (Introducción al intuicionismo).

> “CLAS.— ¿Cómo está usted, señor In? ¿No se ha escapado al campo en un día de verano tan hermoso?
> ”IN.— Se me habían ocurrido algunas ideas, y he estado trabajando sobre ellas en la biblioteca.
> ”CLAS.— ¡Qué laboriosa abeja! ¿Y cómo le ha ido la cosa?
> ”IN.— Bastante bien. ¿Bebemos algo?
> ”CLAS.— Gracias. Apuesto a que ha estado trabajando sobre esas aficiones suyas, el rechazo del tercio excluso, y todo eso. Nunca he comprendido por qué la lógica debería ser fiable en cualquier otra cosa, pero no en las matemáticas.
> ”IN.— Ya hemos hablado de eso con anterioridad. La idea de que para la descripción de ciertos tipos de objetos puede ser más adecuado otra lógica, en vez de la ordinaria, ha sido sugerida algunas veces. Pero fue Brouwer el primero que descubrió un objeto que efectivamente requiere una clase distinta de lógica, a saber, la construcción mental matemática (...) Y la razón es que en matemáticas, desde el comienzo mismo tratamos de lo infinito, mientras que la lógica corriente está hecha para razonar acerca de colecciones finitas.
> ”CLAS.— Lo sé, pero a mi entender la lógica es universal, y se aplica a lo infinito tanto como a lo finito.
> ”IN.— Debería usted tener en cuenta cuál era el programa de Brouwer (...) Éste consistía en investigar las construcciones mentales matemáticas como tales, sin hacer referencia a cuestión alguna acerca de la naturaleza de los objetos construidos, tal como la de si existen independientemente de nuestro conocimiento de ellos. Y este punto de vista conduce inmediatamente a rechazar el principio de tercio excluso, como puedo demostrar mediante un ejemplo.
> ”Comparemos dos definiciones de números naturales, digamos n y m:
> ”*Definición 1.*

$$n = \begin{cases} \text{el mayor número primo tal que } n-1 \text{ también sea primo, si lo hay} \\ \\ 1, \text{ en caso de que no exista tal número} \end{cases}$$

"*Definición 2.*

$$m = \begin{cases} \text{el mayor número primo tal que } m-2 \text{ también sea primo, si lo hay} \\ \\ 1, \text{ en caso de que no exista tal número} \end{cases}$$

"La matemática clásica desdeña completamente la diferencia de carácter entre estas dos definiciones. El número n puede ser efectivamente calculado ($n = 3$), mientras que no poseemos ningún método para calcular m, ya que no se sabe si la sucesión de pares de primos gemelos es finita o no. De ahí que les intuicionistas rechacen la Definición 2 como definición de un número entero: consideran que solo está bien definido un número entero cuando se da un método para calcularlo. Ahora bien, este modo de razonar lleva a rechazar el principio de tercio excluso, ya que si la sucesión de números primos gemelos fuese o bien finita o bien infinita, entonces la Definición 2 sí definiría un número entero.

"Clas.— A eso puede objetarse que el grado de nuestros conocimientos acerca de la existencia o inexistencia del último par de primos gemelos es puramente contingente, y carece de trascendencia para las cuestiones relativas a la verdad matemática. O bien existe una infinidad de tales pares, en cuyo caso será $m = 1$, o bien el número de primos gemelos es finito, y entonces m será el mayor de ellos, es decir, el mayor número primo tal que $m - 2$ sea también primo. En cualquiera de los casos concebibles, m está definido; ¿qué importa que podamos o no calcularlo realmente?

"In.— El argumento que emplea usted es de índole metafísica. Si "existir" no significa "haber sido construido", entonces ha de poseer algún significado metafísico. Y no puede ser la incumbencia de la matemática investigar semejante significado, o decidir si es sostenible o insostenible. No ponemos ninguna objeción a que un matemático privadamente admita la teoría metafísica que le plazca, pero el programa de Brouwer entraña que estudiemos las matemáticas como algo más simple y más inmediato que la metafísica, a saber, el estudio de las construcciones mentales matemáticas. Y en ese contexto, "existir" ha de ser sinónimo de "haber sido construido".

"Clas.— Eso quiere decir, que mientras no sepamos si existe o no un último par de primos gemelos, la Definición 2 no será una definición de un número entero, pero que en cuanto se resuelva ese problema se convertirá en tal definición repentinamente. Supongamos que el 1 de enero de 1976 se demuestra que existe una infinidad de primos gemelos. A partir de ese momento, $m = 1$. Pero antes de esa fecha, ¿era $m = 1$ o no? (...)

"In.— Todo enunciado matemático afirma el hecho de que cierta construcción matemática ha sido efectuada. Resulta patente que antes de que la construcción haya sido realizada, no había sido realizada. Aplicando esto a su ejemplo, lo que vemos es que antes del 1 de enero de 1976 no había sido probado que $m = 1$. Pero no era a esto a lo que usted se refería. Me parece a mí que para poder aclarar el sentido de su pregunta tiene usted que referirse otra vez a conceptos metafísicos: a un mundo de objetos matemáticos que existiesen in-

dependientemente de nuestro conocimiento, y en el cual $m = 1$ sería verdadero en algún sentido absoluto. Pero yo repito que las matemáticas no deberían depender de conceptos tales como ése. Todes les matemátiques están convencides de que en algún sentido las matemáticas se refieren a verdades eternas, pero cuando tratamos de definir con precisión tal sentido, nos encontramos enredados en un laberinto de dificultades metafísicas. La única forma de eludir esas dificultades es desterrarlas de las matemáticas. A esto es a lo que me refería al decir que nosotres estudiemos las construcciones matemáticas como tales, y que para ese estudio la lógica clásica resulta inadecuada."
(Heyting, *Introducción al intuicionismo*, pp. 13–14, con ligeros retoques a texto y traducción.)

Desarrollos posteriores de intuicionismo y constructivismo

§ 4.11. El intuicionismo y otras escuelas constructivas. El intuicionismo es la principal escuela de matemática constructiva, pero no la única. Junto al intuicionismo existen otras corrientes, que difieren a la hora de especificar el tipo de construcciones que son aceptables para representar a los distintos objetos matemáticos, así como los modos de inferencia permitidos para razonar sobre ellas.

Entre las escuelas constructivas distintas al intuicionismo destacan dos: el *constructivismo recursivo*, iniciado por el matemático ruso Andrei Markov en la década de 1930, y el *constructivismo de Bishop*, fundado en 1967 por el estadounidense Errett Bishop, con la publicación de su libro *Foundations of Constructive Analysis*. Esta última resulta la más restrictiva de las tres, con la singularidad de que todos sus teoremas resultan compatibles con las otras dos escuelas, el intuicionismo y el constructivismo recursivo, así como con la matemática clásica.

Además, el constructivismo se presenta en muchas otras variantes y corrientes distintas. Una de ellas es la tradición de *matemática predicativa*, que tiene su origen en la sugerencia de Poincaré de evitar las definiciones impredicativas, que vimos en su momento (cf. p. 48). De hecho, Poincaré fue en buena medida un precursor del intuicionismo de Brouwer, aunque su filosofía de la matemática fluctúa a veces con posiciones convencionalistas, afines a las que defendía para la ciencia natural. De Poincaré se pueden consultar, en castellano, *Ciencia y método*, *La ciencia y la hipótesis* y la recopilación *Filosofía de la ciencia*, todas las cuales contienen secciones dedicadas a la filosofía de la matemática. Y existe además una extensa monografía en castellano dedicada a *La filosofía de la matemática de H. Poincaré*, del profesor Javier de Lorenzo.

También está disponible en nuestra lengua la *Filosofía de la matemática y de la ciencia natural* de Hermann Weyl, a quien ya nos hemos referido (y que también fue continuador de la tradición predicativista de Poincaré, en otra faceta de su obra). Aunque este libro, en concreto, está escrito más bien como una introducción general a la disciplina.

También el finitismo desarrollado por Kreisel o Feferman (al que nos referimos en el módulo anterior, p. 72) está englobado dentro de las variantes del constructivismo. Al fin y al cabo, el método finitista no es más que una forma de constructivismo, aunque la función que tiene dentro del programa formalista esté muy alejada del intuicionismo como tal.

Y el constructivismo no se agota en estas variantes, sino que hay otras.

Un excelente compendio de matemática constructiva "de amplio espectro" es el manual de Troelstra y van Dalen *Constructivism in Mathematics: An Introduction*, publicado en 2 volúmenes en 1988. Y un año antes se publicó otro más breve, cuyo título da buena cuenta de la diversidad de enfoques que existe en este terreno: *Varieties of Constructive Mathematics*, de Bridges y Richman. Esta diversidad, a la postre, constituye también un obstáculo de cara a la credibilidad de toda esta línea en filosofía de la matemática.

§ 4.12. Intuicionistas estrictos y simpatizantes: las dos tesis de Kreisel. En 1962, Kreisel publicó un artículo titulado "Foundations of intuitionistic logic", en el cual señalaba dos aspectos o tesis que debían ser diferenciadas a la hora de abordar la matemática intuicionista: una tesis *negativa* y otra *positiva* (cf. Nagel, Suppes y Tarski (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the 1960 International Congress*, p. 198).

Según la tesis positiva, la noción intuicionista de construcción matemática proporciona una base suficiente para desarrollar teorías matemáticas interesantes a partir de ella. Según la tesis negativa, esta es la *única* forma legítima de cultivar las matemáticas, por lo que la matemática clásica, en todo lo que no sea conforme a esta concepción, debe ser rechazada. Kreisel se declaró adepto a primera de estas tesis, pero no a la segunda.

Pues bien, la mayor parte de la gente que trabaja hoy día en intuicionismo suscriben con Kreisel su tesis positiva, pero no la negativa. Es decir: manifiestan un interés por el punto de vista intuicionista y por desarrollarlo en más profundidad, pero no creen que sea el único camino inteligible o legítimo para las matemáticas. Entre les intuicionistas strictes (es decir, entre quienes suscriben las dos tesis) cabe contar, como ejemplo notable, al filósofo Michael Dummett. Pero la mayor parte de pensadores que se interesan por el tema suscriben solo la primera de las tesis, por lo que deberían ser clasificados simplemente como simpatizantes, o "filointuicionistas".

Otro tanto cabe decir del resto de escuelas y corrientes constructivas, tal y como explican los autores de los manuales antes mencionados (cf. Troesltra y van Dalen, *Constructivism in Mathematics*, p. viii; Bridges y Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*, pp. v-vi). Yo mismo he publicado sobre intuicionismo sin considerarme intuicionista (es decir, adhiriéndome a la primera tesis de Kreisel, pero no a la segunda).

§ 4.13. Defensa moderna del intuicionismo en Michael Dummett. El filósofo británico Michael Dummett llevó a cabo una defensa renovada de la posición intuicionista, reformulando en buena medida los argumentos filosóficos sobre los que se había venido sosteniendo.

Hay que decir que la filosofía original de Brouwer era de un idealismo extremo, de acuerdo con el cual las construcciones matemáticas son construcciones mentales individuales, que solo existen en la mente de cada persona de forma aislada, y que resultan distorsionadas al ser transmitidas mediante el lenguaje y comunicadas a otras mentes (cf.

Alcolea, *Logicismo, formalismo, intuicionismo*, pp. 117–124; van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, pp. 203–210).

Este aspecto individualista (o *solipsista*) de la filosofía de Brouwer fue puesto en duda por gran parte de sus seguidores, empezando por su discípulo Heyting (cf. van Stigt, *Brouwer's Intuitionism*, pp. 274–279). Y es justamente el aspecto que rechaza Dummett, cuya postura, respecto a esta cuestión concreta, está en las antípodas de Brouwer.

Dummett defiende, efectivamente, que la comunicabilidad lingüística es un aspecto esencial de las construcciones mentales intuicionistas (cf. Dummett, *Elements of Intuitionism*, p. 270). Y de hecho, por paradójico que parezca, Dummett basa su defensa del intuicionismo en su mayor capacidad para explicar el lenguaje matemático como una actividad social compartida, determinada exhaustivamente a partir del uso que de él se hace. Enseguida veremos al propio Dummett explicarse al respecto.

Además, Dummett también ha situado al intuicionismo como un caso paradigmático de filosofía antirrealista acerca de un fragmento de nuestro discurso (en este caso, el discurso matemático). Y ha estudiado en profundidad el contraste entre realismo y antirrealismo en diferentes ámbitos filosóficos, y su repercusión sobre la teoría del significado de los lenguajes naturales.

En particular, Dummett ha contrapuesto la semántica intuicionista (o *verificacionista*) a la semántica *realista* propia de la matemática clásica. La primera se basa en la noción de *prueba matemática* (demostración) para dar las condiciones del significado, mientras que la segunda se basa en la noción de *verdad*. Pues bien, según Dummett, en la semántica intuicionista para las matemáticas encontramos el prototipo de teoría del significado para cualquier discurso antirrealista; es decir, para cualquier fragmento del lenguaje sobre el cual queramos adoptar una actitud antirrealista (cf. Dummett, *La verdad y otros enigmas*, pp. 321–322; y "What is a theory of meaning (II)", en Evans y McDowell (eds.), *Truth and meaning*, pp. 110–111).

En castellano, contamos con la traducción de una compilación de artículos de Dummett, *La verdad y otros enigmas*, entre los cuales se encuentra "Las bases filosóficas de la lógica intuicionista" (de 1975). Este es uno de sus artículos clásicos sobre el tema, del cual están extraídos los fragmentos que vamos a reproducir a continuación. También puede consultarse, por ejemplo, el trabajo de Ponte Azcárate, M., "Michael Dummett: una defensa del anti-realismo en las matemáticas", en *Laguna: Revista de filosofía* 9, 2001, pp. 151–162.

§ 4.14. Lectura de Dummett ("Las bases filosóficas de la lógica intuicionista").

> "El problema que me ocupa en esta ocasión es el siguiente: ¿qué razón convincente puede existir para repudiar, dentro del razonamiento matemático, los cánones de la lógica clásica en favor de los de la lógica intuicionista? No estoy interesado aquí en las justificaciones de la matemática intuicionista desde un punto de vista ecléctico, es decir, desde un punto de vista en el que se admite a la matemática intuicionista como una forma legítima e interesante de matemática junto con la matemática clásica (...) Tampoco me interesa aquí la interpretación de los escritos de Brouwer o Heyting: el problema es qué formas de justificación de la matemática intuicionista son sostenibles, no

cuáles tenían en mente determinados autores, por muy eminentes que fueran (. . .)

"Cualquier justificación para adoptar una y no otra lógica como la lógica para las matemáticas debe depender de cuestiones de *significado*.

"(. . .) El significado de un enunciado matemático determina y está determinado de manera exhaustiva por su *uso*. El significado de este tipo de enunciado no puede ser, ni contener como ingrediente, nada que no esté manifiesto en el uso que de él hagamos, y que descanse únicamente en la mente del individuo que aprehende dicho significado: si dos individuos están de acuerdo por entero en cuanto al uso que debe hacerse del enunciado en cuestión, entonces están de acuerdo en cuanto a su significado. La razón es que el significado de un enunciado consiste exclusivamente en su papel como instrumento de comunicación entre individuos."
(Dummett, "Las bases filosóficas de la lógica intuicionista", en su libro *La verdad y otros enigmas*, pp. 296–297, con traducción en parte distinta a la aquí ofrecida.)

"En la teoría del significado que subyace al platonismo, la comprensión que un individuo tiene del significado de una oración consiste en su conocimiento de qué condición debe cumplirse para que la oración sea verdadera, aun cuando la condición sea tal que no pueda, en general, reconocerse que se cumple cuando así ocurre.

"Cuando la oración es tal que estamos en posesión de un procedimiento de decisión efectivo, no hay problema alguno: la comprensión de la condición bajo la cual la oración es verdadera puede decirse que resulta manifestada a través del dominio de ese procedimiento de decisión, ya que el individuo es capaz, a través de ese medio, de situarse en una posición en la cual pueda reconocer si la condición para la verdad de la oración se da o no. Y nosotres podemos suponer razonablemente que, en esta posición, el individuo está expresando mediante su comportamiento lingüístico su reconocimiento de que la oración es, respectivamente, verdadera o falsa. Sin embargo, cuando la oración en cuestión es una para la que no hay procedimiento de decisión efectivo, como sucede con la inmensa mayoría de oraciones de cualquier teoría matemática interesante, la situación es diferente. Dado que la oración en este caso no es, por hipótesis, decidible mediante un procedimiento efectivo, la condición que debería, en general, cumplirse para que sea verdadera, no es tal que nosotres seamos capaces de reconocer que se cumple, o de situarnos en una posición en la que lo podamos reconocer. Por lo tanto, los comportamientos en los que se exhibe una capacidad para discernir la oración como verdadera allí donde la condición para su verdad puede ser efectivamente reconocida, no serán más que una manifestación incompleta del conocimiento de la condición para la verdad de la oración en cuestión: tan solo muestran que la condición puede ser reconocida en algunos casos, no que tengamos una comprensión de en qué consiste, en general, que se cumpla esa condición, incluyendo los casos en los que somos incapaces de reconocer que se cumple. Es evidente, de hecho, que el conocimiento que se atribuye a alguien que se supone que entiende la oración es un conocimiento que trasciende la capacidad de ser manifestado mediante el uso de dicha oración. La teoría platónica del significado no puede ser una teoría en la cual el significado esté completamente determinado por el uso." (Dummett, ibídem, pp. 305–307, con traducción en parte distinta a la aquí ofrecida.)

§ 4.15. Las tres escuelas fundacionales. Cada una de las tres escuelas fundacionales en filosofía de la matemática comprendían, como hemos visto, dos ingredientes principales: una tesis filosófica sobre la naturaleza de la matemática, y un proyecto de investigación de carácter marcadamente técnico (un *programa*), consistente en llevar a efecto dicha tesis, con lo que ello significa en cada caso. Dos ingredientes distintos, pero complementarios, y que pueden resultar fructíferos por separado.

En el caso del logicismo, el programa consistía en llevar a cabo una reducción de la aritmética y el análisis matemático a la lógica. Y este programa fracasó, al menos en su formulación original, debido a las paradojas de la teoría de conjuntos. Pero en absoluto se puede considerar que dicho programa fuera "un fracaso", pues gracias a él se profundizó enormemente en lógica, teoría de conjuntos y en la propia filosofía de la matemática. Además, el logicismo sigue contando con continuadores, si bien en versiones muy modificadas respecto a la formulación inicial.

En el caso del formalismo, el programa consistía en formalizar todas las teorías matemáticas (o mostrar cómo ello era posible) y suministrar una prueba finitista de consistencia para las mismas. Dicho programa también fracasó, debido a los resultados limitativos, y en especial los teoremas de incompletitud de Gödel, que mostraron que ni siquiera la aritmética elemental admitía una formalización completa ni una prueba finitista de consistencia.

Pero tampoco se puede considerar que el formalismo fuera "un fracaso", pues tales resultados, aún siendo limitativos, se cuentan entre los más preciados e interesantes que ha dado la ciencia durante todo el siglo XX. Además, esta propuesta ha seguido contando con seguidores, aunque con modificaciones respecto a las ideas inicialmente abrazadas por Hilbert.

En el caso del intuicionismo, por último, el programa consistía en reconstruir las distintas teorías matemáticas, hasta donde fuera posible, bajo los cánones constructivos estipulados por esta escuela. Grandes porciones de la matemática clásica quedaron fuera de esa reconstrucción, pero ello no supuso un revés inesperado, al contrario: era esperado que así sucediera, y era justamente lo que quería Brouwer, porque consideraba que esa parte de la matemática era ilegítima y había que deshacerse de ella.

En cualquier caso, el intuicionismo fue siempre una opción mucho más marginal y minoritaria que las otras dos escuelas clásicas, y lo sigue siendo (además de contar con varias alternativas rivales, dentro del propio espectro de la matemática constructiva). En cuanto a su desarrollo técnico, es decir, en cuanto a su despliegue propiamente matemático, el programa intuicionista se ha venido desarrollando a lo largo de los años sin grandes cambios.

En cuanto a su filosofía de fondo, sin embargo, (es decir, en cuanto a la filosofía intuicionista), no podemos decir lo mismo. Esta ha evolucionado visiblemente, renunciando al solipsismo en favor de una tesis comunitarista del lenguaje.

Con posterioridad a las tres escuelas fundacionales, han surgido algunas otras propuestas en filosofía de la matemática que combinan esta provechosa dualidad, entre una tesis filosófica y un proyecto de investigación (o programa), que se proponga desarrollar técnicamente esa tesis, en un sentido concreto. Casi siempre, quien elabora la defensa de la tesis filosófica y quien emprende la tarea de desarrollarla técnicamente es la misma persona. Dos ejemplos de esto el estructuralismo y el nominalismo, de los que trataremos brevemente en el Módulo 6.

MÓDULO 5

El convencionalismo

Seguir una regla

§ 5.1. Presentación del convencionalismo. Una posición convencionalista con respecto a una teoría matemática es aquella según la cual dicha teoría es un mero complejo de *convenciones*, cuyo carácter es *normativo* en vez de descriptivo o representativo. Según esta corriente, no existen unos "fundamentos" de la matemática que la filosofía tenga la misión de buscar y de formular; en su lugar, la misión de la filosofía consiste en explicar las condiciones de posibilidad de las convenciones sociales en general, y la naturaleza de las teorías matemáticas como un caso especial de éstas, con sus particularidades especiales.

El convencionalismo tiene un punto de unión con el formalismo, y es la consideración de las teorías matemáticas como una mera estipulación humana. Sin embargo, a estas dos corrientes les separa su actitud ante la cuestión de la fundamentación (y en particular, ante la cuestión de la formalización y cuestión de la consistencia). La escuela formalista, como vimos, considera necesario fundamentar las convenciones que subyacen a las teorías matemáticas, mediante una formalización exhaustiva de las mismas y una posterior una demostración de consistencia. Por el contrario, en la corriente convencionalista se entiende que las teorías matemáticas, como prácticas sociales establecidas, son legítimas en sí mismas, y que por consiguiente no hay nada que fundamentar.

Una y otra corriente (convencionalismo y formalismo) tienen también debilidades comunes: a las dos les cuesta trabajo explicar la ubicuidad de los conceptos matemáticos, y su patente fertilidad, o aplicabilidad, para el resto de nuestro conocimiento y para nuestro manejo con el mundo exterior. Si las teorías matemáticas son meros juegos convencionales, al mismo nivel que el ajedrez o el juego de la oca, entonces ¿de dónde deriva la ubicuidad de sus conceptos fundamentales, y de dónde deriva la utilidad que tienen para nuestra ciencia y nuestra tecnología en su conjunto? Estas son cuestiones difíciles de afrontar para estas dos escuelas.

En nuestra aproximación al convencionalismo, nosotres vamos a tratar aquí principalmente de las aportaciones del filósofo austriaco Ludwig Wittgenstein, que es el principal representante de la línea de pensamiento convencionalista en la filosofía de la matemática contemporánea.

Otra figura notable que también abrazó cierta forma de convencionalismo en filosofía de la matemática fue Henri Poincaré, del que ya hemos hablado por otras facetas de su trabajo, pero en el que no nos detendremos aquí.

§ 5.2. La aportación de Wittgenstein a la filosofía de la matemática. Adscribir a Wittgenstein una filosofía de la matemática convencionalista puede resultar polémico, ya que han sido muchas las visiones sobre la matemática que se han creído encontrar en el conjunto de su obra (incluyendo el logicismo y el intuicionismo, entre otras).

Además, los escritos de Wittgenstein sobre filosofía de la matemática han recibido duras críticas, incluyendo por ejemplo a Dummett, a pesar de su alta valoración de la contribución global de Wittgenstein a esta disciplina filosófica:

> "Muchos de los pensamientos [en las *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*] se expresan de una manera que el propio autor reconoce como imprecisa u obscura; algunos pasajes contradicen a otros; algunos son del todo incluyentes (...) otros pasajes en fin, particularmente aquellos que versan sobre la consistencia y acerca del teorema de Gödel, son de escasa calidad o contienen errores manifiestos."
> (Dummett, "La filosofía de la matemática de Wittgenstein", trad. en *Thémata* 3, 1986, p. 33).

Pero lo importante para nosotres no será establecer lo que opinaba Wittgenstein "realmente" sobre la matemática, o qué errores o cambios de parecer cabe encontrar en sus escritos. Lo que nos interesa es cómo contribuyó a desarrollar una propuesta en concreto, la filosofía de la matemática convencionalista, es decir, qué argumentos puso sobre la mesa al respecto.

Las principales aportaciones de Wittgenstein en este sentido cabe encontrarlas en sus *Investigaciones filosóficas*, las *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática* y la *Gramática filosófica*. Se trata de obras póstumas, publicadas a partir de manuscritos inéditos del autor, que falleció en el año 1951. Y están confeccionadas recopilando notas dispersas, agrupadas por fecha o proximidad temática, y redactadas con el peculiar estilo aforístico que caracteriza la escritura de Wittgenstein durante su segunda época.

De hecho, Wittgenstein produjo únicamente tres publicaciones filosóficas en vida: una breve reseña en 1913, un artículo en 1929, titulado "Algunas observaciones sobre la forma lógica", y su archiconocido *Tractatus Logico-Philosophicus*, publicado por primera vez como artículo en 1921, y después como libro (y disponible también en castellano, en varias traducciones distintas). El *Tractatus* pertenece a una primera etapa en la filosofía de este autor, muy cercana al logicismo de Frege y Russell, y muy distinta de la que después emprendió, que es la que nos va a interesar aquí.

Además, en 1982, el lógico y filósofo estadounidense Saul Kripke publicó un libro titulado *Wittgenstein: On Rules and Private Language* (también traducido), en el cual presentó de una forma enormemente original y novedosa muchas de las cuestiones tratadas por Wittgenstein acerca del seguimiento de reglas, y de las condiciones de posibilidad de las convenciones matemáticas y de cualquier forma de lenguaje en general.

El argumento de Kripke constituye una referencia inexcusable al tratar de la filosofía de la matemática de Wittgenstein, ya sea para aceptar o para rechazar las conclusiones que se derivan de él. Y nosotres comenzaremos nuestra exposición, precisamente, explicando ese argumento.

Entre las numerosas monografías sobre Wittgenstein, y en particular entre las dedicadas a su filosofía de la matemática, merece la pena consultar, en inglés, el estudio de Stuart Shanker, *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, de 1986. Y mucho más reciente, la introducción de Juliet Floyd *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, para los *Cambridge Elements in the Philosophy of Mathematics.* En castellano destacan, entre otras publicaciones, el libro de Glenda Satne, *El argumento escéptico*, y el artículo del profesor Luis Valdés, "Una mala comprensión de Wittgenstein", en *Daimon: Revista de filosofía* 2, 1990, pp. 217–227.

§ 5.3. El argumento escéptico sobre el seguimiento de reglas. En el libro que acabamos de mencionar, Kripke presenta un argumento escéptico que atribuye a Wittgenstein, y que constituye según sus propias palabras toda una novedad en la historia de la filosofía:

> "Wittgenstein ha inventado una forma nueva de escepticismo. Personalmente, me inclino a considerarla como el problema escéptico más radical y original que hasta la fecha ha visto la filosofía."
> (Kripke, *Wittgenstein: A propósito de reglas y lenguaje privado*, p. 73.)

El propio Kripke compara este argumento con otras formas de escepticismo filosófico clásico, como el escepticismo sobre la existencia del mundo exterior, (pp. 66–72). Pero ve una novedad importante, y es que en este caso la duda escéptica acaba por ser trasladada a la posibilidad misma de nuestro lenguaje, como vamos a ver enseguida. Esto entronca una vez más con el giro lingüístico, por cierto (el lenguaje vuelve a aparecer en primer plano).

Aunque Kripke concede a Wittgenstein el mérito de haber sido el primero en concebir o vislumbrar este argumento, aclara que no lo expone con una intención exegética de las opiniones de Wittgenstein (cf. pp. 11, 19), ni siquiera de las suyas propias:

> "Merece resaltarse que no pretendo en este escrito hablar por mí mismo ni tampoco decir nada, salvo en digresiones ocasionales y menores, acerca de mis propias ideas sobre las cuestiones sustantivas. El propósito primario de este trabajo es la presentación de un problema y un argumento, no su evaluación crítica. Primariamente, se me puede leer, salvo en muy pocas digresiones obvias, casi como a un abogado que presentara un argumento filosófico de primer orden según le impresionó a él. Si esta obra tiene una tesis principal propia, es la de que el problema y el argumento escépticos de Wittgenstein son importantes, merecedores de consideración seria."
> (Kripke, *Wittgenstein: A propósito de reglas y lenguaje privado*, p. 13.)

El hecho de que Kripke no se comprometa con este argumento, añadido a que es muy dudoso suponer que Wittgenstein se hubiera identificado con él, ha llevado a bautizarlo como *“argumento de Kripkenstein”*, autor ficticio resultante de combinar los nombres de estos dos autores.

El argumento en cuestión se puede presentar de varias maneras, por ejemplo la siguiente. Supongamos que tenemos un alumno al cual estamos instruyendo en la aritmética elemental. Después de enseñarle la serie de los números naturales y las operaciones básicas entre ellos, siempre con números pequeños, le mostramos una secuencia particular, a ver si es capaz de continuarla:

$$2 \qquad 4 \qquad 6 \qquad 8 \qquad 10 \qquad \ldots$$

Se trata, naturalmente, de la serie de los números pares.

Nuestro alumno hace un gesto de comprensión y la continúa alegremente:

$$\ldots \qquad 12 \qquad 14 \qquad 16 \qquad 18 \qquad 20 \qquad 22 \qquad 24 \qquad \ldots$$

Supongamos ahora que, con mucha paciencia, hacemos que el alumno continúe la serie hasta pasado el número 1.000. Y entonces observamos que, al pasar ese número, el alumno prosigue la serie de una manera sorprendente:

$$\ldots \qquad 996 \qquad 998 \qquad 1.000 \qquad 1.004 \qquad 1.008 \qquad 1.012 \qquad 1.016 \qquad \ldots$$

Nosotres protestamos inmediatamente, como es natural, y tratamos de hacerle ver que se está equivocando, y que lo que tiene que hacer es proseguir la serie “del mismo modo” que la había desarrollado hasta ese momento. Sin embargo, para nuestro asombro, el alumno no admite que se haya equivocado: nos dice que está haciendo “lo mismo” que ha venido haciendo hasta entonces.

¿Qué podríamos hacer para convencerle? Podríamos indicarle que lo que tiene que hacer para continuar la serie es sumar siempre 2 unidades al número anterior (lo que técnicamente se denomina *“sucesión aritmética de diferencia 2”*). Él ya sabe lo que es sumar, y ha efectuado numerosas sumas correctamente.

Sin embargo, todas las sumas que el alumno ha efectuado con anterioridad comprendían números inferiores a 1.000. Y ahora nos dice que, tal y como él lo ha entendido, “al sumar 2 unidades al número 1.000, se obtiene como resultado 1.004” (!). Por eso insiste en que, al continuar la serie de esa manera, estaba haciendo “lo mismo” que había venido haciendo hasta llegar ahí.

Nuestro alumno añade, además, que toda la instrucción que ha recibido anteriormente es compatible con la forma en que él ha captado esa regla, dado que esa instrucción se realizó siempre con números más pequeños de 1.000.

Tras un tiempo de estéril debate, llegamos a la conclusión de que no hay manera de convencerle. No somos capaces de hacer ver a nuestro alumno díscolo que su continuación de la serie no es la correcta.

La posición de este alumno plantea una forma de escepticismo, por cuanto no se puede saber, según él, cuál es la “manera correcta” de continuar la serie de los números pares, cuando llegamos a números mayores que los que hemos visto en la estapa de instrucción. O lo que es lo mismo, que no hay forma de saber cuál es la forma correcta de aplicar una regla como *sumar 2*, cuando lo hacemos a números distintos a aquellos sobre los que se nos ha instruido en el uso de la regla.

§ 5.4. El escepticismo en primera persona. Por si fuera poco, una vez sembrada la semilla de este escepticismo, se puede extender con facilidad a la primera persona, esto es, a mi propio caso. En efecto, ¿cómo sé yo mismo que el resultado de sumar 2 al número 1.000 es *realmente* el número 1.002, en lugar del número 1.004? Si nunca antes he visto efectuada esa suma en ninguna parte, ¿cuál es mi *justificación* para creer que ése es el resultado correcto? ¿En qué *hechos* me baso?

Ante estas preguntas es posible que contestemos algo así como que la regla de la suma, como convención matemática establecida, obliga a que el resultado de sumar 2 al número 1.000 sea 1.002 y no 1.004. Pero el problema se plantea por el hecho de estar aplicando esa convención a un caso nuevo, sobre el que no se había aplicado antes. Y en este sentido, parece las aplicaciones anteriores resultarían "compatibles" con cualquier forma de aplicación que se quiera proponer para ese caso.

Así, nuestro alumno podía haber "captado" la serie de forma que después del 1.000 venga el 1.004, después 1.008, 1.012 y 1.016, tal y como hemos expuesto. Pero también podría haber "captado" que a partir de 2.000 la serie continúa 2.006, 2012, 2018 . . . . O podría haber "captado" que a partir de 1.016 la serie prosiguiera 1.500, 2.000, 2.500, etc.

En definitiva, cualquier manera de proyectar una serie matemática (o la aplicación de una regla) a un caso nuevo parece "compatible" con las aplicaciones anteriores, en tanto en cuanto tales aplicaciones no recogen explícitamente ese nuevo caso.

Claro que el número 1.000 resultará demasiado pequeño para estos propósitos, pues cualquier persona adulta de nuestra cultura ha hecho sumas de números mayores que 1.000. Pero esta cifra es solo un ejemplo. Para hacer el caso más realista, bastaría con escoger cualquier número mayor que todos aquellos que hayamos tenido ocasión de manejar previamente en ocasiones concretas.

§ 5.5. El escepticismo lingüístico generalizado. Para empeorar aún más cosas, el escepticismo que estamos describiendo se generaliza una vez más, y no ya al caso de la primera persona, sino además, a todas las convenciones sociales, incluidas las lingüísticas. La conclusión, si nos tomamos en serio el argumento, es una duda sobre la posibilidad de comunicación lingüística —una duda sobre la posibilidad de existencia del lenguaje mismo.

Según esta línea de pensamiento, cualquier palabra podría significar cosas muy distintas a las que yo me imagino, siendo ese significado compatible con todo el uso anterior que yo haya hecho de esa palabra o del que haya sido testigo.

Así por ejemplo, la palabra "techo" podría empezar a significar *suelo* a partir del 1 de enero de 2030, y ello sería compatible con cualquier utilización que se haya hecho de la palabra antes de ese año.

Y del mismo modo, podría suceder que cualquier mañana, al levantarme, todas las palabras de mi lenguaje tuvieran significados distintos a los que yo les atribuyo. Y ello sería compatible, en principio, con mi uso anterior de esas palabras, es decir, con todo mi aprendizaje y mi experiencia pasada sobre las mismas.

De todo esto parece seguirse que no hay *hechos objetivos* que justifiquen mi creencia de que la palabras tienen el significado que yo les atribuyo, o que se deben aplicar en las distintas ocasiones como yo creo que se deben aplicar. Y esta es, en definitiva, la esencia del argumento escéptico sobre el seguimiento de reglas, que Kripke plantea bajo inspiración wittgensteiniana.

El convencionalismo en filosofía de la matemática

§ 5.6. El método de análisis filosófico. El *método de análisis filosófico* que caracteriza la obra de Wittgenstein parte del convencimiento de que la mayor parte de los problemas filosóficos tienen su origen en el lenguaje, en el sentido de que son el resultado de usar determinadas palabras transgrediendo las reglas implícitas que gobiernan su uso habitual. La tarea del análisis filosófico, en consecuencia, consiste en identificar el tipo de transgresión que subyace a los distintos problemas planteados, mostrando de qué forma se han desviado los conceptos involucrados de su funcionamiento natural (cf. por ejemplo *Tractatus*, proposición 4.112, p. 161 de la ed. castellana de Tecnos, e *Investigaciones filosóficas*, I/§§109–132, pp. 123–133 de la ed. castellana).

El objetivo de ese método es proporcionar una clarificación del problema filosófico en cuestión, hasta tal punto llegue a *disuelverlo*, es decir, que acabe con la necesidad de seguir planteandose ese problema. No se trata, pues, de buscar al problema una *solución* propiamente dicha, en un sentido o en otro, sino de llegar a entender que su planteamiento mismo contiene un error, y que lo conveniente es desistir de ese problema y dejarlo de lado (dejar de prestarle atención).

Este procedimiento, que supone llevar el giro lingüístico a su expresión más extrema,, se conoce habitualmente como la "disolución de los problemas filosóficos mediante el análisis lógico del lenguaje".

§ 5.7. La "disolución" de la pregunta por los fundamentos: la matemática como una práctica normativa. El resultado de aplicar este método disolutivo a la matemática, de acuerdo con los planteamientos de Witgenstein, hace que esta nos aparezca como un entramado de *prácticas comunitarias* (o *convenciones sociales*), en el seno de una comunidad de usuaries. Tal comunidad es, fundamentalmente, la comunidad matemática (el conjunto de personas que investigan y enseñan matemáticas), pero también, por extensión, toda la comunidad lingüística que conoce algo de matemáticas y las practica a menor escala.

Vistos de este modo, los enunciados matemáticos no son "enunciados declarativos", aunque así lo parezcan a primera vista. Los enunciados matemáticos no expresan proposiciones susceptibles de ser verdaderas o falsas. En su lugar, los enunciados matemáticos aparecen como simples productos de las reglas internas del lenguaje matemático (o, dicho en terminología wittgensteiniana, de ese *"juego de lenguaje"* especial, que es el juego de lenguaje matemático):

> "¿Pero qué querría decir *esto*: 'Incluso si todos los seres humanos creyeran que 2×2 es 5, no obstante sería 4'?—¿Cómo sería si todos los seres humanos creyeran esto?—Bueno, yo podría imaginarme que tuvieran otro cálculo o una técnica que nosotres no llamaríamos 'calcular'. ¿Pero sería esto *falso*? (¿Es *falsa* la coronación de un rey? A seres distintos de nosotres les podría parecer muy singular.)"
> (Wittgenstein, *Investigaciones filosóficas*, II, p. 517.)

La clave consiste, por tanto, en aceptar que la matemática tiene un carácter esencialmente normativo, y no descriptivo.

Aplicando este primsma de visión, la demostración de una proposición matemática no hay que entenderla como un expediente separado de la proposición que demuestra. No debe verse como un procedimiento para verificar algo externo, como cuando nos asomamos a la ventana para ver el tiempo que hace. Muy al contrario, la demostración, una vez efectuada, pasa formar un todo con la proposición demostrada, y a enriquecer ese sector de la práctica normativa en cuyo contexto están integradas ambas:

> "Reparemos en que en la matemática son proposiciones *gramaticales* las que nos convencen; la expresión, el resultado, de ese convencimiento es, por tanto, que *aceptamos una regla.*"
> (Wittgenstein, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, p. 133.)

> "Diríamos: la demostración cambia la gramática de nuestro lenguaje, cambia nuestros conceptos. Produce nuevas conexiones y crea el concepto de esas conexiones. (No establece que estén ahí, sino que no están ahí mientras ella no las produzca.)"
> (Wittgenstein, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, p. 136.)

¿Qué decir, entonces, de las conjeturas matemáticas? ¿En qué consisten los problemas abiertos, según este planteamiento? Pues bien, las conjeturas matemáticas vienen a ser lagunas en nuestro sistema de reglas, es decir, rincones que no quedan decididos por ellas. Mientras que la conjetura permanece abierta, la laguna genera incomodidad, y la comunidad matemática se esfuerza por cerrarla, por eliminar el desajuste (sobre todo si el problema en cuestión juega un papel central en una determinada teoría, o en el edificio entero de la matemática).

Si finalmente se encuentra la prueba y se deshace la conjetura, ya sea en un sentido o en otro, entonces la comunidad matemática descansa, y la demostración encontrada pasa a integrarse en el sistema de reglas, ocupando el lugar donde antes estaba la laguna. Así, lo que antes era un punto ciego del sistema de reglas (la conjetura no decidida), se convierte ahora en un nuevo amasijo de relaciones normativas (la demostración), que refuerzan el sistema en ese punto.

Mediante este tipo de consideraciones, el convencionalismo el filosofía de la matemática trata de "diluir" el problema de la fundamentación, presentándolo como un falso problema:

> "¡¿Para qué necesita la matemática una fundamentación?!"
> (Wittgenstein, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, p. 319.)

¿Qué decir, pues, de la crisis de fundamentos de la matemática, de acuerdo con esta línea de pensamiento? Pues que era cuanto menos innecesaria, por la sencilla razón de que no había nada que fundamentar.

§ 5.8. La respuesta del convencionalismo al argumento escéptico. Llegados a este punto, es el momento de preguntarnos si estamos en condiciones de dar una respuesta al argumento escéptico radical de Kripke. Pues bien, una forma posible de abordar este argumento, en coherencia con lo que hemos venido comentando, es intentar que la persona que plantea el escepticismo cambie su perspectiva, adoptando un enfoque completamente diferente.

El seguimiento de reglas, para empezar, es una práctica comunitaria, una práctica social. Y por consiguiente, no es algo sobre lo que quepa plantearse cuestiones de justificación, o la búsqueda de "hechos que demuestren la corrección de mi uso". Lo único que cabe hacer es utilizar esa práctica, sumergirse en ella, tratar de conocerla (desde dentro y desde fuera), y en caso de que surja una discordancia real, intentar resolverla de forma comunitaria, interactuando con el resto de usuaries de la misma.

En este sentido, la perspectiva normativa de las matemáticas, y la perspectiva comunitaria, van indisolublemente unidas. El seguimiento de reglas solo tiene sentido allí donde haya una comunidad de usuaries o seguidores de reglas. Y el criterio de corrección reside, precisamente, en la forma en que esa comunidad se comporta al respecto, incluyendo la forma en que reacciona ante las discordancias, cuando se producen.

Desde este punto de vista, es un error pensar que "coincidamos en los resultados" de nuestras sumas porque todes "tenemos asimilado un mismo concepto" de dicha operación. Lo que ocurre es algo bien distinto, a saber: en nuestra vida en común nos empujamos mutuamente (comunalmente) a compartir ciertas prácticas, entre ellas la práctica de la suma. Y es el hecho de que hayamos conseguido tener esa práctica común el que permite hablar de *el concepto de suma* (o *la regla de la suma*), y nos permite atribuirnos mutuamente la asimilación de ese concepto (o el seguimiento de esa regla). Lo prioritario, por consiguiente, es lo comunal, lo social. Esta perspectiva es diametralmente opuesta a considerar la regla como un ente abstracto, como un objeto platónico con existencia propia, respecto del cual nunca tenemos la completa seguridad de "si nos estamos ajustando a él o no". Si la perspectiva platónica nos aboca al escepticismo kripeano, la perspectiva comunal nos saca de ese ensimismamiento, y nos pone en realidad.

Complementando a esto, hay que decir también que lo característico de seguir una regla no se limita a exhibir una conducta regular o uniforme, esto es, una conducta que repita periódica o regularmente determinados patrones. Lo característico del seguimiento de reglas es algo mucho más rico y sutil que la simple regularidad en la conducta, e incluye cosas como la existencia de una comunidad de usuaries que se reconocen mutuamente el uso de la regla, el hecho de que estas personas se corrijan unas a otras cuando alguien infringe la regla, el hecho de que que adiestren a nuevas personas que se incorporan al uso de la regla, el hecho de que globalmente coincidan en sus criterios de aplicación, el hecho de que presenten respuestas similares cuando son sometidas al mismo adiestramiento, etc.

Es precisamente en la existencia de esa comunidad, y en toda esa gama de comportamientos sociales que rodean el uso de reglas, donde reside la naturaleza de las mismas. Y lo que es más: el hecho mismo de que entre esas personas haya brotado el seguimiento de reglas, y sean capaces de compartirlas, es lo que las hace *comunidad* en un sentido pleno.

Por otra parte, es de suponer que el niño escéptico de Kripke, si de verdad existiera, sería rápidamente singularizado dentro de su comunidad, en la medida en que su modo de reacción o de comportamiento lo encamina a un rol diferencial dentro de ella. Si un caso así se diera en nuestro sistema educativo actual, probablemente le atribuirían "necesidades especiales", o "capacidades especiales", y programarían para él algún tipo de "diversificación curricular".

Y una vez que hemos llegado hasta este punto, podemos abordar la insistencia de

Wittgenstein respecto a la imposibilidad de un *lenguaje privado*, entendido este como un lenguaje cuyos significados fueran únicos, y accesibles a una sola persona. El problema es que, en un caso así, la persona en cuestión carecería de un criterio de corrección comunitario en el uso de esos términos privados. Y por razones muy parecidas, es imposible que solo una vez en la historia de la humanidad se hubiera seguido una regla, porque entonces no sería una “regla” propiamente dicha. La regla exige una práctica comunal y continuada, como algo consustancial a su propia naturaleza de regla.

Esto no quiere decir que alguien que naufrague en una isla desierta no pueda seguir reglas (ya sean las reglas que aprendió cuando vivía en sociedad u otras nuevas que se invente, basándose en la experiencia aquellas). Pero lo importante es subrayar que este uso de reglas en la isla desierta es deudor del uso comunitario anterior (es decir, del uso que la persona aprendió cuando vivía en comunidad), y no sería posible sin aquel.

En última instancia, en definitiva, parece que las razones por las cuales el lenguaje es posible (esto es, las razones por las cuales los humanos conseguimos comunicarnos lingüísticamente, ya sea en matemáticas o en cualquier otro plano), tienen que ver con hechos muy generales acerca de la naturaleza humana. Estos “hechos generales”, que todavía son en gran medida una incógnita, posibilitan que cualquier ser humano mentalmente sano que haya estado sometido a los estímulos pertinentes en su infancia, acabe desarrollando la capacidad lingüística, y acabe respondiendo de un modo similar a como lo hace el resto de la comunidad. Las condiciones de posibilidad del lenguaje humano, que el escepticismo kripkeano trata de socavar, no residen en el terreno de la lógica, sino en un terreno *naturalista* o antropológico. Residen en nuestra naturaleza biológica, evolutiva, social y cultural.

El escepticismo kripkeano se resuelve, pues, bajando de las nubes del platonismo, una vez más. No hay regla sin una comunidad que la sustente y le dé vida. Y por consiguiente, el criterio de corrección es inmanente a esa comunidad, está en ella —está en su modo de comportarse, en su modo de desarrollarse, en su modo de ser. La regla no subsiste por sí misma en las alturas, en un limbo lógico respecto del cual quepa preguntarnos si la seguimos o no.

De hecho, cuando Kripke escribe su libro escéptico está participando de esa comunidad, está *haciendo comunidad* (comunidad académica, en este caso). Sus actos desmienten sus palabras (un verdadero escéptico respecto al lenguaje renunciaría a hablar, haría voto de silencio). Todos estos son *hechos*, y hechos elocuentes, pero no para “justificar” platónicamente que una aplicación de la regla sea correcta, sino para demostrar empíricamente que *hay reglas*, y que la gente se comunica de facto con ellas.

§ 5.9. Lectura de Wittgenstein (<u>Observaciones sobre los fundamentos de la matemática</u>). En 1956 se pulicó una selección de textos inéditos de Wittgenstein, bajo el título *Remarks on the Foundations of Mathematics* (*Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*). Apareció en una edición bilingüe, con el texto original alemán junto a su traducción al inglés. En 1978 se publicó una edición revisada y ampliada, que es en la que está basada la traducción española.

Entre los nuevos textos que se incluyeron en la edición de 1978 está la que aparece denominada como “Parte VI”, correspondiente a un manuscrito terminado en 1944, y que es a la que pertenece el fragmento que vamos a reproducir a continuación.

La división del texto en partes y secciones numeradas es debida a los editores de la obra. La separación entre distintas "observaciones" está tomada de los propios manuscritos de Wittgenstein, donde aparece representada dejando grandes espacios entre los párrafos. Así aparece también en las ediciones inglesa y española, aunque yo he preferido rellenar esa separación mediante asteriscos.

Las *definiciones ostensivas*, a las que se refiere Wittgenstein en un momento determinado, son aquellas en las que mostramos el significado de un término señalando al objeto denotado, o a un objeto que ejemplifique lo denotado. Por ejemplo, si estamos dando clase de inglés y señalamos una silla, o levantamos una silla en el aire, diciendo *"chair"*.

> "§ 39. Es verdad que *todo* se puede justificar de algún modo. Pero el fenómeno del lenguaje se funda en la regularidad, en la coincidencia en el obrar.
>
> * * * * *
>
> "Es aquí de la mayor importancia que todes o la inmensa mayoría de nosotres coincidamos en ciertas cosas. Puedo estar completamente seguro, por ejemplo, de que la mayoría de los seres humanos que vean este objeto llamarán 'verde' su color.
>
> * * * * *
>
> "Sería imaginable que seres humanos de tribus diferentes poseyeran lenguajes con el mismo vocabulario, pero diferentes significados de las palabras. La palabra que en una tribu significara verde, significaría lo mismo en el lenguaje de otra, mesa en el de una tercera, etc. Podríamos, incluso, imaginar que las tribus usaran las mismas oraciones, solo que con un sentido totalmente diferente.
>
> "Bueno, en ese caso no diría que hablaran el mismo lenguaje.
>
> * * * * *
>
> "Decimos que, para comunicarse, los seres humanos deben coincidir unos con otros en los significados de las palabras. Pero el criterio para esa coincidencia no es solo una coincidencia respecto a las definiciones, por ejemplo, respecto a las definiciones ostensivas, sino *también* una coincidencia en los juicios. Es esencial para que haya comunicación que coincidamos en un gran número de juicios.
>
> * * * * *
>
> ...
>
> "§ 41. La palabra 'coincidencia' y la palabra 'regla' están *emparentadas*, son primas hermanas. El fenómeno del coincidir y el del actuar de acuerdo a una regla tienen que ver uno con otro.
>
> * * * * *
>
> "Podría existir un cavernícola que produjera para sí mismo secuencias *regulares* de marcas. Podría entretenerse, por ejemplo, en dibujar en la pared de la cueva
>
> — · — — · — — · — — ·

o

— . — . . — . . . — . . . . —

Pero no está siguiendo la expresión general de una regla. Y cuando decimos que actúa de una manera regular no es porque podamos formar tal expresión.

* * * * *

. . .
"solo en la práctica de un lenguaje puede una palabra tener significado.

* * * * *

"Ciertamente, puedo darme a mí mismo una regla y seguirla después. Pero ¿no se trata de una regla solo porque es análoga a lo que en el trato humano significa 'regla'?

* * * * *

"Cuando un tordo siempre repite en su canto la misma frase varias veces, ¿decimos que posiblemente se da a sí mismo cada vez una regla, y después la sigue?

* * * * *

" § 42. Consideremos reglas muy simples. Sea la expresión de la regla una figura como ésta:

| — — |

y que uno sigue la regla dibujando una fila recta de figuras similares (quizá como ornamento):

| — — | | — — | | — — | | — — | | — — |

¿Bajo qué circunstancias deberíamos decir: alguien está siguiendo esta regla al dibujar tal secuencia? Es difícil describirlo.

* * * * *

"Si, de una pareja de chimpancés, uno trazara la figura | — — | mediante arañazos en el suelo, y el otro inmediatamente la serie

| — — | | — — | etc.

no por ello el primero habría establecido una regla, ni el otro la estaría siguiendo, sea lo que fuere lo que ocurriera en ese momento en la mente de ambos.

"Pero si se observara, por ejemplo, el fenómeno de un tipo de instrucción, en la que se muestra cómo hacerlo y después es imitado, en la que hay intentos erróneos e intentos exitosos, con recompensas y castigos, y cosas semejantes; si al final el sujeto de ese adiestramiento colocara figuras que no había visto nunca antes, como las del primer ejemplo, entonces probablemente diríamos que el primer chimpancé estaba escribiendo reglas, y el otro las estaba siguiendo.

* * * * *

> ” § 43. Pero ¿y si ya la primera vez uno de los chimpancés se hubiera *propuesto* repetir ese proceso? solo en una determinada técnica del obrar, hablar, pensar, puede alguien proponerse algo. (Este ‘puede’ es el gramatical.)
>
> Es posible inventar hoy un juego de cartas al que nunca se juegue. Pero ello no quiere decir: en la historia de la humanidad solo una vez se inventó un juego y nadie lo ha jugado. Esto no significa nada. No porque contradiga leyes psicológicas. Las expresiones ‘inventar un juego’, ‘jugar un juego’ solo tienen sentido en un contexto completamente determinado.
>
> Así, tampoco puede decirse que solo una vez en la historia de la humanidad se ha seguido una señal de carreteras. Pero sí: una única vez en la historia de la humanidad alguien ha caminado paralelo a un tablón. Y aquella primera imposibilidad no es, de nuevo, una imposibilidad psicológica.
>
> Las expresiones ‘lenguaje’, ‘proposición’, ‘orden’, ‘regla’, ‘operación de cálculo’, ‘experimento’, ‘seguir una regla’ remiten a una técnica, a una costumbre.”
>
> (Wittgenstein, *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, Parte VI, pp. 288–295, con ligeros retoques al texto y traducción.)

§ 5.10. Lectura de Wittgenstein (Investigaciones filosóficas). Las *Investigaciones filosóficas* de Wittgenstein aparecieron publicadas por primera vez en 1953, en una edición bilingüe, con el texto original alemán junto a su traducción al inglés. Wittgenstein había muerto dos años antes.

Los fragmentos que vamos a reproducir a continuación pertenecen a la primera parte del libro, preparada para su publicación por el propio Wittgenstein, que llegó a escribir para la misma un Prólogo, conservado en la edición española. Sin embargo, en 1946, poco antes de aparecer impresa, Wittgenstein decidió retirarla. En la publicación póstuma los editores añadieron después una segunda parte, reuniendo algunos manuscritos adicionales de Wittgenstein sobre la misma temática, escritos con posterioridad a ese año.

> “ § 143. Examinemos ahora este tipo de juego de lenguaje: B debe poner por escrito, siguiendo la orden de A, series de signos de acuerdo con una determinada ley de formación.
>
> ”La primera de estas series debe ser la de los números naturales en el sistema decimal.—¿Cómo se aprende a entender este sistema?—En primer lugar se le escriben series de números a modo de muestra y se le exhorta a copiarlas. (No te choque la expresión ‘series de números’; ¡no se la emplea aquí incorrectamente!) Y ya hay aquí una reacción normal y una anormal por parte del aprendiz.—Tal vez guiemos su mano primero al copiar la serie del 0 al 9; pero luego la *posibilidad de comprensión* dependerá de que continúe escribiendo independientemente.—Y aquí podemos imaginarnos, por ejemplo, que copia ciertamente las cifras de modo independiente, pero no la serie, sino unas veces una y otras veces otra sin regla alguna. Y entonces *ahí* acaba la comprensión.—O también que él haga *‘faltas’* en el orden de la serie. La diferencia entre éste y el primer caso es naturalmente de frecuencia.—O: él hace una falta *sistemática*, copia siempre, por ejemplo, solo un número de

cada dos; o copia la serie 0, 2, 3, 4, 5, ... así: 1, 0, 3, 2, 5, 4, ... Aquí casi estaremos tentados a decir que nos ha entendido *incorrectamente*.

"Pero obsérvese: no hay límite nítido entre una falta carente de regla y una sistemática. Es decir: entre lo que estás inclinado a llamar una 'falta carente de regla' y una 'sistemática'."
(Wittgenstein, *Investigaciones filosóficas*, Parte I, p. 145.)

"§ 185. Volvamos ahora a nuestro ejemplo (§ 143). El alumno domina ahora —juzgado por los criterios ordinarios— la serie de los números naturales (...)—Supongamos que hemos hecho nuestros ejercicios y pruebas al azar de su comprensión en el terreno numérico hasta 1.000.

"Hacemos ahora que el alumno continúe una serie (pongamos '+2') por encima de 1.000 —y él escribe: 1.000, 1.004, 1.008, 1.012.

"Le decimos: '¡Mira lo que has hecho!'—Él no nos entiende. Decimos: 'Debías sumar *dos*; ¡mira cómo has empezado la serie!'.—El responde: '¡Sí! ¿No es correcta? Pensé que *debía* hacerlo así.'—O supón que dijese, señalando la serie: '¡Pero si he proseguido del mismo modo!'—De nada nos serviría decir '¿pero es que no ves (...)?'—y repetirle las viejas explicaciones y ejemplos.—Pudiéramos decir quizá en tal caso: esta persona entiende por naturaleza esa orden, con nuestras explicaciones, como *nosotres* entenderíamos la orden: 'Suma siempre 2 hasta 1.000, 4 hasta 2.000, 6 hasta 3.000, etc.'.

"Este caso sería semejante al de una persona que por naturaleza reaccionase a un gesto demostrativo de la mano mirando en la dirección que va de la punta del dedo a la muñeca en vez de en dirección a la punta del dedo.

(...)

" § 195. 'Pero no quiero decir que lo que hago ahora (al captar un sentido) determine *causal* y empíricamente el empleo futuro, sino que, de una *extraña* manera, este mismo empleo está, en algún sentido, presente.'—¡Pero lo está 'en algún sentido'!

(...)

" § 198. '¿Pero cómo puede una regla enseñarme lo que tengo que hacer en *este* lugar? Cualquier cosa que haga es, según alguna interpretación, compatible con la regla.'—No, no es eso lo que debe decirse. Sino esto: toda interpretación pende, juntamente con lo interpretado, en el aire; no puede servirle de apoyo. Las interpretaciones solas no determinan el significado.

(...)

" § 199. ¿Es lo que llamamos 'seguir una regla' algo que pudiera hacer solo *una* persona sola *una vez* en la vida?—Y ésta es naturalmente una anotación sobre la *gramática* de la expresión 'seguir una regla'.

"No puede haber solo una única vez en que una persona siga una regla. No puede haber solo una única vez en que se haga un informe, se dé una orden, o se la entienda, etc.—Seguir una regla, hacer un informe, dar una orden, jugar una partida de ajedrez son *costumbres* (usos, instituciones).

"Entender una oración significa entender un lenguaje. Entender un lenguaje significa dominar una técnica.

(...)

"§ 201. Nuestra paradoja era ésta: una regla no podía determinar ningún curso de acción porque todo curso de acción puede hacerse concordar con la regla. La respuesta era: si todo puede hacerse concordar con la regla, entonces también puede hacerse discordar. De donde no habría ni concordancia ni desacuerdo.

"Que ahí hay un malentendido se muestra ya en que en este curso de pensamientos damos interpretación tras interpretación; como si cada una nos contentase al menos por un momento, hasta que pensamos en una interpretación que está aún detrás de ella. Con ello mostramos que hay una captación de una regla que *no* es una *interpretación*, sino que se manifiesta, de caso en caso de aplicación, en lo que llamamos 'seguir la regla' y en lo que llamamos 'contravenirla'.

"De ahí que exista una inclinación a decir: toda acción de acuerdo con la regla es una interpretación. Pero solamente debe llamarse 'interpretación' a esto: sustituir una expresión de la regla por otra.

"§ 202. Por tanto 'seguir la regla' es una práctica. Y *creer* seguir la regla no es seguir la regla. Y por tanto no se puede seguir 'privadamente' la regla, porque de lo contrario creer seguir la regla sería lo mismo que seguir la regla." (Wittgenstein, *Investigaciones filosóficas*, Parte I, pp. 187–203.)

MÓDULO 6

El empirismo y otras corrientes recientes en filosofía de la matemática

La tesis de indispensabilidad

§ 6.1. Presentación del empirismo en filosofía de la matemática. Un punto de vista empirista con respecto a una teoría matemática es el que considera que esa teoría es una teoría empírica más, a la par que el resto de teorías de las ciencias naturales y sociales; y que, por consiguiente, su validez (su corrección, acierto o desacierto) dependerá en última instancia de cómo sea la realidad que nos rodea. Tal forma de concebir las matemáticas entronca con el empirisimo en sentido genérico, que es la concepción filosófica según la cual la fuente primordial de nuestros conceptos y de nuestro conocimiento radica en nuestra experiencia sensible.

Es obvio que esta perspectiva sobre las matemáticas no coincide con la imagen que estas proyectan *prima facie* de sí mismas, esto es, con la imagen que nos transmiten a primera vista. En efecto, las teorías matemáticas parecen referirse a entidades abstractas, no localizables en la realidad física, y a hechos que no parecen ubicados en el universo tangible en el que vivimos.

Asimismo, el proceder habitual de las personas que investigan en matemáticas consiste en establecer sus resultados (los llamados “teoremas”) mediante razonamientos categóricos (llamados a su vez “pruebas”, o “demostraciones”). Estos últimos parecen completamente concluyentes, inamovibles por su propia naturaleza. De hecho, cuando asistimos a una lección de matemáticas bien estructurada sobre cualquier parcela asentada de esta ciencia, solemos sacar la impresión de que se trata de conocimientos perfectos, que probablemente se poseen desde hace mucho tiempo, y que seguirán ahí eternamente, sin que se les pueda rectificar una coma.

Pues bien, el primer objetivo de la filosofía empirista de la matemática consiste precisamente en desmontar esta imagen inicial; es decir, en mostrar en qué radica el error de esta concepción tan extendida, y por qué debemos inclinarnos (a pesar de las apariencias) en favor de la naturaleza empírica de las matemáticas. Para conseguir este objetivo hace falta una teoría que nos explique de qué modo se encuentra relacionada la matemática con el mundo que nos rodea, y a qué se debe que produzca esa impresión inicial de abstracción e infalibilidad, que el resto de las ciencias no proyectan.

A partir de estas premisas fundamentales, y dependiendo de cómo se articulen luego los detalles, el empirismo en filosofía de la matemática puede tomar un cariz u otro. De hecho, bajo el paraguas de esta concepción hay todo un abanico de doctrinas distintas, de las cuales veremos aquí algunos ejemplos representativos.

Nuestra exposición arranca a partir de la segunda mitad del siglo XX, que es cuando empezaron a surgir las propuestas que más protagonismo tienen actualmente dentro de esta concepción. Un precedente notable lo tenemos en John Stuart Mill, que en su *System of Logic* defendió que toda la matemática, incluyendo la aritmética, tenía un carácter inductivo y estaba basada en la experiencia (Libro 2, Cap. 6, §1). Dicha obra fue publicada en 1843, poco después del descubrimiento de la geometría hiperbólica, pero sin que Mill la tuviera en cuenta, ni por entonces la conociera.

§ 6.2. La tesis de indispensabilidad o tesis de Quine-Putnam. En la actualidad, el principal argumento en favor de la filosofía empirista de la matemática es la llamada *"tesis de indispensabilidad"* o *"tesis (o "argumento") de Quine-Putnam"*. Esta tesis debe su nombre a Willard Quine y Hilary Putnam, dos de los más importantes lógicos y filósofos estadounidenses del siglo XX.

La tesis de indispensabilidad afirma sencillamente que todo aquel conocimiento matemático que resulta indispensable para las distintas ciencias debe verse como integrado en ellas, formando una unidad; y que, por consiguiente, nuestra creencia en la verdad de esas otras ciencias implica nuestra creencia en la verdad de las matemáticas que incorporan. Si, como dijo Galileo, "la naturaleza está escrita en lenguaje matemático" (1623, *El Ensayador*, §6), entonces las matemáticas deben verse como una parte indisoluble de nuestro conocimiento del mundo natural.

Ello afecta, en particular, a la existencia de los objetos postulados por las distintas teorías matemáticas, como números, funciones, conjuntos, puntos, rectas y demás. Según esto, todos ellos estarían presentes de alguna manera en la realidad que nos rodea, en cuanto que nosotres describimos esa realidad mediante teorías científicas de las que esos objetos forman parte. Vistos bajo este prisma, los objetos matemáticos forman parte de nuestra ontología científica global.

Es notorio que para describir los bosques, por ejemplo, acuñamos el concepto de *árbol*, y admitimos la existencia separada de los árboles (con sus troncos, raíces y hojas) como entidades distintas del terreno en el que están enclavados. Pues bien, la tesis de Quine-Putnam nos invita a admitir también la existencia de aquellos números, conjuntos y funciones matemáticas que utilizamos para describir las propiedades de los árboles, así como las propiedades de todos los objetos que se estudian en las distintas ciencias en general.

Ello no implica que atribuyamos a cada número, o a cada función matemática, una localización espacio-temporal como la que atribuimos a un nogal o a un alcornoque. La idea es más bien que las entidades matemáticas pertenecen al mismo plano que el resto de entidades teóricas postuladas por las distintas ciencias, como las *fuerzas* de la física, los *síndromes* en medicina o la *inflación* económica:

> "El discurso científico en su interpretación habitual está tan irremediablemente comprometido con objetos abstractos —con naciones, especies, números, funciones, conjuntos— como lo está con manzanas y otros cuerpos. Todas estas cosas figuran como valores de las variables en nuestro sistema global del mundo. Los números y las funciones contribuyen a la teoría física tan genuinamente como lo hacen las partículas hipotéticas."
> (Quine, "Aciertos y límites de la matematización", *Teorías y cosas*, pp. 182–183, con traducción distinta a la aquí ofrecida.)

> "La cuantificación sobre entidades matemáticas es indispensable para la ciencia, tanto la ciencia física como la ciencia formal; por consiguiente, debemos aceptar tal cuantificación; pero ello nos compromete a aceptar la existencia de las entidades matemáticas en cuestión. Este tipo de argumento proviene, por supuesto, de Quine, quien durante años ha insistido en la indispensabilidad de la cuantificación sobre entidades matemáticas, así como en la deshonestidad intelectual de negar la existencia de aquello que presuponemos a diario."
> (Putnam, *Philosophy of Logic*, Cap. 8, p. 57.)

En efecto, en las distintas ciencias es habitual utilizar cuantificaciones sobre entidades matemáticas, es decir, afirmaciones de existencia o generalidad sobre estas entidades. Así por ejemplo, cuando decimos "existe un número de planetas en el Sistema Solar", "hay una función que describe la trayectoria de un cuerpo en movimiento que cae a la Tierra", o "todo cuerpo tiene un punto geométrico que es su centro de masa". Pues bien, según esta perspectiva, nuestro compromiso con las distintas ciencias nos obliga a comprometernos con la existencia de las entidades matemáticas que se utilizan en ellas. Las entidades matemáticas y las entidades teóricas de las distintas ciencias habrían de verse como estando en un mismo plano, y la diferencia entre unas y otras estaría simplemente en su grado de abstracción o generalidad.

§ 6.3. La tesis de Quine-Putnam y la tesis de Duhem-Quine. El argumento de Quine-Putnam tiene a la base una visión unitaria de la ciencia en su conjunto. En efecto, este argumento considera el conjunto del conocimiento humano como un todo indisoluble, incluyendo las matemáticas (y hasta la lógica, como enseguida veremos). Se trata pues de una imagen *holística* del conjunto de nuestro conocimiento.

Al fin y al cabo, nuestro conocimiento tiene como misión dar cuenta de nuestra experiencia, esto es, explicar nuestras experiencias pasadas y predecir las futuras. En el cumplimiento de esa misión elaboramos nuestras teorías científicas, y a partir de ellas generamos expectativas sobre lo que va a pasar (es decir, predicciones sobre los acontecimientos futuros). Unas veces se cumplen estas expectativas y otras no. Cuando sucede esto último, es decir, cuando la experiencia nos sorprende y desmiente las expectativas que nos habíamos hecho sobre la base de nuestro corpus científico, entonces nos vemos en la obligación de modificar este corpus, rectificando las teorías con las que contábamos hasta ese momento.

Todas las teorías científicas están, según esto, validadas en última instancia por la experiencia, y son susceptibles de corrección y rectificación sobre la base de la experiencia. Pues bien, lo que propone el argumento de Quine-Putnam es incluir a la matemática y a la lógica entre las teorías revisables a la luz de la experiencia. Ahora bien, como señalan estos autores, tales teorías serían las últimas candidatas a ser revisadas a la luz de experiencias adversas, puesto que, al tener el mayor grado de abstracción o generalidad, su revisión tendría un impacto mayor sobre el resto del sistema.

Según todo esto, en definitiva, el conjunto de nuestro conocimiento se parece a una esfera, que alberga en su interior las teorías más generales (las que tienen consecuencias sobre otras muchas teorías), y en cuya periferia se encuentran las teorías y creencias más particulares (es decir, las que están más directamente conectadas con la experiencia inmediata). De este modo, cuando una experiencia adversa nos obliga a cambiar nuestras creencias, lo hacemos preferentemente modificando teorías o creencias superficiales, a fin de minimizar el coste de dicha revisión. Y solo en casos excepcionales (cuando no nos queda más remedio, por así decirlo) nos decidimos a cambiar una de las teorías matrices del interior, como pueda ser una gran teoría física, una teoría matemática o incluso una teoría lógica. Estos últimos cambios tendrán grandes efectos sobre el conjunto de sistema (un cambio en la lógica, por ejemplo, afectará a las relaciones de consecuencia entre todos los enunciados del conjunto).

Así pues, las creencias que están más hacia el centro del sistema representan un mayor grado de generalidad, y un mayor grado de abstracción, y su reemplazo se reserva para aquellas ocasiones en que es absolutamente necesario. Ni qué decir tiene que, desde esta perspectiva, se rechaza de plano la tradicional distinción entre *matemática pura* (esto es, la matemática estudiada por sí misma, al margen de sus posibles aplicaciones) y *matemática aplicada* (esto es, la matemática estudiada en su aplicación a las distintas ciencias: *matemática para la física*, *matemática para la biología*, etc; cf. Quine, *Teorías y cosas*, pp. 181–182). Como también se sigue de esto que ningún experimento es "crucial" a la hora de verificar una determinada teoría.

En efecto, ante cualquier resultado que nos proporcione la experiencia, tanto si es conforme con nuestras predicciones como si es contrario a las mismas, siempre tenemos distintas alternativas a la hora de interpretar lo que ha pasado. Y cuando resulta necesario realizar ajustes en nuestro sistema de creencias para acomodar un resultado adverso, siempre tendremos distintas opciones a nuestro alcance (es decir, distintos ajustes alternativos que conseguirían acomodar el resultado en cuestión).

En 1906, el físico y filósofo francés Pierre Duhem defendió esto en relación a la física (cf. *La teoría física: su objeto y su estructura*, pp. 247–250, 285–288). Décadas después, Quine expuso un argumento de cuño propio que venía a recuperar la tesis de Duhem, pero ampliando el posible efecto de la revisión para incluir también a las matemáticas y a la física en el saco de las teorías revisables. Dicho argumento apareció en el clásico artículo de Quine "Dos dogmas del empirismo", de 1951, y se ha popularizado desde entonces como la *"tesis de Duhem-Quine"*.

Relativa a esta última tesis es la noción quineana de *subdeterminación* (o *infradeterminación*) de las teorías científicas por la experiencia: nuestra experiencia determina parcialmente las teorías científicas que manejamos, en cuanto que nos obliga a cambiar *algo* en ese sistema cuando el sistema resulta incompatible con nuestras experiencias. Pero se trata solo una determinación parcial, en cuanto a que siempre hay diferentes alternativas para efectuar ese reajuste, y somos nosotres los que tenemos que elegir cual es el más adecuado, atendiendo a criterios de economía, simplicidad, plausibilidad, etc.

§ 6.4. Defensa y crítica de la tesis de indispensabilidad. Además del artículo de Quine "Dos dogmas del empirismo" (incluido en su libro *Desde un punto de vista lógico*), otras contribuciones señaladas en las que este autor expone una filosofía empirista de la matemática son el Capítulo 7 de su libro de 1970 *Filosofía de la lógica* (pp. 163–173) y el Capítulo 18 de su libro de 1981 *Teorías y cosas* (pp. 181–188), todos ellos traducidos al castellano.

De Putnam, por su parte, recomendaremos su librito de 1971, *Philosophy of logic* (íntegramente incluido en la 2ª ed. del vol. 1 de sus *Philosophical Papers: Mathematics, Matter and Method*, pp. 323–357), así como su artículo de 2012 "Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics" (incluido en su compilación *Philosophy in an Age of Science: Physics, Mathematics and Skepticism*, pp. 181–201), ninguno de los dos traducidos a nuestra lengua.

Por otra parte, la tesis de indispensabilidad también ha tenido y tiene detractores. Para empezar, choca con nuestra percepción habitual de los enunciados matemáticos, que es un problema para toda la concepción empirista de la matemática, como ya señalamos en su momento. Así por ejemplo, un típico hecho matemático como la propiedad conmutativa de la multiplicación ("el orden de los factores no altera el producto"), se percibe generalmente como una verdad obvia y universal. No se parece en nada a una *hipótesis* que hubiera que contrastar experimentalmente en la naturaleza a fin de comprobar si es verdadera o falsa. No se parece en nada, por ejemplo, a la ley de la gravitación universal.

Siguiendo esta línea de argumentación, Charles Parsons ha criticado que el empirismo de Quine deje sin explicar por qué la matemática elemental nos parece *obvia* ("Mathematical Intuition", 1980, p. 101 de su reimpresión en la compilación de Hart, *Philosophy of Mathematics*). Y en términos similares se ha expresado Philip Kitcher: "Quine insiste en que los enunciados matemáticos (...) son vulnerables a la falsación empírica, pero no nos explica cómo hemos llegado a conocer las partes de la matemática que de hecho conocemos" (*The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 4).

Penelope Maddy ha objetado, por su parte, que "las vicisitudes de la matemática aplicada no parecen afectar a la metodología de la matemática del modo como lo harían si las aplicaciones fueran realmente las árbitras de la ontología matemática" (*Naturalism in Mathematics*, p. 159, traducción tomada del fragmento citado en Caba, "Algunas consideraciones sobre el argumento de indispensabilidad", *Revista de filosofía* 27(1), 2002, p. 116).

Un estudio, en fin, dedicado por extenso a la tesis de indispensabilidad y a sus detractores es el publicado por Mark Colyvan en 2001, bajo el título *"The indispensability of mathematics"*. Y en español cabe destacar el artículo del profesor Antonio Caba que acabamos de mencionar.

§ 6.5. Lectura de Quine ("Dos dogmas del empirismo"). Reproducimos a continuación unos extractos del final del artículo de Quine "Dos dogmas del empirismo", todo un clásico de la filosofía del siglo XX, conocido por su incisivo rechazo a la distinción entre enunciados analíticos y enunciados sintéticos, así como por la formulación de la tesis de Duhem-Quine a la que nos acabamos de referir, entre otras cosas.

Las "clases" de las que aquí habla Quine son esencialmente nuestros *conjuntos*. Los "números racionales" son los números fraccionarios, de los que hablamos brevemente en su momento (cf. p. 26). También entonces mencionamos a los irracionales. Y cuando Quine dice que el álgebra de los números racionales e irracionales está subdeterminada por la de los racionales, es porque constituye una extensión suya, y como tal extensión podría, en principio, ser formulada de diferentes maneras.

> "La totalidad de lo que llamamos nuestro conocimiento, o creencias, desde las más casuales cuestiones de la geografía y la historia hasta las más profundas leyes de la física atómica o incluso de la matemática o de la lógica puras, es una trama tejida por el ser humano y que no está en contacto con la experiencia más que a lo largo de sus lados. O, con otro símil, el todo de la ciencia es como un campo de fuerza cuyas condiciones-límite da la experiencia. Un conflicto con la experiencia en la periferia da lugar a reajustes en el interior del campo: hay que redistribuir los valores veritativos entre algunos de nuestros enunciados. La nueva atribución de valores a algunos enunciados implica la re-valorización de otros en razón de sus interconexiones lógicas —y las leyes lógicas, a su vez, son tan solo unos determinados enunciados del sistema, determinados elementos del campo. Una vez redistribuidos valores entre algunos enunciados, hay que redistribuir también los de otros, que pueden ser enunciados lógicamente conectados con los primeros o incluso enunciados de conexiones lógicas. Pues el campo total está tan escasamente determinado por sus condiciones-límite —por la experiencia— que hay mucho margen de elección en cuanto a los enunciados que deben recibir valores nuevos a la luz de cada experiencia contraria al anterior estado del sistema. Ninguna experiencia concreta y particular está ligada directamente con un enunciado concreto y particular en el interior del campo, sino que esos ligámenes son indirectos, se establecen a través de consideraciones de equilibrio que afectan al campo como un todo.
>
> (...)
>
> "En nuestra metáfora, los enunciados que son especialmente relevantes para experiencias determinadas se describen como próximos a la periferia. Pero en esa relación de 'relevancia' no veo más que una laxa asociación que refleja la relativa probabilidad de que en la práctica escojamos un enunciado en vez de otro para someterlo a revisión, en caso de presentarse una experiencia negativa. Podemos, por ejemplo, imaginar algunas experiencias negativas tales que para acomodarlas a nuestro sistema nos inclinaríamos a cambiar el valor de verdad de un enunciado como el de que hay casas de adobe en Elm Street, junto con otros asociados y relativos a ese mismo tema. Podemos imaginar otras experiencias críticas tales que para acomodarlas a nuestro sistema nos inclinaríamos a dar un nuevo valor al enunciado de que no hay centauros y a otros emparentados con él. Según he dicho, una experiencia imprevista puede acomodarse en el sistema mediante una de varias nuevas valoraciones posibles

en otros tantos sectores del sistema; pero en los casos que hemos imaginado, nuestra natural tendencia a perturbar lo menos posible el sistema en su conjunto nos lleva a centrar la revisión en esos enunciados específicos, relativos a casas de adobe o a centauros. Por eso se tiene la sensación de que tales enunciados tienen una referencia empírica más precisa que los muy teoréticos enunciados de la física, de la lógica o de la ontología. Puede considerarse que estos últimos están situados en una zona relativamente central de la red, lo que significa meramente que presentan poca conexión preferencial con algún dato sensible o determinado.

"Como empirista, sigo concibiendo el esquema conceptual de la ciencia como un instrumento destinado en última instancia a predecir experiencia futura a la luz de la experiencia pasada. Introducimos conceptualmente los objetos físicos, con razón, porque son intermediarios convenientes; pero no por definición en términos de experiencia, sino puestos con un estatuto epistemológico comparable al de los dioses de Homero. Yo, por mi parte, como físico lego que soy, creo en los objetos físicos y no creo en los dioses de Homero, y considero un error científico orientar su creencia de otro modo. Pero en cuanto a fundamento epistemológico, los objetos físicos y los dioses difieren solo en grado, no en esencia. Ambas suertes de entidades integran nuestras concepciones solo como elementos de cultura. El mito de los objetos físicos es epistemológicamente superior a muchos otros mitos solo porque ha probado ser más eficaz que ellos como procedimiento para elaborar una estructura manejable en el flujo de la experiencia.

"Esa actitud que pone objetos físicos no se reduce al nivel macroscópico. También al nivel atómico se ponen objetos para que las leyes de los objetos macroscópicos —y, en última instancia, las leyes de la experiencia— sean más simples y manejables; y no debemos esperar ni pedir una plena definición de las entidades atómicas y subatómicas en términos de entidades macroscópicas, ni tampoco una definición de las cosas macroscópicas en términos de datos sensibles. La ciencia es una prolongación del sentido común, y prolonga el recurso del sentido común que consiste en hinchar la ontología para simplificar la teoría.

"Los objetos físicos, los grandes y los pequeños, no son las únicas entidades puestas. Otro ejemplo son las fuerzas; y efectivamente, hoy nos dicen que la separación entre materia y energía está anticuada. Las abstractas entidades que son la sustancia de las matemáticas —en última instancia, clases y clases de clases y así sucesivamente— son también entidades puestas en el mismo sentido. Epistemológicamente, todos esos son mitos con la misma base que los objetos físicos y los dioses, y por lo único que unos son mejores que otros es por el grado en que favorecen nuestro manejo de la experiencia sensible.

"La extensa álgebra de los números racionales e irracionales está subdeterminada por el álgebra de los números racionales, pero es más cómoda y conveniente que ella, y la incluye como parte coja o manca. La ciencia total —matemática, natural y humana— está análogamente subdeterminada por la experiencia, de un modo aún más extremo. El contorno del sistema tiene

que cuadrar con la experiencia; el resto, con todos sus elaborados mitos y sus ficciones, tiene como objetivo la simplicidad de las leyes."
(Quine, "Dos dogmas del empirismo", *Desde un punto de vista lógico*, pp. 76–80, con traducción en parte distinta a la aquí ofrecida y ligeros retoques al texto.)

El cuasi-empirismo metodológico

§ 6.6. El cuasi-empirismo metodológico en matemáticas. La filosofía de la matemática maneja con frecuencia una imagen idealizada de las teorías matemáticas, como si fueran productos perfectamente delimitados, en cuyo seno la investigación consiste en ir demostrando nuevos teoremas (es decir, añadiendo "resultados probados"), uno tras otro. Pues bien, el *"cuasi-empirismo metodológico"* es una línea de investigación que surge como reacción a esta imagen distorsionada.

El cuasi-empirismo metodológico resalta todos aquellos aspectos de la praxis cotidiana de la investigación matemática que muestran lo cercana que se encuentra esta praxis del resto de ciencias naturales y sociales (esto es, de las llamadas "ciencias empíricas"). Hay que hacer notar, por tanto, la gran diferencia que separa esta posición de la otra forma de empirismo en filosofía de la matemática que acabamos de comentar. En efecto, mientras que la tesis de indispensabilidad se sustenta sobre una cuestión de principios (relativa al fundamento epistemológico de la verdad matemática), la corriente cuasi-empirista centra la atención en una cuestión práctica, la metodología del hacer matemático de hecho.

En 1985 se publicó una colección de ensayos, *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, dedicada a promover esta línea de investigación y a combatir el tipo de enfoque "fundacionalista" que había venido siendo predominante hasta entonces. Como dice en la Introducción a esta obra su compilador, el profesor Thomas Tymoczko:

> "La filosofía de la matemática puede empezar de nuevo, volviendo a examinar las prácticas reales de las personas que trabajan e investigan en matemáticas. Si contemplamos las matemáticas sin prejuicios, encontraremos relevantes muchos aspectos que fueron ignorados por las escuelas fundacionales: demostraciones informales, desarrollos históricos, la posibilidad del error matemático, las explicaciones matemáticas (por oposición a las demostraciones), la comunicación entre matemátiques, el uso de ordenadores en la matemática moderna y mucho más.
>
> (...) Es útil disponer de una etiqueta para esta aproximación a la filosofía de la matemática. Siguiendo a Lakatos y a Putnam, yo la llamo 'cuasi-empirismo'."
>
> (Tymoczko, *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, p. xiv, con traducción propia y ligeros retoques al texto.)

Hilary Putnam, en efecto, también ha abogado en favor de este tipo de enfoque, en artículos como “What is mathematical truth?”, de 1975 (incluido en sus *Philosophical Papers*, vol. 1, pp. 60–78, así como en esa misma compilación de Tymoczko, pp. 49–65), o en “Philosophy of mathematics: a report”, de 1979 (incluido en otra recopilación de artículos de Putnam, *Words and Life*, bajo el título “Philosophy of mathematics: why nothing works”, pp. 499–512).

Pero sin duda, la principal defensa del cuasi-empirismo metodológico es la que cabe encontrar en la obra del filósofo de la ciencia húngaro Imre Lakatos, a través de algunos artículos suyos de gran resonancia publicados en vida en los años 60 y 70 del siglo XX, y otros que aparecieron póstumamente (tras su prematura muerte en 1974, cuando contaba cincuenta y un años de edad).

§ 6.7. La filosofía de la ciencia falsacionista aplicada a las matemáticas. La concepción de Lakatos estuvo fuertemente influenciada por la filosofía de la ciencia de Karl Popper, a quien sucedió al frente del Departamento de Filosofía de la *London School of Economics*. Popper fue el autor de una de las principales propuestas en filosofía de la ciencia del siglo XX, el *falsacionismo* (presentado en su libro *La lógica de la investigación científica*, de 1934, y desarrollado posteriormente en *Conjeturas y refutaciones*, de 1963, y en otras obras).

Según la propuesta de Popper, muy resumidamente, la característica definitoria de las teorías científicas es la *falsabilidad*, esto es, la posibilidad de refutarlas mediante la experiencia. Y de hecho, la buena ciencia debe centrar sus esfuerzos en buscar falsaciones (refutaciones) a las teorías que se manejan, obligándose así, llegado el caso, a reemplazarlas por otras mejores (*La lógica de la investigación científica*, pp. 40–41).

Pues bien: la filosofía de la matemática de Lakatos es un intento de aplicar el falsacionismo popperiano, hasta donde fuera posible, a la metodología de las matemáticas (cf. *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*, cuyo solo título es ya una evocación popperiana, pp. 14, 18; o *Matemáticas, ciencia y epistemología*, p. 66). Además, Lakatos se apoya asimismo en el trabajo del eminente matemático George Pólya (también húngaro), que investigó concienzudamente la heurística del descubrimiento matemático en obras como *Matemáticas y razonamiento plausible*, de 1954.

Pero Lakatos llevó su concepción filosófica bastante más allá de las propuestas de Popper y Pólya, en las que se inspiró. Así por ejemplo, Lakatos sostuvo que en matemáticas, y en general en todas las ciencias, el proceso creador (o descubridor) de teorías, y el proceso de justificación de las mismas, están indisolublemente ligados, y solo se pueden representar de forma adecuada como un todo unitario. Lakatos se oponía así a la distinción entre el *contexto de descubrimiento* y el *contexto de justificación* de las teorías científicas, distinción formulada por Hans Reichenbach (y que cabe encontrar, en diferentes formas, en Popper y Pólya; cf. Reichenbach, *Experience and Prediction*, 1938, Cap. 1, §1; Pólya, *Matemática y razonamiento plausible*, 1954, Prólogo; Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, 1976, Apéndice 2, §1, nota 263).

§ 6.8. El estilo euclídeo y la matemática cuasi-empírica. Sobre estas bases, Lakatos reivindica el estudio de la historia de las matemáticas como fuente substancial para investigar sobre su metodología. Ello le lleva a rechazar el modelo idealizado de teoría matemática (que él llama "deductivista", o "euclídeo"), según el cual las teorías se presentan como productos perfectamente acabados, compuestos por definiciones, axiomas, teoremas y pruebas, en un orden aparentemente inmutable:

> "En el estilo deductivista, todas las proposiciones son verdaderas y todas las inferencias son válidas. Las matemáticas se presentan como un conjunto siempre creciente de verdades eternas e inmutables, en el que no pueden entrar los contraejemplos, las refutaciones o la crítica (. . .) El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. Toda la historia se desvanece, las sucesivas formulaciones tentativas del teorema a lo largo del procedimiento probatorio se condenan al olvido, mientras que el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada."
> (Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, p. 166.)

A este estilo contrapone Lakatos su *enfoque heurístico*, o *matemática cuasi-empírica*, que constituye, según él, una representación mucho más ajustada y fidedigna de la matemática en su desarrollo real:

> "Las matemáticas informales y cuasi-empíricas no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino que lo hacen mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones."
> (Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, p. 20.)

§ 6.9. Falsadores potenciales en matemáticas. Lakatos se declara abiertamente falibilista, no solo para la ciencia natural, sino también en matemáticas y en lógica (*Matemáticas, ciencia y epistemología*, p. 173). Ello plantea la cuestión de cuáles sean los *falsadores potenciales* en matemáticas:

> "Si la matemática y la ciencia son ambas cuasi-empíricas, entonces la diferencia crucial entre ellas, si es que existe alguna, ha de encontrarse en la naturaleza de sus "enunciados básicos", o "falsadores potenciales". La "naturaleza" de una teoría cuasi-empírica viene determinada por la naturaleza de las inyecciones de valores de verdad en sus falsadores potenciales. Ahora bien, nadie estará dispuesto a sostener que la matemática es empírica en el sentido de que sus falsadores potenciales son enunciados espacio-temporales singulares. Pero entonces, ¿cuál es la naturaleza de la matemática?, ¿cuál es la naturaleza de los falsadores potenciales de las teorías matemáticas?"
> (Lakatos, *Matemáticas, ciencia y epistemología*, p. 57.)

Lakatos identifica esos falsadores con todos los devaneos que puede llegar a sufrir una teoría matemática a lo largo de su historia, en sus sucesivas formulaciones y reformulaciones.

Uno de los ejemplos estudiados por Lakatos a este respecto fue la historia del cálculo infinitesimal, y cómo ciertas entidades matemáticas (los infinitésimos) fueron utilizadas durante un tiempo, después criticadas y abandonadas, y más tarde recuperadas bajo un nuevo formato, y vueltas a elevar a la dignidad de objeto respetable (cf. su artículo "Cauchy y el continuo: la importancia del análisis no estándar para la historia y la filosofía de la matemática", en *Matemáticas, ciencia y epistemología*, pp. 67–90). Nosotres nos referimos brevemente a esto en el presente manual, en § 1.31.

Los infinitésimos nos proporcionan, pues, un ejemplo de que en la historia de las matemáticas también se ha vivido la desaparición de términos teóricos, y a veces su reaparición posterior, en bucles de ensayo y error que acercan la matemática al resto de las ciencias naturales.

§ 6.10. Reconstrucciones racionales y la metodología de los programas de investigación científica. Por otra parte, el cuasi-empirismo metodológico lakatosiano destila una profunda confianza en la *racionalidad* de la investigación científica, y en particular de la matemática. Precisamente, uno de los conceptos clave de su propuesta es el de las *reconstrucciones racionales* de la historia de la ciencia, sacando a la luz todo el engranaje teórico y metodológico que permita interpretar el verdadero desarrollo histórico de los hechos, y cómo se gestaron los nuevos conocimientos en cada episodio de interés.

En esta línea, Lakatos propuso también una *Metodología de los programas de investigación científica*, orientada al conjunto de la ciencia (no específicamente a la matemática), y por la que este autor es más conocido, de hecho, que por su filosofía de la matemática (cf. sus *Escritos filosóficos*, Volumen 1). Con su metodología de los programas de investigación, Lakatos pretendía reafirmar la racionalidad de la ciencia ante la provocadora imagen transmitida por Thomas Kuhn en su *Estructura de las revoluciones científicas*, de 1962.

La contribución de Lakatos a la filosofía de la matemática puede consultarse en sus libros ya citados: *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático* (publicado en 1976, y escrito en su mayor parte en forma de diálogo), y *Matemáticas, ciencia y epistemología* (que constituye el Volumen 2 de sus *Escritos filosóficos*, y que apareció junto con el Volumen 1, en el año 1978). Las dos obras están traducidas al castellano.

Además, en inglés hay un excelente estudio sobre la filosofía de la matemática de Lakatos: *Lakatos' Philosophy of Mathematics: A Historical Approach*, de Teun Koetsier, que es también un desarrollo crítico sobre sus propuestas originales, refinándolas y haciéndolas más convincentes, al menos a mi juicio. Y en español contamos también con un estudio, más breve, escrito por un murciano: *La filosofía de la matemática de Lakatos*, de Manuel Ballester.

Un premio instituido en honor de Imre Lakatos distingue cada año, desde 1986, a la mejor obra reciente en el ámbito de la filosofía de la ciencia. Ello incluye la filosofía de la matemática, y en efecto, tres libros lo han obtenido que aparecen mencionados en este curso: *Science without Numbers*, de Hartry Field (publicado en 1980 y premiado en 1986), del que vamos a hablar enseguida; *Frege: Philosophy of Mathematics*, de Michael Dummett (publicado en 1991 y por el que fue premiado en 1994), del que ya hemos hablado; y *Naturalism in Mathematics*, de Penelope Maddy (publicado en 1997 y premiado en 2002), autora de la que vamos a hablar a continuación.

Otras propuestas empiristas

§ 6.11. El realismo conjuntista de Penelope Maddy. Comentaremos ahora la propuesta de la profesora estadounidense Penelope Maddy, a través de una serie de artículos publicados en la década de 1980, y que cuajaron después en su libro *Realism in Mathematics*, de 1990.

La propuesta de Maddy es un intento de combinar la tesis de indispensabilidad de Quine y Putnam con la existencia de una intuición matemática básica, en la que Gödel había insistido tanto. En efecto, si la tesis de indispensabilidad, por su parte, sirve para reivindicar el realismo con respecto a las entidades postuladas por la matemática aplicada, la intuición matemática, por la suya, nos incita a ser realistas (o platonistas), al menos respecto a los objetos más elementales. Pues bien, Maddy intentará aunar de forma coherente estas dos inquietudes, en una forma de realismo matemático que toma como punto de partida la noción matemática de conjunto (por lo que ella misma denomina su propuesta como *"realismo conjuntista"*, *Realism in Mathematics*, p. 35).

Maddy parte de la consideración de pequeños conjuntos de objetos físicos, como pueda ser el formado por tres huevos en un cartón de huevos (o "huevera"). Contra la opinión general de que los conjuntos están fuera del universo físico, Maddy argumenta que, por ejemplo, ese conjunto en particular sí tiene un lugar espacio-temporal en nuestro universo, a saber: la región ocupada por los huevos en el cartón en cuestión (cf. Maddy, *Realism in Mathematics*, p. 59).

Una investigación acerca de lo que se sabe de nuestros mecanismos perceptivos lleva a Maddy a concluir que la percepción de ese conjunto de huevos, como tal conjunto, no representa un grado de abstracción mucho mayor que la percepción de los propios huevos, como objetos permanentes y separados de su entorno. Y que en definitiva, lo que experimenta alguien que abre el cartón de huevos, en busca de ingredientes para cocinar una tortilla, es la percepción física del conjunto de huevos como tal (cf. Maddy, *Realism*, p. 58).

De acuerdo con esto, algunos conjuntos (los que resultan más inmediatos a nuestra percepción) han de ser considerados como entidades físicas en sí mismos. ¿Y qué decir, entonces, de los enunciados numéricos habituales sobre estos conjuntos? Un ejemplo sería el enunciado

"Hay tres huevos en el cartón"

pronunciado con el cartón a la vista.

Pues bien, Maddy señala que ese tipo de atribuciones numéricas a conjuntos pequeños son asimilables, dados los estudios psicológicos basados en tiempos de reacción, a las llamadas *"creencias no inferenciales"*. Este tipo de creencias son las que se forman inmediatamente a partir de nuestra experiencia perceptiva, sin constituir el resultado de un razonamiento o inferencia. El ejemplo prototípico de creencia no inferencial es la creencia de que "hay un fuego" por parte alguien que está viendo el fuego con sus propios ojos. Por el contrario, si alguien cree que "hay un fuego" pero tan solo está viendo una columna de humo, entonces su creencia es inferencial (es decir, es el resultado de una deducción a partir de la visión del humo). Los experimentos psicológicos que miden el tiempo de respuesta reflejan diferencias significativas entre un tipo de creencias y otras.

Otro ejemplo de esto es el de una tirada del dado de parchís. Cualquier persona adulta que haya jugado mucho con estos dados identifica la tirada inmediatamente, con lo que "ha salido un seis", pongamos por caso, se forma en su mente como una creencia no inferencial. Sin embargo, para una criatura pequeña, que necesita contar los puntitos para saber qué tirada ha salido, la misma creencia ("ha salido un seis") se forma como creencia inferencial, esto es, como el resultado de un proceso de pensamiento.

Esto nos muestra que algunas atribuciones numéricas sencillas (como la del dado o la de los huevos del cartón, cuando las hace una persona adulta) deben ser catalogadas, dados los tiempos de respuesta, como creencias no inferenciales. Y sobre esta base, Maddy argumenta que los enunciados que expresan estas atribuciones han de interpretarse como predicando una propiedad directa, elemental, de aquella entidad física que constituye el conjunto de objetos en cuestión (es decir, el conjunto de huevos o el conjunto de puntitos de esa cara del dado; *Realism in Mathematics*, pp. 59–60).

§ 6.12. De las nociones matemáticas concretas a las más abstractas. Dicho esto, el siguiente paso de esta propuesta consiste en defender que nuestras intuiciones básicas sobre los conjuntos han de ser explicadas como generalizaciones perceptuales inmediatas (es decir, como generalizaciones perceptuales, similares a las intuiciones básicas acerca del comportamiento de los objetos físicos; cf. Maddy, *Realism in Mathematics*, p. 70). Tales intuiciones inmedaitas (relacionadas con conjuntos pequeños) se ven reflejadas, de un modo más general, en los axiomas elementales de la teoría de conjuntos. Y a partir de ellas la matemática va progresando, según Maddy, hacia conceptos más generales y abstractos, sobre los que no hay percepción directa ni intuiciones claras. Lo que se aplica pues en estos casos más complejos, siempre según esta propuesta, es un criterio explicativo similar al que se usa en el resto de las ciencias, a saber: elegir aquellos conceptos y principios generales que casan mejor con nuestras intuiciones y percepciones inmediatas, globalmente consideradas.

En este punto, Maddy trae a colación otra sugerencia de Gödel, que encontramos cerca del lugar en el que este autor defendía el platonismo:

> "Junto a la intuición matemática, puede haber otro criterio (aunque solo probable) de la verdad de los axiomas matemáticos, a saber, su fecundidad en las matemáticas e incluso, se podría añadir, quizá también en la física". (Gödel, "¿Qué es el problema de continuo de Cantor? — Suplemento", *Obras completas*, p. 361; citado en Maddy, *Realism in Mathematics*, p. 77.)

Y así pretende Maddy formular una filosofía de la matemática que sea, al mismo tiempo, *empirista*, compatible con el *realismo* (o platonismo) respecto a los objetos matemáticos, y compatible con el *fisicalismo*, esto es, con la doctrina de que todos los hechos científicos son explicables en términos de hechos físicos (cf. Maddy, *Realism*, pp. 154, 157).

Un libro posterior de esta autora, *Naturalism in Mathematics*, de 1997 (el que fue premiado, según dijimos), reviste un carácter mucho más técnico. En él examina con detalle el estatus filosófico de ciertos axiomas y candidatos a axiomas de la teoría de conjuntos. En este segundo libro, la filosofía de la matemática de Maddy da un giro considerable, criticando la tesis de indispensabilidad por verla poco acorde con la realidad de la práctica matemática (cf. *Naturalism in Mathematics*, pp. 107, 159), y criticando incluso el tipo de realismo en filosofía de la matemática que ella misma había abrazado en su obra anterior (cf. *Naturalism in Mathematics*, p. 132). El profesor Antonio Caba ha escrito dos artículos en castellano sobre esta autora: "Cuestiones abiertas en el platonismo de Gödel: la controversia Chihara-Maddy" (en la revista *Philosophia Malacitana* 8, 1995, pp. 29–47), y "Aspectos metodológicos del naturalismo matemático: la aproximación conjuntista de Maddy" (en *Contrastes: Revista interdisciplinar de filosofía* 5, 2000, pp. 5–23).

§ 6.13. El análisis de Philip Kitcher sobre la naturaleza del conocimiento matemático. Otro proyecto a destacar en este contexto es el del británico Philip Kitcher en su libro de 1982 *The Nature of Mathematical Knowledge*, que ya también hemos mencionado aquí con anterioridad. Kitcher pretende recoger el testigo de la corriente empirista protagonizada por Quine, Putnam y Lakatos, pero elaborando en detalle lo que estos autores no han llegado a ofrecer, a saber: un tratamiento sistemático de en qué consisten, y cómo se han ido adquiriendo, las distintas piezas que configuran el corpus de nuestro conocimiento matemático actual. En otras palabras: Kitcher intenta articular una filosofía empirista de la matemática que proporcione una descripción detallada y sistemática del conocimiento matemático en sus distintas partes.

Kitcher parte de la premisa "obvia e incuestionable" de que existe el conocimiento matemático (cf. *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 3), y a continuación pone el foco en la comunidad matemática y en la historia de la matemática, tratando de iniciar de hecho una nueva tradición en la historiografía de esta ciencia (*The Nature*, pp. 5, 7–8). El conocimiento matemático de una persona, según Kitcher, se fundamenta en el conocimiento de las autoridades científicas de la comunidad matemática a la que pertenece. Y el conocimiento de esa comunidad se fundamenta, a su vez, en el conocimiento de las de las comunidades que la precedieron.

Este conocimiento se transmite, a través del tiempo, de cada comunidad matemática a la siguiente. Dicha transmisión constituye un complejo proceso de evolución epistemológica, creativa y cambiante, a lo largo del cual el conocimiento matemático va alcanzando grados de abstracción cada vez mayores. Y remontándonos hacia atrás en el tiempo en este proceso, llegamos a las etapas iniciales de la cadena. Pues bien, lo que se encuentra en ese inicio, según Kitcher, es el conocimiento perceptual rudimentario adquirido por nuestros ancestros más remotos. Ahí es donde se origina el conocimiento matemático y donde se tiene su último apoyo (cf. *The Nature*, pp. 5, 7, 10–11).

En consonancia con todo esto, la entidad de los objetos matemáticos se identifica con estructuras abstraídas de la realidad física, y por lo tanto presentes en ella de alguna manera (en cuanto que es la realidad la que nos permite abstraerlas de ella, y las que indirectamente nos las proporciona; cf. *The Nature*, pp. 107–108).

De esta forma, Kitcher pretende que su explicación empirista del conocimiento matemático dé cobertura a la existencia de la matemática pura de una forma coherente y continua con la matemática aplicada. Ello es importante porque, como Kitcher nos recuerda, la mayor parte del edificio matemático es de hecho matemática pura, sin ninguna aplicación conocida (cf. Kitcher, *The Nature*, pp. 8–9).

§ 6.14. La filosofía de la matemática de Kitcher y el realismo ecológico. En defensa de su propuesta, Kitcher apela a cierta corriente en psicología cognitiva, el llamado *"realismo ecológico"* iniciado por el psicólogo estadounidense James Gibson, en libros como *La percepción del mundo visual*, de 1974 y *The Ecological Approach to Visual Perception*, de 1979. Esta corriente está expuesta en un formato divulgativo, para el publico no especialista, en el libro de 1981 *Direct Perception*, de Claire Michaels y Claudia Carello.

El realismo ecológico defiende que la mayor parte de nuestra percepción es *directa* y *no inferencial*. Según esto, una descripción completa de la información que percibimos en la visión muestra que captamos directamente ciertos aspectos estructurales del ambiente, llamados *"potencialidades"* (del inglés *affordances*), es decir, oportunidades que se nos ofrecen, o *cosas que las realidad nos puede proporcionar*.

Ejemplos de esas *potencialidades* podrían ser la cualidad alimenticia de una lechuga ante los ojos de un conejo (es decir, la oportunidad que la lechuga le ofrece al conejo para saciar su hambre), o la posibilidad que ofrece un árbol como lugar de refugio para una ardilla que está siendo perseguida por un perro (cf. Kitcher, *The Nature*, pp. 11–12).

Pues bien, esas "potencialidades" constituirían, según Kitcher, un ejemplo del tipo de abstracción perceptiva que está en el origen del conocimiento matemático. Y la matemática en su conjunto sería, en definitiva, "una ciencia ideal de potencialidades universales" (cf. Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge*, p. 108).

§ 6.15. Las matemáticas sin fundamentos. El empirismo en filosofía de la matemática ha experimentado, como vemos, toda una eclosión a partir de la segunda mitad del siglo XX. De dicha eclosión, o auge, solo hemos podido recoger aquí una pequeña muestra.

Pues bien, de este auge rezuma una tesis general de la que mucha gente ha hecho bandera en las últimas décadas, y que coincide con el planteamiento convencionalista: la tesis de que la matemática no necesita fundamento alguno. Frente al debate sobre la crisis de fundamentos de principios del siglo XX, y frente a les filósofes que siguen defendiendo hoy día alguna de las tres escuelas fundacionales más o menos reformuladas, estas otras corrientes insisten en que abordar la filosofía de la matemática como una búsqueda de fundamentos es un error.

Como dice Hilary Putnam en su artículo "Mathematics without foundations", de 1967:

> "Durante el último medio siglo, tanta gente en filosofía y lógica ha estado ocupada tratando de proporcionar a la matemática un "fundamento", que solo en raras ocasiones algunas voces se atrevían a sugerir tímidamente que no necesita ninguno. Yo querría recomendar aquí encarecidamente que tomemos en serio la opinión de esas tímidas voces. No creo que la matemática sea poco clara; no creo que la matemática tenga una crisis en sus fundamentos; es más, no creo que la matemática tenga 'fundamentos' ni los necesite."
> (Putnam, "Mathematics without foundations", en *Philosophical Papers, vol. 1: Mathematics, Matter and Method*, p. 43, así como en Benacerraf y Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*, p. 295).

Otras corrientes recientes en filosofía de la matemática

§ 6.16. Otras dos corrientes recientes. Antes de terminar este manual vamos a hablar brevemente de otras dos corrientes que han florecido en la filosofía de la matemática de las últimas décadas: el estructuralismo y el nominalismo. Se trata, como decíamos en las primeras páginas, de dos corrientes recientes de reconocida importancia, que no casan en ninguno de los módulos del curso, pero a las que tampoco les vamos a dedicar la suficiente extensión como para asignarles un módulo aparte.

§ 6.17. Enfoques estructuralistas. La idea matriz del estructuralismo en filosofía de la matemática es que la matemática no trata sobre objetos propiamente dichos, sino sobre *estructuras* de objetos. Dentro de esas estructuras, la identidad individual de los objetos involucrados es indiferente: el único contenido propiamente matemático, según este punto de vista, es la la funcionalidad de los objetos dentro de la estructura a la que pertenecen, y las relaciones mutuas que mantienen entre ellos.

Con frecuencia se cita a Richard Dedekind como el principal precursor de esta filosofía, por cosas como esta caracterización del conjunto de los números naturales:

> "Se prescinde totalmente de la peculiar naturaleza de los elementos; únicamente se retiene su diferenciabilidad, y solo se consideran las relaciones mutuas en que los pone la representación ordenadora"
> (Dedekind, 1888, *¿Qué son y para qué sirven los números?*, secc. 73, p. 118 de la ed. española.)

Casi un siglo después, Paul Benacerraf presentó una incisiva defensa de este punto de vista en otro artículo suyo, también muy influyente: "¿Qué no podrían ser los números?", de 1965 (traducido al castellano en *Mathesis* 9(3), 1993, pp. 317–343).

La propuesta de Benacerraf es que los números naturales no tienen identidad individual, y por tanto no son *objetos* propiamente dichos. Por el contrario, lo único que los caracteriza es la estructura abstracta que forman, es decir, la red de relaciones que mantienen entre ellos.

Frege había insistido, por el contrario, en que una fundamentación satisfactoria de la artmética debía caracterizar los números naturales como objetos, y además debía explicar qué objetos concretos eran. En particular, Frege defendía que una buena filosofía de la aritmética debía explicarnos, por ejemplo, por qué el número 3 es distinto al emperador Julio César (cf. p. ej. *Los fundamentos de la aritmética*, §56, p. 82 de la ed. castellana). Pues bien, dicho afán, que se conoce de hecho como "el problema de Julio César", es para Benacerraf un simple error, dado que cualquier objeto podría funcionar como un número determinado, siempre que estuviera inmerso en la estructura adecuada y ocupara el papel correspondiente dentro de esa estructura (cf. Benacerraf, "¿Qué no podrían ser los números?", pp. 334–339).

Para ilustrar esto Benacerraf establece una comparación entre los números naturales y las farolas de una avenida. En efecto, para identificar un número determinado y distinguirlo del resto de componentes de la serie numérica, solo podemos utilizar la posición relativa en la que ese número se encuentra dentro de la serie. Ello es así dado que las propiedades de dicho número y las relaciones que mantiene con el resto de números se derivan exclusivamente de su posición en la serie numérica. Sin embargo, la situación es completamente distinta a las de las farolas de una avenida. En efecto, para identificar individualmente una farola, y distinguirla de otras farolas vecinas, podemos acudir no solo a su posición en la fila, sino también a sus características físicas particulares, puesto que siempre habrá detalles físicos que distingan una farola de otra (cf. Benacerraf, "¿Qué no podrían ser los números?", p. 335).

Por todo ello, Benacerraf concluye que los números no son entidades particulares propiamente dichas, sino tan huecos, o muescas, dentro de una estructura. Y que es esa estructura, abstraída en sí misma, el verdadero objeto de estudio de la matemática.

§ 6.18. Estructuralismo y deductivismo. El mencionado artículo de Benacerraf ha tenido eco en muchas publicaciones, al igual que sucedería con su otro artículo de 1973, al que nos referimos en su momento (cf. p. 23).

Una de las primeras reacciones apareció en el artículo de Putnam "Mathematics without foundations", de 1967, que también hemos mencionado ya aquí. Lo que Putnam viene sugiere en ese artículo es que una teoría matemática se puede interpretar como la mera afirmación de que *si* un determinado dominio de objetos satisface sus postulados o axiomas, *entonces* satisfará los teoremas de la misma. La teoría se podría caracterizar, por tanto, en términos de la necesidad lógica que liga sus axiomas con sus teoremas, por el hecho de estar estos últimos implicados por los primeros.

Esa necesidad lógica, a su vez, se puede describir internamente en el contexto de la llamada *"lógica modal"* (na extensión de la lógica de primer orden clásica, que trata de dar cuenta de las nociones de *necesidad* y *posibilidad*).

De esta forma, señala Putnam, se puede reducir la estructura caracterizada por las distintas teorías matemáticas, a términos de la lógica modal. Y por consiguiente, la reducción de las matemáticas en términos de la teoría de conjuntos no sería la única posible, sino que tendría en la reducción a la lógica modal otra alternativa igualmente legítima. Y a partir de aquí, dependiendo del enfoque o parcela de la matemática que nos interese más, puede resultar más útil o más clarificadora utilizar una reducción o la otra (cf. Putnam, "Mathematics without foundations", *Philosophical Papers, vol. 1*, p. 57).

La propuesta de Putnam ha sido caracterizada como *"deductivismo"*, y a veces también con la etiqueta *"si-entonces-ismo"* (en inglés, *"if-then-ism"* (cf. Resnik, *Frege and the Philosophy of Mathematics*, p. 130; *Mathematics as a Science of Patterns*, p. 142).

Un desarrollo detallado de dicha propuesta es el libro del profesor de filosofía y concertista de piano Geoffrey Hellman, *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation*, de 1989. De acuerdo con el estructuralismo modal que propone Hellman, las teorías matemáticas incluyen un compromiso con la posibilidad de que existan las estructuras abstractas determinadas por ellas. Por consiguiente, según esta propuesta, las teorías matemáticas no se limitan a caracterizar ciertas estructuras, sino que afirman que dichas estructuras son *posibles*. Esto representaría un paso más allá de la mera propuesta deductivista, como el propio Hellman señala (cf. *Mathematics without Numbers*, pp. 18–19, 26).

Otras dos obras que están dentro del enfoque estructuralista pero en líneas de investigación muy distintas, son *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, de Stewart Shapiro, y el mencionado *Mathematics as a Science of Patterns* de Michael Resnik, ambas publicadas en el 1997. Y también merece mención la introducción de los propios Hellman y Shapiro, *Mathematical Structuralism*, para la serie *Cambridge Elements in the Philosophy of Mathematics*.

§ 6.19. El nominalismo en la reciente filosofía de la matemática: la "ciencia sin números" de Hartry Field. El término *"nominalismo"* proviene de la vieja disputa medieval sobre la existencia separada de los conceptos o *universales* (como el concepto de *tigre*, por ejemplo). Mientras un bando filosófico defendía que los conceptos (los universales) tenían existencia propia, el otro bando argumentaba que un universal era un mero *"flatus vocis"*, es decir, un "soplo de la voz", un puro *nombre*. Por eso, dicha corriente (cuyo principal representante fue el teólogo y filósofo inglés Guillermo de Occam) acabó siendo conocida como *"nominalismo"*.

Pues bien, en 1980 el profesor Hartry Field publicó una contribución extraordinariamente original y compleja, en la que reivindicaba explícitamente esa etiqueta, aplicada a las entidades matemáticas: *Science without Numbers: A Defence of Nominalism*. Años después completaría este trabajo con una compilación de artículos sobre el mismo tema, *Realism, Mathematics and Modality*, publicado en 1989. Y en 2016 aparecería una segunda edición de *Science without Numbers* con interesantes añadidos, como una carta de Quine a Field, con sus primeras impresiones respecto del libro.

La obra de Field es una reacción al argumento de indispensabilidad que ya conocemos, y surge precisamente con la intención de *refutar* ese argumento. Esto es, surge con la intención de mostrar que es posible aceptar las teorías científicas actuales, y en particular las teorías físicas, sin comprometerse con la verdad de las teorías matemáticas que estas incorporan, ni con la existencia de las entidades matemáticas que intervienen en ellas.

Para ello, Field plantea una complicada estrategia para reformular las teorías físicas al uso, de tal manera que la referencia a los objetos matemáticos desaparezca por completo de ellas.

Según este autor, la tesis de indispensabilidad es el único argumento "serio" en favor de la existencia de los objetos matemáticos. Por consiguiente, si él consiguiera refutar ese argumento, entonces se seguiría que los objetos matemáticos no existen en absoluto; y a partir de entonces podríamos considerar a los objetos matemáticos como meros "nombres", meras ficciones útiles o instrumentos de razonamiento, que nos ayudan en nuestras disquisiciones acerca del mundo físico, pero de las cuales podemos prescindir. Pues bien, esto es justamente lo que se propone hacer (cf. *Science without Numbers*, pp. 1–2, 5). Y de ahí su posición *nominalista*, a la que él mismo llama también *"ficcionalista"*, y a veces, *"instrumentalista"* (*Science without Numbers*, p. 2; *Realism, Mathematics and Modality*, p. 4).

Field argumenta que la utilidad que los objetos matemáticos tienen en la ciencia física es distinta de la utilidad de otras entidades teóricas que se postulan en esta ciencia (como ondas, fuerzas, electrones, etc). La razón es que las primeras son prescindibles, mientras que las segundas no lo son. Y efectivamente, Field defiende que todo el razonamiento que se realiza en física utilizando matemáticas se puede realizar también sin ellas, aunque ello tenga un precio. El precio a pagar es que la física "sin números" (y sin objetos matemáticos en general) resulta mucho más engorrosa de elaborar y manejar que la física en su presentación ordinaria.

En este sentido, Field defiende que las matemáticas son *"conservative"* (*"conservadoras"*), puesto que no aportan nada esencial a nuestro conocimiento de los fenómenos físicos; es decir, que no aportan nada que no hubiese podido ser obtenido mediante un razonamiento sin matemáticas (*Science without Numbers*, pp. x, 10–11).

Pues bien, la tarea que se plantea Hartry Field a partir de aquí es la de mostrar en detalle en qué consiste ese farragoso o tortuoso camino por el cual se puede reconstruir el razonamiento científico ordinario sin utilizar matemáticas. Tal tarea constituye un proyecto de investigación de envergadura, y de carácter marcadamente técnico, al estilo de los propuestos por las viejas escuelas fundacionales. En este caso, sin embargo, Field no aspira a completar él mismo el proyecto en sus detalles, sino solo a dejarlo planteado y a ilustrarlo con un ejemplo concreto, relativamente sencillo: la teoría de la gravitación de Newton (*Science without Numbers*, pp. 61–91; *Realism, Mathematics and Modality*, p. 17).

No entraremos aquí en mayores detalles sobre la forma como este autor lleva a cabo su reducción nominalista, cosa que exigiría un espacio considerable. Pero sí hay que mencionar que el tipo de reducción que Field describe se apoya esencialmente en la llamada *"lógica de segundo orden"*, una extensión de la teoría lógica básica, la *lógica de primer orden clásica*. Y es precisamente ese recurso a la lógica de segundo orden el que más ha sido criticado en su propuesta, ya que, a diferencia de la lógica de primer orden, se trata de una teoría no axiomatizable y de de fuerte calado matemático. De hecho, el propio Field manifiesta su disgusto por tener que recurrir a ella (*Science without Numbers*, p. 38).

§ 6.20. Otras propuestas nominalistas. Otro esfuerzo reciente por evitar la referencia a los objetos matemáticos (también como respuesta al argumento de Quine-Putnam, pero en una línea muy distinta) es el de Charles Chihara en su obra de 1990, *Constructibility and Mathematical Existence*.

Chihara es plenamente consciente (a diferencia de Field) de que su proyecto es nominalista solo acerca de los *objetos* matemáticos, pero no acerca de las *nociones* o contextos de razonamiento que él propone para reemplazar la referencia a dichos objetos (*Constructibility*, pp. 47, 174). Utilizando términos quineanos, podríamos decir que estamos ante un balance, o equilibrio de fuerzas, entre *ontología* e *"ideología"* (entre ontología y teoría).

Efectivamente, en el fragmento de "Dos dogmas" que citamos hacia el comienzo de este módulo Quine señalaba que la ciencia recurre habitualmente a "hinchar la ontología para simplificar la teoría" (cf. p. 111 de este manual). Y en otro artículo de la misma época, Quine contrapone el compromiso *ontológico* al compromiso *ideológico* ("Ontology and Ideology", *Philosophical Studies* 2(1), 1951, pp. 11–15).

Pues bien, algo parecido podríamos aplicar a todos los programas de este estilo, incluido el de Field. Independientemente de sus dificultades técnicas, o de que consigan o no el éxito final en la empresa reduccionista, los recursos utilizados para la reducción (ya sea lógica de segundo orden, nociones modales, nociones conjuntistas u otras), suelen suscitar a la postre las mismas dudas epistemológicas que los objetos originales.

Por consiguiente, lo que muestran estos programas reduccionistas es que se puede recorrer un camino inverso al que ha seguido la ciencia en un momento dado, deshinchando la ontología a cambio de hinchar y complejizar la teoría. Podemos cambiar nuestras teorías habituales por otras que involucren menos compromisos ontológicos, pero para ello tendremos que pagar el precio de una mayor complejidad teórica (o "ideológica"). Y desde el punto de vista epistemológico, no habremos ganado mucho con el cambio: tendremos menos ontología que justificar, pero tendremos que justificar más teoría (por ejemplo, respecto a los principios en los que se basa la lógica de segundo orden, la lógica modal o la teoría de conjuntos, que distan mucho de estar claros).

Por todo ello, es dudoso que estas propuestas reduccionistas nos digan algo nuevo sobre la esencia de la matemática. Como dice el profesor de la Universidad de Princeton, John Burgess:

> "Tener una ontología o *no tenerla en absoluto*, es un rasgo impuesto más por nosotres que por el universo.
>
> "El trabajo de Field y otres puede ser por tanto considerado como complementario al de Quine, en vez de estar en conflicto con él."
>
> ("Epistemology and nominalism", en Irvine (ed.), *Physicalism in Mathematics*, p. 14.)

Bibliografía general

Alcolea Banegas, J., *Logicismo, formalismo, intuicionismo*, Valencia: Nau Llibres, 1985.

Alemán Pardo, A., Lógica, matemáticas y realidad (2ª ed.), Madrid: Tecnos, 2011.

Aristóteles, *Física*, Madrid: Gredos, 1995.

Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Nueva York: Oxford University Press, 1998.

Ballester Hernández, M., *La filosofía de la matemática de Imre Lakatos*, El Campello (Alicante): Interlibro, 1998.

Benacerraf, P., y H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (2ª ed.), Cambridge: Cambridge University Press, 1983 (reimp. 1996).

Berkeley, G., *The Works of George Berkeley* (4 vols.), Bristol: Thoemmes Press, 1998.

Beth, E., *Las paradojas de la lógica*, Valencia: Publicaciones de la revista *Teorema*, 1975.

Bigelow, J., *The Reality of Numbers: A Physicalist's Philosophy of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 1988.

Bishop, E., *Foundations of Constructive Analysis*, Nueva York: McGraw-Hill, 1967.

Bridges, D., y F. Richman, *Varieties of Constructive Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1987.

Brouwer, L. E. J., *Collected Works, vol. 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, Amsterdam: North-Holland, 1975.

Brouwer, L. E. J., *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

Brown, J. R., *Philosophy of Mathematics: An Introduction to a World of Proofs and Pictures*, Londres: Routledge, 1998.

Burgess, J. P., y G. Rosen, *A Subject with no Object: Strategies for Nominalistic Interpretation of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 1997.

Cantor, G., *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*, Barcelona: Crítica, 2006.

Cañón Loyes, C., *La matemática: creación y descubrimiento*, Madrid: Universidad Pontificia de Comillas, 1993.

Carnap, R., *Autobiografía intelectual*, Barcelona: Paidós, 1992.

Chihara, C. S., *Ontology and the Vicious-Circle Principle*, Ithaca (N.Y.): Cornell University Press, 1973.

Chihara, C. S., *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford: Clarendon Press, 1990 (reimp. 1991).

Chihara, C. S., *A Structural Account of Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 2004.

Clarke-Doane, J. *Mathematics and Metaphilosophy*, Cambridge: Cambridge University Press, 2022.

Collette, J. P., *Historia de las matemáticas* (2 vols.), Madrid: Siglo XXI, 1985.

Colyvan, M., *The Indispensability of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 2001.

Colyvan, M., *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2012.

Davis, M., *La computadora universal: de Leibniz a Turing*, Madrid: Debate, 2002.

Davis, P. J., y R. Hersh, *Experiencia matemática*, Barcelona: Labor, 1988.

Dedekind, R., *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*, Madrid: Alianza, 1998.

Detlefsen, M., *Hilbert's Program: An Essay on Mathematical Instrumentalism*, Dordrecht: Reidel, 1986.

Dou, A., *Fundamentos de la matemática* (2ª ed.), Barcelona: Labor, 1974.

Duhem, P., *La teoría física: su objeto y su estructura*, Barcelona: Herder, 2003.

Dummett, M. A. E., *Frege: Philosophy of Language* (2ª ed.), Londres: Duckworth, 1981.

Dummett, M. A. E., *The Interpretation of Frege's Philosophy*, Londres: Duckworth, 1981.

Dummett, M. A. E., *La verdad y otros enigmas*, México D.F.: Fondo de Cultura Económica, 1990.

Dummett, M. A. E., *Frege and Other Philosophers*, Oxford: Clarendon Press, 1991 (reimp. en versión electrónica en Oxford Scholarship Online, 2004).

Dummett, M. A. E., *Frege: Philosophy of Mathematics*, Londres: Duckworth, 1991 (reimp. en Cambridge (MA.): Harvard University Press, 1995).

Dummett, M. A. E., *Elements of Intuitionism* (2ª ed.), Oxford: Clarendon Press, 2000.

Echeverría, J., J. de Lorenzo y L. Peña (eds.), *Calculemos...: matemáticas y libertad (Homenaje a Miguel Sánchez Mazas)*, Madrid: Trotta, 1996.

Euclides, *Elementos* (3 vols.), Madrid: Gredos, 1991–1996.

Evans, G., y J. McDowell (eds.), *Truth and Meaning: Essays in Semantics*, Oxford: Clarendon Press, 1976 (reimp. 1999).

Ewald, W. B. (ed.), *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* (2 vols.), Oxford: Oxford University Press, 1996.

Feferman, S., *In the Light of Logic*, Nueva York: Oxford University Press, 1998.

Field, H., *Science without Numbers: A Defence of Nominalism*, 2nd. rev. ed. (with a substantial new preface presenting the author's current views and responses to the issues raised in the subsequent debate), Oxford: Oxford University Press, 2016.

Field, H., *Realism, Mathematics and Modality*, Oxford: Blackwell, 1989 (reimp. 1991).

Floyd, J. *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2021.

Ferrater Mora, J., *Diccionario de Filosofía* (1ª ed. actualizada, 4 vols.), Barcelona: Ariel, 1994 (reimp. 2001).

Ferrater Mora, J., G. Henrik von Wright, N. Malcolm y D. Pole, *Las filosofías de Ludwig Wittgenstein* (eds.), *Las filosofías de Ludwig Wittgenstein*, Barcelona: Oikos-Tau, 1966.

Fraenkel, A. A., Y. Bar-Hillel y A. Levy, *Foundations of Set Theory* (2ª ed.), Amsterdam: North-Holland, 1973 (reimp. 1984).

Frege, G., *Nachgelassene Schriften*, Hamburgo: Felix Meiner, 1969.

Frege, G., *Los fundamentos de la aritmética: investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*, Barcelona: Laia, 1970.

Frege, G., *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Y otros estudios filosóficos*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1972.

Frege, G., *Escritos lógico-semánticos*, Madrid: Tecnos, 1974.

Frege, G., *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Oxford: Blackwell, 1977.

Frege, G., *Posthumous Writings*, Londres: Blackwell, 1979.

Frege, G., *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Oxford: Blackwell, 1980.

Frege, G., *Investigaciones lógicas*, Madrid: Tecnos, 1984.

Frege, G., *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*, Madrid: Tecnos, 1998.

Friend, M., *Introducing Philosophy of Mathematics*, Stocksfield (Reino Unido): Acumen, 2007.

Galileo Galilei, *El ensayador*, Buenos Aires: Aguilar, 1981.

Galileo Galilei, *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*, Buenos Aires: Losada, 2003 (y con distinta traducción, bajo el título *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Madrid: Editora Nacional, 1976).

Garciadiego Dantan, A. R., *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de conjuntos*, Madrid: Alianza, 1992 (ed. en inglés en Basel: Birkäuser, 1992).

Garrido, M., *Lógica simbólica*, 4ª ed., Madrid: Tecnos, 2001 (reimp. 2003).

Garrido, M. (ed.), *Lógica y lenguaje*, Madrid: Tecnos, 1989.

Garrido Garrido, J., *Verdad matemática: una introducción a los fundamentos de la matemática*, Madrid: Nivola, 2003.

Geach, P., y M. Black (eds.), *Translation from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Oxford: Blackwell, 1977.

Gibson, J. J., *La percepción del mundo visual*, Buenos Aires: Infinito, 1974.

Gibson, J. J., *The Ecological Approach to Visual Perception*, Londres: Houghton Mifflin, 1979 (reimp. en Londres: Erlbaum, 1986).

Gillies, D. A., *Frege, Dedekind and Peano on the Foundations of Arithmetic*, Assen (Holanda): van Gorcum, 1982.

Grattan-Guinness, I. (ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630—1910: una introducción histórica*, Madrid: Alianza, 1984.

Gödel, K., *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los* Principia Mathematica *y sistemas afines*, Oviedo: KRK, 2006.

Gödel, K., *Collected Works* (5 vols.), Oxford: Oxford University Press, 1986—2003.

Gödel, K., *Obras completas* (2ª ed.), Madrid: Alianza, 1989.

Gödel, K., *Ensayos inéditos*, Barcelona: Mondadori, 1994 (ed. en inglés en Basel: Birkhäuser, 1995).

Grattan-Guinness, I. (ed.), *Companion Encyclopedia of the History and the Philosophy of the Mathematical Sciences* (2 vols.), Londres: Routledge, 1994.

Gutiérrez Cabria, S., *Filosofía de la probabilidad*, Valencia: Tirant lo Blanch, 1992.

Gutiérrez Cabria, S., *Filosofía de la estadística*, Valencia: Universidad de Valencia, 1994.

Hale, B., *Abstract Objects*, Oxford: Blackwell, 1987.

Hale, B., y C. Wright, *The Reason's Proper Study: Essays Towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 2001.

Hallett, M., *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Oxford: Clarendon Press, 1984 (reimp. 1996).

Halmos, P. R., *Teoría intuitiva de conjuntos*, México D.F.: Continental, 1965 (reimp. 1984).

Hart, W. D. (ed.), *The Philosophy of Mathematics*, Oxford: Oxford University Press, 1996.

Heijenoort, J. van (ed.), *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge (MA.): Harvard University Press, 1967 (reimp. 1999).

Hellman, G., *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation*, Oxford: Clarendon Press, 1989.

Hellman, G. y S. Shapiro, *Mathematical Structuralism*, Cambridge: Cambridge University Press, 2018.

Heyting, A., *Introducción al intuicionismo*, Madrid: Tecnos, 1976.

Hilbert, D., *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vols., Berlín: Springer, 1932–1935 (reimp. en Bronx (N.Y.): Chelsea, 1965).

Hilbert, D., *Pensamiento axiomático*, Caracas: Universidad Central de Venezuela, 1978.

Hilbert, D., *Fundamentos de la geometría*, Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1991.

Hilbert, D., *Fundamentos de las matemáticas*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1993.

Hilbert, D., y W. Ackermann, *Elementos de lógica teórica*, Madrid: Tecnos, 1962.

Hume, D., *Tratado de la naturaleza humana. Autobiografía* (2 vols.), Madrid: Editora Nacional, 1981.

Hunter, G., *Metalógica*, Madrid: Paraninfo, 1981.

Irvine, A. D. (ed.), *Physicalism in Mathematics*, Dordrecht: Kluwer, 1990.

Irvine, A. D. (ed.), *Philosophy of Mathematics*, Amsterdam: Elsevier, 2007.

Jacquette, D. (ed.), *Philosophy of Mathematics: An Anthology*, Oxford: Blackwell, 2002.

Kitcher, P., *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford: Oxford University Press, 1982 (reimp. 1985).

Kline, M., *Matemáticas: la pérdida de la certidumbre*, Madrid: Siglo XXI, 1985.

Kline, M., *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días* (3 vols.), Madrid: Alianza, 1992.

Koetsier, T., *Lakatos' Philosophy of Mathematics: A Historial Approach*, Amsterdam: North-Holland, 1991.

Körner, S., *Introducción a la filosofía de la matemática*, México D.F.: Siglo XXI, 1967.

Kripke, S., *Wittgenstein: A propósito de reglas y lenguaje privado: Una exposición elemental* , Madrid: Tecnos, 2006 (y en traducción anterior, de peor calidad, bajo el título *Wittgenstein: Reglas y lenguaje privado*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1989).

Kuhn, T., *La estructura de las revoluciones científicas*, Madrid: Fondo de Cultura Económica, 1987.

Lakatos, I., *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*, Madrid: Alianza, 1986.

Lakatos, I., *Escritos filosóficos, vol. 1: La metodología de los programas de investigación científica*, Madrid: Alianza, 1983.

Lakatos, I., *Escritos filosóficos, vol. 2: Matemáticas, ciencia y epistemología*, Madrid: Alianza, 1999.

Linnebo, Ø., *Philosophy of mathematics*, Princeton (N.J.: Princeton University Press, 2017.

Lorenzo, J. de, *La filosofía de la matemática de H. Poincaré*, Madrid: Tecnos, 1974.

Lorenzo, J. de, *Filosofía de la matemática fin de siglo XX*, Valladolid: Universidad de Valladolid, 2000.

Lorenzo, J. de, *Fundamentos y enigmas de la matemática: de Kant a Frege*, Valladolid: Universidad de Valladolid, 2010.

Machover, M., *Set theory, logic and their limitations*, Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

Maddy, P., *Realism in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 1990 (reimp. 1992).

Maddy, P., *Naturalism in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press, 1997.

Mancosu, P. (ed.), *From Brouwer to Hilbert: the Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s*, Oxford: Oxford University Press, 1998.

Marín, A., *Incógnitas, variables y otros fantasmas matemáticos*, Pamplona: Universidad Pública de Navarra, 2006.

Michaels, C. F., y C. Carello, *Direct Perception*, Londres: Prentice-Hall, 1981.

Mill, J. S., *A System of Logic*, Honolulu (HI.): University Press of the Pacific, 2002.

Mosterín, J., *Teoría axiomática de conjuntos* (2ª ed.), Barcelona: Ariel, 1980.

Mosterín, J., *Los lógicos*, Madrid: Espasa, 2000.

Mosterín, J., y R. Torretti, *Diccionario de lógica y filosofía de la ciencia*, Madrid: Alianza, 2002.

Moore, A. W., *The Infinite* (2ª ed.), Londres: Routledge, 2001.

Morton, A., y S. P. Stich, *Benacerraf and his Critics*, Oxford: Blackwell, 1996.

Nagel, E., P. Suppes y A. Tarski (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the 1960 International Congress*, Stanford (CA.): Stanford University Press, 1962.

Nagel, E., y J. R. Newman, *El teorema de Gödel*, Madrid: Tecnos, 1970.

Newman, J. R. (ed.), *Sigma: el mundo de las matemáticas* (6 vols.), Barcelona: Grijalbo, 1969.

Parsons, C., *Mathematics in Philosophy: Selected Essays*, Ithaca (N.Y.): Cornell University Press, 1983.

Pascoe, L. C., *Matemática moderna*, Madrid: Pirámide, 1985.

Peano, G., *Los principios de la aritmética: expuestos según un nuevo método*, Oviedo: Pentalfa, 1979.

Poincaré, H., *Ciencia y método*, Madrid: Espasa Calpe, 1963.

Poincaré, H., *Filosofía de la ciencia*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1978.

Poincaré, H., *Ciencia e hipótesis*, Madrid: Espasa Calpe, 2002.

Pólya, G., *Matemáticas y razonamiento plausible*, Madrid: Tecnos, 1966.

Popper, K., *La lógica de la investigación científica*, Madrid: Tecnos, 1982.

Popper, K., *Conjeturas y refutaciones: el desarrollo del conocimiento científico*, Barcelona: Paidós, 1994.

Posy, C. *Mathematical Intuitionism*, Cambridge: Cambridge University Press, 2020.

Putnam, H., *Philosophy of logic*, Nueva York: Harper & Row, 1971.

Putnam, H., *Philosophical Papers, vol. 1: Mathematics, Matter and Method* (2ª ed.), Cambridge: Cambridge University Press, 1979 (reimp. 1985).

Putnam, H., *Words and Life*, Cambridge (MA.): Harvard University Press, 1994.

Putnam, H., *Philosophy in an Age of Science: Physics, Mathematics and Skepticism*, Cambridge (MA.): Harvard University Press, 2012.

Quine, W. v. O., *Desde un punto de vista lógico*, Barcelona: Ariel, 1962 (reimp. en Barcelona: Orbis, 1984).

Quine, W. v. O., *Filosofía de la lógica*, Madrid: Alianza, 1973.

Quine, W. v. O., *Teorías y cosas*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1986.

Reichenbach, H., *Experience and Prediction: An Analysis of the Foundations and the Structure of Knowledge*, Chicago (IL.): The University of Chicago Press, 1938 (reimp. 1976).

Reichenbach, H., *Elements of Symbolic Logic*, Nueva York: Macmillan, 1947 (reimp. 1966, y en otra en Londres: Constable, 1980).

Reid, C., *Hilbert*, Berlín: Springer, 1970.

Resnik, M. D., *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Ithaca (N.Y.): Cornell University Press, 1980.

Resnik, M. D., *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford: Clarendon Press, 1997.

Rush, P. *Ontology and the Foundations of Mathematics: Talking Past Each Other*, Cambridge: Cambridge University Press, 2022.

Russell, B., *Obras completas*, vol. 2: *Ciencia y filosofía: 1897–1919*, Madrid: Aguilar, 1973.

Russell, B., *La evolución de mi pensamiento filosófico*, Madrid: Alianza, 1982.

Russell, B., *Introducción a la filosofía matemática*, Barcelona: Paidós, 1988 (reimp. 2002).

Russell, B., *Los principios de la matemática*, Barcelona: Círculo de Lectores, 1995 (contenido, también, con la misma traducción, en el vol. 2 de las *Obras completas*, pp. 379–820; y editado anteriormente, con una traducción menos lograda, en Buenos Aires: Espasa Calpe, 1948, 3ª ed. Madrid: Espasa Calpe, 1977).

Satne, G., *El argumento escéptico: de Wittgenstein a Kripke*, Buenos Aires: Grama Ediciones, 2005.

Schirn, M. (ed.), *The Philosophy of Mathematics Today*, Oxford: Clarendon Press, 1998.

Shanker, S. G., *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics*, Londres: Croom Helm, 1986 (reimp. en Londres: Routledge, 2000).

Shanker, S. G. (ed.), *Ludwig Wittgenstein: Critical Assessments, vol. 3: From the Tractatus to Remarks on the Foundations of Mathematics: Wittgenstein on the Philosophy of Mathematics*, Londres: Croom Helm, 1986.

Shapiro, S., *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-order Logic*, Oxford: Clarendon Press, 1991 (reimp. 2000).

Shapiro, S., *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford: Oxford University Press, 1997 (reimp. 2000).

Shapiro, S. (ed.), *Intensional Mathematics*, Amsterdam: North-Holland, 1985.

Shapiro, S. (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford: Oxford University Press, 2005.

Steiner, M., *Mathematical Knowledge*, Ithaca (N. Y.): Cornell University Press, 1975.

Steiner, M., *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*, Cambridge (MA.): Harvard University Press, 1998.

Stigt, W. P. van, *Brouwer's Intuitionism*, Amsterdam: North-Holland, 1990.

Stillwell, J. *A Concise History of Mathematics for Philosophers*, Cambridge: Cambridge University Press, 2019.

Snyder, E. *Semantics and the Ontology of Number*, Cambridge: Cambridge University Press, 2021.

Troelstra, A. S., y D. van Dalen, *Constructivism in Mathematics: An Introduction* (2 vols.), Amsterdam: Norht-Holland, 1988.

Turing, A. M., H. Putnam y D. Davidson, *Mentes y máquinas*, Madrid: Tecnos, 1985.

Tymoczko, T. (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Basel: Birkhäuser, 1985 (2ª ed. rev. en Princeton (N.J.): Princeton University Press, 1998).

Weber, Z. *Paraconsistency in Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2022.

Weyl, H., *Filosofía de la matemática y de la ciencia natural*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1965.

Whitehead, A. N., y B. Russell, *Principia Mathematica* (2ª ed., 3 vols.), Cambridge: Cambridge University Press, 1925–1927 (reimp. 1973).

Whitehead, A. N., y B. Russell, *Principia Mathematica: hasta el *56*, Madrid: Paraninfo, 1981.

Wilson, M. *Innovation and Certainty*, Cambridge: Cambridge University Press, 2021.

Wittgenstein, L., *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*, Madrid: Alianza, 1987.

Wittgenstein, L., *Investigaciones filosóficas*, Barcelona: Crítica, 1988 (ed. bilingüe alemán-español).

Wittgenstein, L., *Gramática filosófica*, México D.F.: Universidad Nacional Autónoma de México, 1992.

Wittgenstein, L., *Ocasiones filosóficas*, Madrid: Cátedra, 1997.

Wittgenstein, L., *Tractatus Logico-Philosophicus*, Madrid: Tecnos, 2002 (también disponible con otras dos traducciones distintas, de peor calidad pero ambas en ed. bilingüe alemán-español: la de Madrid: Revista de Occidente, 1957, reimp. en Madrid: Alianza, 1980, y la de Madrid: Alianza, 1987).

Wright, C., *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, Londres: Duckworth, 1980 (reimp. en Aldershot (Hampshire): Ashgate, 1994).

Wright, C., *Frege's Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen: Aberdeen University Press, 1983.

Índice general