Manual del curso

LÓGICA FORMAL 1

Lógica proposicional

GUSTAVO PICAZO

DISPONIBLE EN:
`webs.um.es/picazo`

Univ. de Murcia – Curso 25.26

1ª ed., Versión 2 (07.09.2025)

Versión 2, con modificaciones en **§ 1.10** sobre la versión anterior.

Índice de temas

Agradecimiento: Agradezco a José Ángel Gascón Salvador y Samuel Cuello Muñoz su lectura atenta de este manual, y sus numerosas sugerencias de mejora.

Tema 1

Organización de la asignatura

§ 1.1. DOCENCIA

Las clases de esta asignatura serán de tres tipos:

- **Temas**: consistirán en leer uno de los temas del manual, y contestar por escrito a las cuestiones que figuran al final del mismo. Para ello, **cada estudiante deberá traer consigo papel y boli, así como este manual, ya sea en papel o en un dispositivo (en pdf)**.
- **Controles**: tendrán lugar en las **clases prácticas**, y consistirán en evaluaciones de una parte de la materia.
- **Juntas**: consistirán en un debate abierto y puesta en común (en forma de *asamblea*), bajo la moderación del profesor.

Algunos temas se realizarán en grupos de dos personas (pero sin repetir pareja a lo largo del cuatrimestre). El resto, se realizará de forma individual.

Los controles se realizarán todos de forma individual y *sin ningún material de apoyo.*

Las respuestas recibidas en clase a los temas y controles se colgarán en la carpeta de *Recursos* del sitio web de esta asignatura en el *Aula virtual*. Quien no desee que aparezca su nombre en estos ejercicios, o en las tablas de calificaciones, puede acordar con el profesor el uso de un **apodo** (o *nickname*), como por ejemplo "Mozart".

§ 1.2. CRONOGRAMA

En la misma carpeta de *Recursos* del *Aula virtual*, se encontrará también un **Cronograma docente** (abreviadamente, **"Crono"**), con el detalle de todas las fechas y datos relevantes.

Dicho documento está disponible también para su libre descarga en:

`webs.um.es/picazo`

§ 1.3. EVALUACIÓN

La evaluación de esta asignatura se realizará de la siguiente manera:

- **Temas**: están planificados 24 temas, que se valorarán sobre 0,12 puntos cada uno, hasta un máximo de 2,88 puntos.
- **Controles**: están planificados 10 controles, que se valorarán sobre 0,3 puntos cada uno, hasta un máximo de 3 puntos.
- **Tutorías**: la realización de una tutoría (en cualquier momento del cuatrimestre) se valorará sobre 0,12 puntos. Se realizará con Gustavo Picazo, en la Planta 3 del Edificio Luis Vives, Despacho 3.065, y se podrá asistir en compañía.

- **Examen**: el examen final se valorará sobre 4 puntos. Junto al examen, se podrá realizar opcionalmente un **Anexo**, para subir la nota obtenida en temas, controles y tutorías. Hacia la mitad del cuatrimestre, se publicará un *Modelo de examen* (junto con su *Anexo*), para dar idea del tipo de preguntas y el nivel de dificultad.

Las **juntas** no se evalúan: ni la asistencia ni la participación en las juntas repercuten en la calificación de manera alguna.

En función de las puntuaciones que se acaban de indicar, **es posible superar esta asignatura hasta con 6 puntos, sin presentarse al examen**.

Y *también es posible obtener la máxima calificación en esta asignatura, sin realizar ningún tema, ni control, ni tutoría*: para ello, hay que contar con la exención del departamento (véase a continuación), y obtener la máxima calificación en el examen y su anexo.

§ 1.4. EXENCIÓN DE ASISTENCIA

La asistencia a las clases prácticas (es decir, a los controles) es obligatoria. Si alguien no asiste al menos a un 70 % de estas clases, no tiene derecho a superar la asignatura. La asistencia al resto de clases (es decir, a los temas y a las juntas) es opcional.

Quien no pueda asistir a las clases prácticas por motivos justificados, deberá **pedir la exención de asistencia al Departamento de Filosofía**. Para ello, se dirigirá a la administrativa del departamento, María Dolores Gómez Giménez ("Maruja", en la Planta 0 del Edificio Luis Vives, Despacho 0.030).

Quien obtenga dicha exención, podrá entregar online las cuestiones de los temas, y tareas sustitutivas a los controles, en la herramienta de *Tareas* del Aula virtual.

Si alguien tiene motivos justificados para faltar a un tema o control *de manera puntual, en relación a un día en concreto*, puede comunicarlo a Gustavo Picazo (en persona, o por email a `picazo@um.es`). El profesor, a la vista de las circunstancias, decidirá si autoriza la realización online en ese caso puntual.

Quien no asista a un tema o control, y no tenga la exención del departamento ni la autorización del profesor, no podrá realizarlo de forma online. Si alguien hace la entrega online sin autorización, no se le valorará.

§ 1.5. MEDITACIÓN

En algunos descansos entre clase y clase, realizaremos una iniciación a la meditación (opcional, solo para quien quiera quedarse). Sobre esta práctica, pueden consultarse:

- "The neuroscience of mindfulness meditation" (*Nature*, 2015).
- *Los beneficios de la meditación* (Daniel Goleman y Richard Davidson, 2017).
- *Kairos zen* (Gustavo Picazo, 2018).
- *Introducción al zen* (Alexander Poraj-Zakiej, 2025).

§ 1.6. AUTOCONCEPTO, ACTITUD Y RENDIMIENTO

Tras muchos años dando clase, he llegado al convencimiento de que todes les estudiantes que he tenido poseían el mismo nivel de inteligencia, e incluso el mismo nivel de inteligencia para la filosofía y para la lógica: lo único que les separaba era su propia actitud y su propio autoconcepto.

El autoconcepto es un elemento muy poderoso en la vida de las personas. Un autoconcepto bajo de mí mismo hace que disminuya mi motivación ("no voy a ser capaz de hacerlo"); la escasa motivación hace que mi actitud sea poco aplicada ("para qué le voy a echar horas, si no servirá de nada"); la falta de trabajo hace que disminuya mi rendimiento, y el poco rendimiento me lleva a la obtención de bajos resultados.

Por último, los bajos resultados redundan en un juicio externo negativo, que a su vez refuerza mi bajo autoconcepto:

$$\begin{array}{ccccc} \textit{juicio externo} & \rightarrow & \textit{autoconcepto} & \rightarrow & \textit{motivación} \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \textit{resultado} & \leftarrow & \textit{rendimiento} & \leftarrow & \textit{actitud} \end{array}$$

También una autoestima excesiva puede minar mis posibilidades de éxito. Por ejemplo, si yo me creo tan genial que no necesito trabajar para aprender cosas nuevas, ello me puede perjudicar seriamente.

Sobre todo esto, se puede consultar mi curso de *Metodología de la investigación filosófica* (pág. 12 y siguientes). Dicho manual está disponible para libre descarga en

`webs.um.es/picazo`

§ 1.7. PATRONES DE DESIGUALDAD

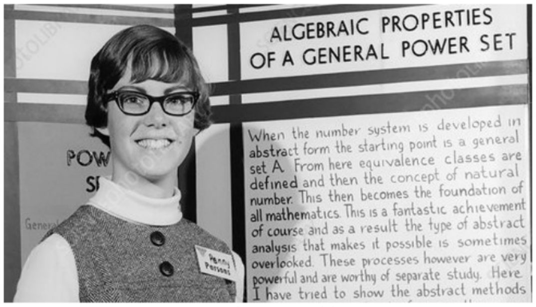
La lógica formal, como todas las disciplinas académicas, está atravesada por varios patrones de desigualdad. **No todas las personas que viven en una misma época tienen las mismas oportunidades de contribuir relevantemente a la producción de conocimiento**.

El género es uno de los patrones de desigualdad más visibles. Otros son la etnicidad, el lugar de nacimiento y el origen cultural y socioeconómico.

En este manual, he optado por el uso de un lenguaje neutro, con preferencia por la terminación en "-e".

He aquí algunas mujeres que han contribuido recientemente a la lógica y los fundamentos de la matemática:

Kati Kish Bar-On (Massachusetts Institute of Technology)

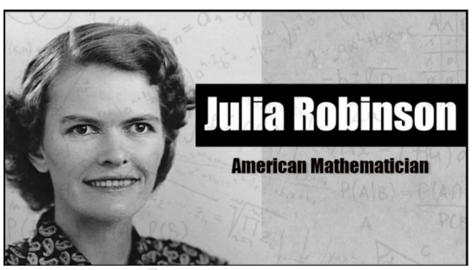


Penelope Maddy
(Univ. of California, Irvine)

María Cerezo
(Univ. Complutense de Madrid)

Kristie Miller
(University of Sydney)

Pilar Beltrán
(Universidad RJC)



Julia Robinson
(Univ. of California, Berkeley)

María Manzano
(Univ. de Salamanca)

Ruth Barcan Marcus
(Yale University)

Susan Haack (Univ. of Miami)

§ 1.8. RECOMENDACIÓN SOBRE EL EMAIL Y EL AULA VIRTUAL

Si no consultas regularmente tu email UMU, es recomendable que configures tu gestor de correo habitual, para que importe el correo UMU y te lo muestre allí. Así estarás al tanto de los correos que te llegan a tu cuenta "...@um.es".

Por las mismas razones, una vez que tengas acceso al *Aula virtual*, es recomendable que vayas a *Mi Sitio > Preferencias*, y actives las opciones de *Notificaciones*.

§ 1.9. ADVERTENCIA SOBRE EL MÁSTER DE PROFESORADO

Para poder enseñar Filosofía en la Educación Secundaria, tanto en centros públicos como privados, no basta con terminar el grado: es obligatorio cursar, a continuación, el *Máster de Formación del Profesorado*.

Ahora bien, las universidades públicas (incluida la UMU) ofertan bastantes menos plazas de este máster, que personas se han graduado el año anterior. Esto ocurre tanto en Filosofía como en el resto de especialidades.

Ello obliga muches estudiantes a cursar dicho máster en universidades privadas. En todo caso, para maximizar las opciones de obtener plaza en este máster en la UMU, conviene hacer la preinscripción *"en primera fase"*. Para ello, hay que defender el TFG en la primera convocatoria disponible, o bien dejar un año en blanco tras terminar el grado, para preinscribirse en el máster en primera fase al curso siguiente.

§ 1.10. ADVERTENCIA EXTRACURRICULAR

En la Versión 1 de este manual, hacía aquí una advertencia sobre el acoso sexual, que el Sr. Decano de la Facultad de Filosofía me ha obligado a retirar.

§ 1.11. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.

1. En esta asignatura, ¿hay alguna parte del trabajo en el aula que se realice en grupo? Explica los detalles.
2. Indica qué material debes traer contigo a los temas, controles y juntas.
3. ¿Para qué sirve el uso de un apodo, en esta asignatura?
4. Suma las puntuaciones máximas que se pueden obtener por temas, controles, tutoría y examen, e indica el total obtenido.
5. Explica en qué consiste el "anexo" del examen final, y cómo se puntúa.
6. Indica quién puede entregar un tema online, o realizar la tarea sustitutiva a un control. A continuación, indica en qué consiste dicha tarea sustitutiva, y dónde se hacen estas entregas.
7. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:
    a) Explica qué parte de la filosofía te interesa más en este momento, y por qué.
    b) Escribe tu opinión sobre cualquier aspecto de este tema que hayan llamado tu atención.

Tema 2

El estudio de los argumentos

§ 2.0. ADVERTENCIAS PRELIMINARES

1. **Grietas**. Todo el conocimiento humano, incluida la ciencia, contiene *"grietas"* (es decir, cosas que no terminan de estar claras, y que con el tiempo se van ajustando), así como *errores* (cosas que se afirman durante un tiempo, pero se acaban rechazando después). Ello afecta incluso a las matemáticas y a la lógica, y en particular a los contenidos de este manual. Por todo ello, y porque el autor de este manual también es persona, y se ha podido equivocar, ninguna de las afirmaciones que aquí se contienen se debe tomar como una verdad indiscutible.

2. **Formato facilitado**. Además, hay que tener en cuenta que la exposición de contenidos en este manual se realiza a un nivel *introductorio* (sumamente facilitado), en contraste con lo que aparece en textos de *lógica avanzada*.

3. **Variaciones**. Por último, también hay que tener en cuenta que existe mucha variabilidad en los textos de lógica, en cuanto a la *notación*, *terminología* y *enfoque*. Así por ejemplo, en la elección de los símbolos lógicos, los sistemas deductivos y otros muchos

detalles. Conviene tener esto presente a la hora de consultar otras exposiciones de esta materia.

§ 2.1. LA ARGUMENTACIÓN HUMANA EN DISTINTOS ÁMBITOS

Argumentar es dar razones en favor de una creencia o una acción.

Las personas argumentamos en distintos ámbitos, desde la *vida cotidiana* hasta el *conocimiento científico*, pasando por las *investigaciones policiales* y muchas otras cosas.

Un ejemplo de argumento perteneciente a la vida cotidiana es:

Compra kiwis, que han bajado de precio. (1)

Un ejemplo de argumento científico es:

La desviación del perihelio de Mercurio
confirma la teoría general de la relatividad. (2)

Un ejemplo de argumento policíaco es:

El arma estaba en su poder. Y no tiene coartada.
Por lo tanto, es culpable. (3)

§ 2.2. ESTRUCTURA ARGUMENTAL

La mayoría de los argumentos tienen **premisas** y **conclusión**. La conclusión es aquella creencia o acción que el argumento trata de respaldar. Y las premisas conforman las razones que se dan en favor de esa conclusión.

Aquí conviene hacer tres aclaraciones:

- Hablamos genéricamente de *"las premisas"* de un argumento, aunque solo tenga una.
- Al formular un argumento, hay veces en que la conclusión aparece detrás de las premisas, y hay veces en que aparece delante.
- Hay algunos argumentos, un tanto excepcionales, que no tienen premisas. Veremos nuestro primer ejemplo en **§ 12.8** (hasta entonces, no debemos preocuparnos por ellos).

El argumento (1) ejemplifica los dos primeros puntos:

Compra kiwis, que han bajado de precio.

En efecto, este argumento te intenta convencer de que compres kiwis (te intenta convencer de esa acción). Por lo tanto, su conclusión es:

Compra kiwis.

Y su premisa, obviamente, es:

[Los kiwis] han bajado de precio

puesto que esa es la razón que da el argumento, para comprar kiwis.

Por consiguiente, (1) es un argumento *con una sola premisa*, y está formulado de tal manera que *la conclusión aparece delante, y la premisa detrás.*

Examinemos ahora la estructura del argumento (2):

La desviación del perihelio de Mercurio
confirma la teoría general de la relatividad.

Este argumento también tiene una sola premisa: *La desviación del perihelio de Mercurio* (o mejor dicho: *El hecho de que la órbita de Mercurio tenga una determinada desviación en su perihelio*).

A su vez, la conclusión del argumento (2) es la teoría general de la relatividad, publicada por Einstein en 1915.

Por consiguiente, el argumento (2) también consta de una sola premisa, pero en esta ocasión aparece *antes* de la conclusión.

Por último, examinemos la estructura del argumento (3):

El arma estaba en su poder. Y no tiene coartada.
Por lo tanto, es culpable.

En este caso, el argumento tiene dos premisas. La primera premisa es: *El arma estaba en su poder.* La segunda premisa es: *No tiene coartada.* Y la conclusión que se extrae de esas dos premisas, y que aparece a continuación de las mismas, es: *Es culpable.*

§ 2.3. TIPOS DE ARGUMENTOS

A los argumentos cuya conclusión es una creencia (una proposición) se les llama **"argumentos teóricos"**. A los argumentos cuya conclusión es una acción se les llama **"argumentos prácticos"**. De los tres ejemplos que acabamos de ver, el argumento (1) es práctico, mientras que los argumentos (2) y (3) son teóricos.

De entre los argumentos teóricos, la lógica formal centra su atención en un grupo muy especial, que son los llamados **"argumentos deductivos"** (también conocidos como **"razonamientos deductivos"** o **"inferencias deductivas"**). Estos argumentos se caracterizan porque *es imposible que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa.*

Dicho de otro modo:

> **Un argumento deductivo es aquel en el cual, suponiendo que las premisas sean verdaderas, la conclusión ha de ser necesariamente verdadera.**

Ninguno de los dos argumentos teóricos que acabamos de ver es deductivo. En efecto, aunque la desviación del perihelio de Mercurio hace bastante probable la teoría general de la relatividad, no implica que sea verdadera necesariamente: existe una posibilidad (aunque pequeña) de que la órbita de Mercurio tenga esa desviación por otras razones, y que la teoría general de la relatividad sea falsa.

Igualmente, el hecho de que alguien tenga el arma del crimen y carezca de coartada, no implica necesariamente que sea culpable: podría ser casualidad, o una trampa.

Un ejemplo de argumento deductivo es el siguiente:

Llueve y hace frío. Por lo tanto, hace frío.

En este caso, la premisa es: *Llueve y hace frío.* Y la conclusión es: *Hace frío.* Pues bien, en este caso, a diferencia de los anteriores, la conclusión se deriva necesariamente de la premisa: no hay resquicio de posibilidad a que la premisa sea verdadera y la conclusión falsa.

A los argumentos teóricos que *no* son deductivos, se les llama a veces *"argumentos probables"*, *"argumentos rebatibles"*, o directamente *"argumentos no deductivos"*.

§ 2.4. EL ESTUDIO DE LOS ARGUMENTOS

El estudio sistemático de la argumentación humana es muy antiguo, se remonta a Aristóteles. En efecto, Aristóteles elaboró la primera gran teoría sobre la lógica deductiva (la *silogística*) y analizó minuciosamente muchas otras formas de argumentar.

En 1º Curso del *Grado en Filosofía* de la UMU, hay una asignatura dedicada al estudio de la argumentación en su conjunto: la **Teoría de la argumentación**, que se imparte en el 2º Cuatrimestre. Y también tenemos esta asignatura (**Lógica formal 1**) y su pareja (**Lógica formal 2**, en el 2º Cuatrimestre), dedicadas al estudio de los argumentos deductivos.

Además, a lo largo del Grado hay asignaturas dedicadas a la *Teoría del conocimiento* y la *Epistemología*, donde se estudia el conocimiento cotidiano (o "conocimiento ordinario") y la argumentación en ese contexto. También hay asignaturas sobre *Ética*, *Estética* y *Filosofía política*, que son relevantes para la argumentación en cada uno de esos ámbitos. Y por último, hay asignaturas dedicadas a la *Filosofía de la ciencia*, donde se aborda la argumentación científica (por ejemplo, a la hora de defender qué teoría explica mejor la evidencia, o está mejor respaldada por ella).

En cuanto al estudio de la argumentación en otros ámbitos (como el ámbito jurídico o el ámbito comercial) se aborda en otros grados que ofrece la UMU, así como en infinidad de libros y documentos que se pueden encontrar en bibliotecas y en internet.

§ 2.5. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Pon un ejemplo de argumento práctico. A continuación, indica cuál es su estructura en premisas y conclusión, así como el ámbito al que pertenece.

2. Pon dos ejemplos de argumentos teóricos no deductivos. Para cada uno de ellos, indica cual es su estructura y el ámbito al que pertenece.

3. Pon dos ejemplos de argumentos deductivos. A continuación, indica cuál es la estructura de cada uno de ellos, y en qué ámbito se podría utilizar, si se te ocurre alguno.

4. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Explica qué parte de la argumentación humana te interesa más en este momento, y por qué.

   b) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.

   c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

Tema 3

Panorama de la lógica formal y de la asignatura

§ 3.0. ADVERTENCIAS PRELIMINARES

1. **Grietas**. Todo el conocimiento humano, incluida la ciencia, contiene *"grietas"* (es decir, cosas que no terminan de estar claras, y que con el tiempo se van ajustando), así como *errores* (cosas que se afirman durante un tiempo, pero se acaban rechazando después). Ello afecta incluso a las matemáticas y a la lógica, y en particular a los contenidos de este manual. Por todo ello, y porque el autor de este manual también es persona, y se ha podido equivocar, ninguna de las afirmaciones que aquí se contienen se debe tomar como una verdad indiscutible.

2. **Formato facilitado**. Además, hay que tener en cuenta que la exposición de contenidos en este manual se realiza a un nivel *introductorio* (sumamente facilitado), en contraste con lo que aparece en textos de *lógica avanzada*.

3. **Variaciones**. Por último, también hay que tener en cuenta que existe mucha variabilidad en los textos de lógica, en cuanto a la

notación, *terminología* y *enfoque*. Así por ejemplo, en la elección de los símbolos lógicos, los sistemas deductivos y otros muchos detalles. Conviene tener esto presente a la hora de consultar otras exposiciones de esta materia.

§ 3.1. LA LÓGICA Y LAS MATEMÁTICAS

Como explicamos en el tema anterior, la característica definitoria del razonamiento deductivo es que si las premisas son verdaderas, la conclusión ha de ser necesariamente verdadera. Esto se resume a veces diciendo que **"en el razonamiento deductivo, la conclusión está contenida en las premisas"**.

Por esta razón, el razonamiento deductivo resulta mucho más *firme* que el razonamiento no deductivo; pero por eso mismo, también resulta mucho menos *útil*, en términos generales. Ahora bien, hay un ámbito del discurso humano en el cual el razonamiento deductivo es tan importante o más que el razonamiento no deductivo: **las matemáticas**.

Ello explica el interés que se ha suscitado históricamente, en matemáticas, hacia el estudio del razonamiento deductivo. De hecho, la obra *"fundacional"* de la lógica formal (es decir, la obra en la que se sientan las bases de esta disciplina, tal y como la conocemos ahora) fue escrita por un matemático, Gottlob Frege. Dicha obra se titula *Begriffsschrift* (*Conceptografía*) y fue publicada en 1879.

Una de las innovaciones de la *Conceptografía* fue la introducción de un *lenguaje lógico-formal* para la representación del razonamiento deductivo. Ello dio pie al uso de todo un **aparataje matemático**, asociado a ese nuevo lenguaje, para avanzar en el estudio de este tipo de razonamiento.

Así se explica que a la nueva disciplina, surgida de la aportación de Frege y otres pensadores, se le llame **"lógica formal"** (así como **"lógica moderna"**, **"lógica simbólica"** y **"lógica matemática"**). Por contraste, a la lógica anterior se la conoce como **"lógica tradicional"**, y consiste básicamente en la silogística de Aristóteles, aderezada con algunas contribuciones posteriores.

§ 3.2. LÓGICA, FILOSOFÍA Y OTRAS DISCIPLINAS

Además de ser de interés para las matemáticas, la lógica formal también ha suscitado atención desde la lingüística. De hecho, las técnicas de análisis sintáctico están inspiradas, en parte, en los procedimientos de la nueva lógica. Y también ha suscitado interés en las llamadas "ciencias de la computación" (esto es, la *informática*), cuyo origen está ligado a la lógica formal, y con la que mantiene varios puntos de contacto.

Ahora bien, donde más representada se encuentra la lógica, en cuanto a profesorado especializado y presencia en los estudios universitarios, es sin duda en los departamentos de Filosofía.

Dentro de la filosofía, la lógica es objeto de atención especialmente en la corriente denominada *"filosofía analítica"*.

Y dentro de esa corriente, la lógica formal se ha utilizado, en particular, en *filosofía del lenguaje*, como herramienta para ayudar a representar el significado en el lenguaje natural. También se ha usado en *filosofía general de la ciencia*, para ayudar a representar las teorías científicas, así como los mecanismos de confirmación respecto a la evidencia disponible — entre otras cosas. Y es vital en *filosofía de la matemática*, como instrumento para analizar las características ontológicas, epistemológicas y semánticas de la ciencia matemática.

Por último, también se suele encontrar una referencia a la lógica formal dentro de la *teoría de la argumentación* (de la que ya hemos hablado), puesto que el razonamiento deductivo es parte del razonamiento humano, y puede aparecer en un intercambio argumentativo en cualquier momento.

§ 3.3. LENGUAJES FORMALES

Como hemos dicho en **§ 3.1** , una de las principales herramientas que utiliza la lógica moderna para analizar los razonamientos deductivos son los llamados *"lenguajes formales"*.

Un **lenguaje formal** es un *lenguaje artificial*, cuyo *alfabeto* y *sintaxis* se pueden especificar completamente sin hacer referencia a ninguna interpretación suya.

Esto significa que, antes de empezar a utilizar ese lenguaje, tenemos que estar en condiciones de indicar exactamente:

1. Cuáles son los *símbolos básicos* que contiene ese lenguaje (a lo cual llamamos su **"alfabeto"**).
2. Cuáles son las *reglas* mediante las cuales se pueden combinar esos símbolos, para dar lugar a expresiones más complejas. Dichas reglas constituyen la **sintaxis** de ese lenguaje.

Así por ejemplo, los *lenguajes de programación* son lenguajes formales en este sentido. En efecto, para escribir un programa informático en un lenguaje de programación, tenemos que ajustarnos estrictamente a los símbolos y cadenas de símbolos aceptadas en ese lenguaje. Si escribimos un código con símbolos ajenos a ese lenguaje, o formamos cadenas de símbolos que no están permitidas, el programa no funcionará.

Pues bien, dicho esto, vamos a convenir en que a partir de este momento, cuando hablemos de "formalización" a secas (y más aún si hablamos de *"formalización propiamente dicha"* o **"formalización completa"**), nos estaremos refiriendo al uso de un lenguaje formal con las características que acabamos de describir. Es importante recordarlo.

§ 3.4. EL LENGUAJE NATURAL

Por el contrario, **en los lenguajes naturales** (es decir, el castellano, el inglés, etc), **la aplicación de las reglas sintácticas exige conocer el significado de las oraciones**.

Así por ejemplo, en:

El trofeo no cabía en el maletín, porque era muy voluminoso. (1)

lo *voluminoso* es "el trofeo" (el sujeto de *"era"* es "el trofeo").

Mientras que en:

El trofeo no cabía en el maletín, porque era muy pequeño. (2)

lo *pequeño* es "el maletín" (en (2), el sujeto de *"era"* es "el maletín").

Esto nos resulta obvio, porque sabemos qué son los trofeos y los maletines, qué se mete dentro de qué, y cómo influye el tamaño para que uno quepa o no quepa en el otro.

En la misma línea, si en vez de un trofeo estuviésemos hablando de una estatuilla, entonces tendríamos que decir que *"la estatuilla no cabía en el maletín porque era muy voluminos**a**"* (ella, la estatuilla); pero podríamos seguir diciendo que *"la estatuilla no cabía en el maletín porque era muy pequeñ**o**"* (ya que en esta última frase, lo pequeño es el maletín; por eso tiene sentido decir que la estatuilla no cabe).

Todo esto ilustra el hecho de que para manejar la estructura sintáctica de las oraciones — es decir, para maniobrar correctamente las relaciones de dependencia y concordancia entre sus elementos — necesitamos información que va más allá de la sintaxis: necesitamos información de carácter semántico o fáctico.

Y esto que ocurre con (1) y (2) no es una excepción. En general, la sintaxis del lenguaje natural está *"impregnada de semántica"*: de ahí la radical diferencia que existe entre los lenguajes naturales y los lenguajes formales.

§ 3.5. PANORAMA DE LA ASIGNATURA

Como dijimos en el tema anterior, en el *Grado en Filosofía* de la UMU hay dos asignaturas dedicadas al estudio de la lógica deductiva:

- **Lógica formal 1** (la cual abreviaremos poniendo **"logfor1"**).
- **Lógica formal 2** (la cual abreviaremos poniendo **"logfor2"**).

En esta primera asignatura (*logfor1*), vamos a centrar nuestra atención en un lenguaje formal en concreto, el llamado **"lenguaje de la lógica proposicional clásica"**. Pues bien, introduciremos dicho lenguaje en los temas 4–6, y a continuación, definiremos una forma de interpretarlo — la semántica veritativo-funcional — a la cual dedicaremos los temas 7 y 8.

Una vez hecho eso, abordaremos la capacidad de nuestro lenguaje formal para representar la estructura lógica de algunas proposiciones en castellano. A ello dedicaremos los temas 9 y 10.

A continuación, exploraremos tres sistemas deductivos distintos, que nos ayudarán a modelar, cada uno a su manera, la estructura de la argumentación deductiva. A ello dedicaremos los temas 11–23.

Por último, dedicaremos el tema 24 a analizar otras teorías de lógica formal (las llamadas *"lógicas no clásicas"*), que se han propuesto en competencia con la lógica proposicional estándar. Y también haremos una breve incursión en la inteligencia artificial, abordando las úlimas estrategias de computación, mediante las que se consigue emular el razonamiento deductivo humano — y tantas otras habilidades intelectuales — de forma notable.

§ 3.6. PANORAMA DE LA LÓGICA FORMAL

Como hemos indicado en **§ 2.0** y **§ 3.0** , lo que asomará en este manual de la lógica como disciplina será muy poco (la punta del iceberg, o menos que eso). Quien quiera adentrarse a fondo en el estudio de la lógica, deberá profundizar en las siguientes materias:

- *Teoría de modelos*: estudio de las interpretaciones de los lenguajes lógico-formales, así como de las consecuencias matemáticas que se derivan de ellas.
- *Teoría de la prueba*: estudio de los cálculos deductivos y sus propiedades.

- *Teoría de la recursión* (o *teoría de la computabilidad*): estudio de la noción de *algoritmo* (o *procedimiento mecánico*) y sus propiedades.

- *Teoría de conjuntos*: estudio de la noción de conjunto y la relación de pertenencia, cuyas consecuencias son asombrosas e inesperadas.

- *Teoría de categorías*: estudio de la relación entre estructuras matemáticas de diferentes campos.

Todas estas disciplinas — junto con la *filosofía de la matemática*, de la que ya hemos hablado — conforman el área de *fundamentos de la matemática*.

Además, hay que mencionar el campo de las *lógicas no clásicas*, que también acabamos de mencionar, y que exploran sistemas distintos al de la lógica clásica — y derivan en su propia teoría de modelos, sus propios cálculos deductivos, etc.

Y por último, hay que mencionar el campo de la *filosofía de la lógica*, donde se abordan las diferencias entre unos sistemas y otros, así como su capacidad para formalizar adecuadamente el razonamiento deductivo en lenguaje natural, o para dar respuestas a problemas diversos.

Cualquiera de estas disciplinas cuenta con manuales densos y voluminosos, y con una bibliografía ingente. En particular, el profesor de esta asignatura tiene escritos manuales universitarios de:

- *Lógica avanzada*

- *Teoría de conjuntos*

- *Filosofía de la matemática*
- *Semántica de la lógica intuicionista*
- *Metodología de la investigación filosófica*

Todos ellos están disponibles para su libre descarga en:

`webs.um.es/picazo`

§ 3.7. ¿ES CIERTO QUE "LA FILOSOFÍA AYUDA A PENSAR" Y "LA LÓGICA AYUDA A RAZONAR"?

Una idea muy repetida en el gremio de la filosofía académica, en España y otros países, es que *"La filosofía ayuda a pensar"*.

Sin embargo, yo nunca he visto esa idea concretarse en algo tangible. Y no conozco ningún estudio que demuestre que la filosofía que se enseña en España — especialmente cuando se centra en la historia y la interpretación de autores — *ayude a pensar*, más de lo que pueda ayudar el aprendizaje de cualquier otra disciplina académica.

En mi opinión, esa frase es un mero eslogan, tan falso como interesado. Es decir, se trata de **publicidad engañosa**, lanzada interesadamente desde el gremio de la filosofía académica.

Más bien al contrario, yo pienso que la afirmación de que *"La filosofía ayuda a pensar"* se desmiente a sí misma, precisamente por el poco espíritu crítico con el que es acogida por la comunidad de la filosofía académica — sin que casi nadie la ponga en cuestión, o se pregunte cómo sabemos que es cierta, más allá de que nos interesa que la gente se lo crea.

Pues bien, desde el gremio de la lógica formal se maneja a veces un eslogan parecido, según el cual *"El estudio de la lógica ayuda a razonar"*. Sin embargo, en todos mis años de carrera, yo no he conocido un solo caso de alguien que haya necesitado formalizar un argumento (en el sentido especificado en **§ 3.3**), para poder aclararse con el mismo.

Es por eso que, en mi opinión, la lógica formal tiene un interés fundamentalmente **teórico**, como forma de representación abstracta de esa habilidad humana que llamamos "razonamiento deductivo". Pero **no es útil en la práctica**, ni para entrenar nuestra habilidad mental con el razonamiento deductivo, ni para ayudarnos a lidiar con razonamientos deductivos complejos.

En función de este enfoque, los ejercicios de este manual son más sencillos que los de otros manuales de introducción a la lógica. He procurado evitar derivaciones o formalizaciones excesivamente complicadas, bajo el entendimiento de que el dominio las técnicas que aporta esta disciplina es importante, pero lo más importante es la comprensión de la base conceptual.

§ 3.8. LENGUAJES SEMI-FORMALES

En este punto, conviene hacer la siguiente aclaración. Donde quiera que abordamos razonamientos complejos, es habitual utilizar términos técnicos, símbolos especiales y diagramas, para comunicar nuestras ideas. Las matemáticas, y la ciencia en general, están llenas de estos recursos.

Sin embargo, tal lenguaje simbólico se introduce por lo general *de manera espontánea*, *sin seguir reglas fijas*, y *ligado a una comprensión* *intuitiva de lo que estamos representando*. Por lo tanto, **no constituye una formalización completa** en el sentido explicado en § **3.3** .

Las matemáticas, así como la ciencia y la tecnología en general, usan lenguajes **semi-formales**, es decir: utilizan una profusión de símbolos y términos técnicos, pero no se expresan casi nunca — salvo raras excepciones — en un lenguaje completamente formalizado.

De hecho, ni siquiera a la hora de resolver los típicos "acertijos de lógica" que aparecen en las revistas de pasatiempos, facilitamos la tarea realizando una formalización completa. En todo caso, lo que suele ayudar a resolver tales acertijos es la realización del tipo de **diagramas espontáneos** (con una **interpretación sobrentendida**), a los que nos acabamos de referir.

§ 3.9. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Describe un escenario argumental concreto, en el que sea relevante el razonamiento deductivo (por ejemplo, el ámbito jurídico, u otro que tú elijas, pero distinto a las matemáticas).
2. Indica, si lo conoces, algún otro ejemplo de lenguaje formal, distinto a los lenguajes lógicos y los lenguajes de programación.
3. Indica, si se te ocurre, algún otro caso que ilustre la imbricación entre sintaxis y semántica en el lenguaje natural (por ejemplo, la ambigüedad de una palabra que pueda funcionar como verbo o como sustantivo, dependiendo del contexto).
4. Suponiendo, como se afirma en el tema, que el estudio de la lógica formal no ayude a mejorar nuestra habilidad para manejarnos con

el razonamiento deductivo, ¿qué otro estudio, o actividad podría ayudar?

5. Si te sobra tiempo, responde razonadamente a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

    a) ¿Consideras que hay personas especialmente capacitadas, desde la infancia, para aprender matemáticas (o dibujo, idiomas, etc); o bien, todo depende de nuestra propia actitud y nuestro propio autoconcepto (es decir, de la intensidad con que nos empleamos en aprender cualquiera de esas cosas)?

    b) Ordena estas cuatro materias, de la más necesaria a la menos necesaria para el Grado en Filosofía, en tu opinión: *Lógica formal*, *Historia del arte contemporáneo*, *Filosofía oriental*, *Filosofía de la inteligencia artificial*.

    c) Expresa tu opinión razonada sobre el eslogan *"La filosofía ayuda a pensar"*, coincida o no con la opinión expresada en el tema por el profesor de la asignatura.

Tema 4

Sintaxis de lenprop: el alfabeto y la definición de "fórmula"

§ 4.0. ADVERTENCIAS PRELIMINARES

1. **Grietas**. Todo el conocimiento humano, incluida la ciencia, contiene *"grietas"* (es decir, cosas que no terminan de estar claras, y que con el tiempo se van ajustando), así como *errores* (cosas que se afirman durante un tiempo, pero se acaban rechazando después). Ello afecta incluso a las matemáticas y a la lógica, y en particular a los contenidos de este manual. Por todo ello, y porque el autor de este manual también es persona, y se ha podido equivocar, ninguna de las afirmaciones que aquí se contienen se debe tomar como una verdad indiscutible.

2. **Formato facilitado**. Además, hay que tener en cuenta que la exposición de contenidos en este manual se realiza a un nivel *introductorio* (sumamente facilitado), en contraste con lo que aparece en textos de *lógica avanzada*.

3. **Variaciones**. Por último, también hay que tener en cuenta que existe mucha variabilidad en los textos de lógica, en cuanto a la

notación, *terminología* y *enfoque*. Así por ejemplo, en la elección de los símbolos lógicos, los sistemas deductivos y otros muchos detalles. Conviene tener esto presente a la hora de consultar otras exposiciones de esta materia.

§ 4.1. EL LENGUAJE DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL CLÁSICA. LENGUAJE OBJETO Y METALENGUAJE

En este tema, vamos a presentar el lenguaje formal con el que trabajaremos en el presente curso, que es el **lenguaje de la lógica proposicional clásica** (abreviadamente, **lenprop**).

A este lenguaje lo vamos a llamar **"lenguaje objeto"**, porque va a constituir uno de nuestros principales objetos de atención durante el presente curso.

Por contraste, al lenguaje que utilizamos para hablar de ese lenguaje lo llamaremos **"metalenguaje"**. Así pues, nuestro metalenguaje será el castellano, enriquecido con todos los términos técnicos y simbolismos que vayamos introduciendo a lo largo del curso.

§ 4.2. INVISIBILIDAD DE LOS SÍMBOLOS DE LENPROP

Una peculiaridad notable de lenprop, tal y como lo vamos a presentar aquí, es que **no vamos a ver sus símbolos en ningún momento**. De hecho, *no sabremos cómo son, y ello no tiene por qué ser motivo de preocupación.*

Lo único que requerimos es que haya un símbolo diferente para cada una de las funciones que vamos a describir, y que todos ellos tengan una forma reconocible a simple vista.

Entonces, lo que haremos para referirnos a los símbolos y las cadenas de símbolos de lenprop, será utilizar **nombres metalingüísticos** (es decir, **símbolos metalingüísticos**) para hablar de ellos. Esta estrategia nos ayudará a representar los símbolos y las cadenas de símbolos de lenprop con mayor rigor.

En particular, usaremos algunos símbolos metalingüísticos para denotar símbolos concretos de lenprop. Por ejemplo, uno de los símbolos más importantes de lenprop, como vamos a ver enseguida, es el **símbolo condicional**. Pues bien, en este manual representaremos el condicional mediante:

$$\rightarrow$$

Ello no significa que el símbolo condicional de lenprop tenga forma de flecha resaltada en malva, sino que *ese es el modo en que nos referiremos al símbolo condicional en el presente manual* — además de llamarle “símbolo condicional”.

También usaremos símbolos metalingüísticos para denotar símbolos genéricos, o cadenas de símbolos genéricas, de lenprop. Por ejemplo, con frecuencia usaremos el símbolo

$$A$$

para representar **una fórmula cualquiera de lenprop**.

Pues bien, en ese caso, A no denota un símbolo concreto de lenprop, ni una cadena concreta de símbolos de lenprop. En ese caso, A denota *cualquier cadena que cumpla con las condiciones para constituir una fórmula*. Enseguida veremos cuáles son esas condiciones.

De cualquier modo, si a alguien le incomoda la idea de no poder ver los símbolos de nuestro lenguaje objeto, y necesita representárselos visualmente en su mente, hay una solución muy sencilla. Basta con imaginarse que los símbolos de lenprop tienen la misma forma que los símbolos metalingüísticos que utilizamos para denotarlos. Así, podemos imaginar que el símbolo condicional realmente tiene forma de flecha resaltada en malva, y lo mismo con el resto de símbolos que vamos a ir introduciendo.

No hay ningún problema en imaginarse esto, siempre que recordemos que es una mera *estrategia heurística*. Estrictamente hablando, los símbolos de lenprop no están a la vista, y no sabemos cómo son.

§ 4.3. EL ALFABETO DE LENPROP

El lenguaje de la lógica proposicional, tal y como lo vamos a presentar en este curso, consta de tres tipos de símbolos: *símbolos proposicionales*, *conectivas* y *paréntesis*.

Los **símbolos proposicionales** (abreviadamente, **simprops**) son:

$p \qquad q \qquad r \qquad s \qquad t$

$p_1 \qquad p_2 \qquad p_3 \qquad \ldots$ (y así hasta el infinito)

Las **conectivas** son cinco:

- **El símbolo de negación**: $\neg$
- **El símbolo de conjunción**: $\wedge$
- **El símbolo de disyunción**: $\vee$

- **El símbolo condicional**: $\rightarrow$
- **El símbolo bicondicional**: $\leftrightarrow$

Y los **paréntesis** son dos:

- **El paréntesis izquierdo**: (
- **El paréntesis derecho**:)

A las conectivas las llamaremos **“símbolos lógicos”**, mientras que al resto de símbolos (es decir, a los símbolos proposicionales y a los paréntesis) los llamaremos **“símbolos no lógicos”** (o **“símbolos extra-lógicos”**).

§ 4.4. LA DEFINICIÓN DE FÓRMULA DE LENPROP

A continuación, introducimos otra definición clave en este curso, que es la noción de **fórmula** de nuestro lenguaje formal (abreviadamente, **fla**).

Dicha definición consta de seis **“cláusulas recursivas”**, así llamadas porque están imbricadas unas con otras, y su uso combinado da lugar a fórmulas más y más complejas.

1. Cualquier símbolo proposicional que aparezca solo, constituye una **fórmula atómica** (abreviadamente, **fla atóm**).
2. Si A es cualquier fórmula, entonces $\neg A$ es otra fórmula, llamada **“negación”**.

   A continuación, si A y B son cualesquiera fórmulas, entonces:

3. $(A \wedge B)$ es otra fórmula, llamada **"conjunción"**.

4. $(A \vee B)$ es otra fórmula, llamada **"disyunción"**.

5. $(A \to B)$ es otra fórmula, llamada **"condicional"**.

6. $(A \leftrightarrow B)$ es otra fórmula, llamada **"bicondicional"**.

§ 4.5. EJEMPLOS DE FÓRMULAS ATÓMICAS

Dada la definición anterior, son ejemplos de fórmulas atómicas de lenprop las expresiones:

$$p_5 \qquad t \qquad p_{27} \qquad s \qquad q \qquad p_{135}$$

Sin embargo, **no** es un ejemplo de fórmula atómica de lenprop la expresión:

$$\varnothing$$

ya que $\varnothing$ no denota ningún símbolo del alfabeto de lenprop.

Tampoco es un ejemplo de fórmula atómica de lenprop la expresión:

$$s_4$$

ya que s_4 tampoco forma parte del alfabeto de lenprop (de acuerdo con la definición **§ 4.3**, solo la letra p con subíndices denota símbolos proposicionales).

Y por último, *tampoco* son ejemplos de fórmulas atómicas de lenprop las expresiones

$$pp \qquad (p) \qquad p \to q$$

La razón es que en estas expresiones aparecen símbolos proposicionales de lenprop junto con otros símbolos del alfabeto, pero no aparece un símbolo proposicional solo.

§ 4.6. EJEMPLOS DE NEGACIONES

Por su parte, son ejemplos de negaciones de lenprop todas las expresiones siguientes:

$$\neg p_5 \qquad \neg p_{135} \qquad \neg t \qquad \neg\neg t \qquad \neg\neg\neg t$$

De la fórmula $\neg\neg t$ decimos que es una *"doble negación"* (y lo mismo con fórmulas similares). De la fórmula $\neg\neg\neg t$ decimos que es una *"triple negación"* (y lo mismo con fórmulas similares).

Otros ejemplos de negaciones de lenprop son las expresiones:

$$\neg(p \wedge s) \qquad \neg(q \vee q) \qquad \neg(q \leftrightarrow p_5)$$

Sin embargo, **no** son ejemplos de negaciones de lenprop las expresiones:

$$\neg \qquad \neg\neg \qquad \neg\varnothing$$

La razón es que el símbolo de negación tiene que ir *antepuesto a una fórmula*, y en estos tres casos no ocurre así: en el primer ejemplo, el símbolo de negación no va antepuesto a nada; y en los otros dos ejemplos, va antepuesto a una expresión que no es una fórmula.

Tampoco son negaciones de lenprop las expresiones:

$$p\neg \qquad p_{135}\neg \qquad (p \wedge s)\neg$$

porque el símbolo de negación tiene que ir *antepuesto* a una fórmula, y en estos casos aparece detrás.

§ 4.7. EJEMPLOS DE CONJUNCIONES

A su vez, son ejemplos de conjunciones de lenprop las expresiones:

$$(p \wedge q) \qquad (p \wedge p) \qquad (\neg p_5 \wedge \neg(q \vee q))$$

Pero **no** es un ejemplo de conjunción la expresión:

$$(p \vee q)$$

porque no contiene el símbolo $\wedge$. Y *tampoco* es un ejemplo de conjunción la expresión

$$(p \wedge \neg)$$

porque en ella aparece el símbolo $\wedge$, pero no conecta dos fórmulas.

§ 4.8. EJEMPLOS DE DISYUNCIONES, CONDICIONALES Y BICONDICIONALES

A su vez, son ejemplos de disyunciones de lenprop las expresiones:

$(p \vee q)$ $(p \vee p)$ $(\neg p_5 \vee \neg(q \vee q))$

Son ejemplos de condicionales de lenprop las expresiones:

$(p \to q)$ $(p \to p)$ $(\neg p_5 \to \neg(q \vee q))$

Y son ejemplos de bicondicionales de lenprop las expresiones:

$(p \leftrightarrow q)$ $(p \leftrightarrow p)$ $(\neg p_5 \leftrightarrow \neg(q \vee q))$

§ 4.9. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Pon algún otro ejemplo que se te ocurra de la distinción entre *lenguaje objeto* y *metalenguaje*, aunque sea en un contexto que no tenga nada que ver con la lógica.
2. Explica con tus propias palabras la diferencia que existe entre la flecha resaltada en malva ($\to$) y el símbolo condicional de lenprop.
3. Pon un ejemplo de expresión que constituya una fórmula atómica de lenprop.
4. Pon un ejemplo de expresión que *no* constituya un fórmula atómica de lenprop, y explica por qué no lo es.
5. Pon un ejemplo de expresión que constituya una negación de lenprop.

6. Pon un ejemplo de expresión que *no* constituya una negación de lenprop, y explica por qué no lo es.

7. Pon un ejemplo de expresión que constituya un condicional de lenprop.

8. Pon un ejemplo de expresión que *no* constituya un condicional de lenprop, y explica por qué no lo es.

9. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Pon ejemplos de expresiones que constituyan conjunciones, disyunciones y bicondicionales.

   b) Pon ejemplos de expresiones que *no* constituyan conjunciones, disyunciones o bicondicionales.

   c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

Tema 5

Sintaxis de lenprop: estructura de las fórmulas compuestas

§ 5.0. ADVERTENCIAS PRELIMINARES

1. **Grietas**. Todo el conocimiento humano, incluida la ciencia, contiene *"grietas"* (es decir, cosas que no terminan de estar claras, y que con el tiempo se van ajustando), así como *errores* (cosas que se afirman durante un tiempo, pero se acaban rechazando después). Ello afecta incluso a las matemáticas y a la lógica, y en particular a los contenidos de este manual. Por todo ello, y porque el autor de este manual también es persona, y se ha podido equivocar, ninguna de las afirmaciones que aquí se contienen se debe tomar como una verdad indiscutible.

2. **Formato facilitado**. Además, hay que tener en cuenta que la exposición de contenidos en este manual se realiza a un nivel *introductorio* (sumamente facilitado), en contraste con lo que aparece en textos de *lógica avanzada*.

3. **Variaciones**. Por último, también hay que tener en cuenta que existe mucha variabilidad en los textos de lógica, en cuanto a la

notación, *terminología* y *enfoque*. Así por ejemplo, en la elección de los símbolos lógicos, los sistemas deductivos y otros muchos detalles. Conviene tener esto presente a la hora de consultar otras exposiciones de esta materia.

§ 5.1. FÓRMULAS COMPUESTAS

Como hemos visto en el tema anterior, las fórmulas atómicas de lenprop están constituidas por una única letra proposicional, mientras que los restantes tipos de fórmulas (negaciones, conjunciones, etc) son expresiones más complejas.

Por esa razón, a las fórmulas de lenprop que **no** son atómicas, las llamamos **"fórmulas compuestas"**. Pues bien, ahora vamos a tratar brevemente de la estructura de las fórmulas compuestas, introduciendo una terminología que nos será de gran ayuda para manejarnos con ellas.

§ 5.2. ESTRUCTURA DE LAS NEGACIONES

Como hemos explicado en el tema anterior, una *negación* de lenprop tiene la forma $\neg A$, donde A es, a su vez, una fórmula de lenprop.

Pues bien, en este contexto, decimos que el símbolo de negación que aparece delante es la **"conectiva principal"** de esta fórmula. Y decimos también que su **"alcance"** es la fórmula A. Por último, de esta fórmula decimos asimismo que es la **"fórmula negada"** en $\neg A$.

En definitiva:

$$\neg \boxed{A}$$

conectiva principal (aparición inicial de $\neg$) | alcance de la conectiva principal (fórmula negada)

Así por ejemplo, en la fórmula $\neg p$, la conectiva principal es $\neg$ (en su primera y única aparición), y el alcance de dicha conectiva es la fórmula p:

$$\neg \boxed{p}$$

conectiva principal | alcance de dicha conectiva

Además, decimos que la "fórmula negada" en $\neg p$ es la fórmula p.

Por su parte, en la fórmula $\neg\neg\neg t$, la conectiva principal es $\neg$ en su primera aparición, y el alcance de dicha conectiva es la fórmula $\neg\neg t$:

$$\neg \boxed{\neg\neg t}$$

conectiva principal | alcance de dicha conectiva

Además, decimos que la $\neg\neg t$ es la "fórmula negada" en $\neg\neg\neg t$.

Por último, en la fórmula $\neg(q \leftrightarrow p_5)$, la conectiva principal es $\neg$ (en su primera y única aparición), y el alcance de dicha conectiva es la fórmula $(q \leftrightarrow p_5)$:

$$\neg \boxed{(q \leftrightarrow p_5)}$$

conectiva principal | alcance de dicha conectiva

Naturalmente, de la fórmula $(q \leftrightarrow p_5)$ decimos que es la "fórmula negada" en $\neg(q \leftrightarrow p_5)$.

§ 5.3. ESTRUCTURA DE LAS CONJUNCIONES

Como también explicamos en el tema anterior, una *conjunción* de lenprop tiene la forma $(A \land B)$, donde A y B son, a su vez, fórmulas de lenprop.

Pues bien, en este contexto, decimos que el símbolo de conjunción que aparece entre A y B es **"la conectiva principal"** de esta fórmula. También decimos que **"el alcance"** de dicha fórmula comprende las fórmulas A y B. Y por último, a la fórmula A la llamamos **"el primer conyunto"** de la conjunción, y a la fórmula B la llamamos **"el segundo conyunto"** de la conjunción.

En definitiva:

conectiva principal

$$(\boxed{A} \land \boxed{B})$$

alcance de la conectiva principal (primer conyunto)

alcance de la conectiva principal (segundo conyunto)

Así por ejemplo, en la fórmula

$$(\neg p_5 \land \neg(q \lor q))$$

la conectiva principal es $\land$ (en su única aparición), y el alcance de dicha conectiva son las fórmulas $\neg p_5$ y $\neg(q \lor q)$:

conectiva principal

$$(\boxed{\neg p_5} \wedge \boxed{\neg(q \vee q)})$$

alcance de la conectiva principal (primer conyunto)

alcance de la conectiva principal (segundo conyunto)

§ 5.4. ESTRUCTURA DE LAS DISYUNCIONES

La estructura de disyunciones es similar, poniendo:

conectiva principal

$$(\boxed{A} \vee \boxed{B})$$

alcance de la conectiva principal (**primer disyunto**)

alcance de la conectiva principal (**segundo disyunto**)

§ 5.5. ESTRUCTURA DE LOS CONDICIONALES

También es similar la estructura de los condicionales, poniendo:

conectiva principal

$$(\boxed{A} \rightarrow \boxed{B})$$

alcance de la conectiva principal (**antecedente**)

alcance de la conectiva principal (**consecuente**)

§ 5.6. ESTRUCTURA DE LOS BICONDICIONALES

Y por último, también la estructura de los bicondicionales es similar a las anteriores, poniendo:

conectiva principal

$$(\boxed{A} \leftrightarrow \boxed{B})$$

alcance de la conectiva principal (**primer término del bicondicional**)

alcance de la conectiva principal (**segundo término del bicondicional**)

§ 5.7. SUBFÓRMULAS

Dada cualquier negación, $\neg A$, decimos que la fórmula negada, A, es una **"subfórmula"** (abreviadamente, **"subfla"**) de la fórmula $\neg A$.

Asimismo, dada cualquier conjunción, $A \wedge B$, decimos que los conyuntos A y B son **"subfórmulas"** (abreviadamente, **"subflas"**) de la fórmula $A \wedge B$.

Y otro tanto decimos de las disyunciones, condicionales y bicondicionales.

Por último, si A tiene como subfórmula a B, y B tiene como subfórmula a C, entonces también C es una subfórmula de A.

§ 5.8. DESCOMPOSICIÓN

A veces, nos interesa descomponer una fórmula en todas las subfórmulas que la componen. Al hacerlo, vamos realizando sucesivas descomposiciones, hasta que no se pueda seguir más.

Así por ejemplo, la fórmula

$$\neg\neg\neg t$$

se descompone en las siguientes tres subfórmulas:

$$\neg\neg t \qquad\qquad \neg t \qquad\qquad t$$

Y por su parte, la fórmula $\neg(q \leftrightarrow p_5)$ se descompone en la subfla:

$$(q \leftrightarrow p_5)$$

que a su vez se descompone en:

$$q \qquad\qquad p_5$$

Por consiguiente, la fórmula

$$\neg(q \leftrightarrow p_5)$$

se descompone en las tres subfórmulas:

$$(q \leftrightarrow p_5) \qquad\qquad q \qquad\qquad p_5$$

Y por último, la fórmula

$$(\neg p_5 \wedge (q \vee q))$$

se descompone sucesivamente en las subfórmulas

$$\neg p_5 \qquad (q \vee q)$$

$$p_5 \qquad\quad q$$

Como vemos, a la base de la descomposición de cualquier fórmula compuesta están los símbolos proposicionales. Efectivamente, estos símbolos son las piezas más básicas e imprescindibles en la construcción de fórmulas — algo así como los "ladrillos" en una obra, que después se han de "pegar" unos a otros con la "argamasa" que suponen las conectivas.

§ 5.9. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Pon un ejemplo de fórmula que contenga dos conectivas distintas. Indica qué tipo de fórmula es (es decir, si se trata de una negación, o una conjunción, etc). Rodea su conectiva principal, e indica cuál es su alcance.

2. Repite el ejercicio anterior, pero esta vez con una fórmula que contenga tres conectivas distintas, una de las cuales aparezca dos veces.

3. Repite el ejercicio anterior, pero esta vez con una fórmula que contenga tres conectivas distintas, dos de las cuales aparezcan dos veces.

4. Para cada una de las fórmulas anteriores, indica todas las subfórmulas en las que se pueden descomponer, hasta llegar a los símbolos proposicionales.

5. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.

   b) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

   c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 6

Sintaxis de lenprop: alcances y supresión de paréntesis

§ 6.1. IDENTIFICACIÓN DE ALCANCES

Con frecuencia, necesitamos conocer el alcance de las diversas conectivas que aparecen en el interior de una fórmula compuesta. Por ejemplo, ya vimos en **§ 5.2** que el alcance de la primera aparición del símbolo de negación en la fórmula $\neg\neg\neg t$, es la fórmula $\neg\neg t$:

$$\neg\boxed{\neg\neg t}$$

conectiva principal | alcance de dicha conectiva

Pues bien, el alcance de la *segunda* aparición del símbolo de negación, en esa misma fórmula, es la fórmula $\neg t$:

$$\neg\boxed{\neg}\boxed{\neg t}$$

conectiva interior | alcance de dicha conectiva

Y el alcance de la *tercera* aparición del símbolo de negación, en esa misma fórmula, es la fórmula atómica t :

$$\neg\neg\boxed{\neg}\boxed{t}$$

conectiva interior

alcance de dicha conectiva

Ahora, veamos otro ejemplo. En la fórmula

$$(\neg p_5 \wedge (q \vee q))$$

el alcance del símbolo de disyunción son los dos disyuntos, es decir, la fórmula q que aparece repetida, a ambos lados de $\vee$. Esto es:

conectiva interior

$$(\neg p_5 \wedge (\boxed{q} \vee \boxed{q}))$$

alcance de esa conectiva (primer disyunto)

alcance de esa conectiva (segundo conyunto)

§ 6.2. ABREVIATURAS: REGLAS DE SUPRESIÓN DE PARÉNTESIS

A veces, en vez de decir “Verónica” decimos “Vero”, y en vez de decir “Federico” decimos “Fede”. Pues bien, con el mismo espíritu, vamos a introducir algunas reglas de supresión de paréntesis en los nombres metalingüísticos de las fórmulas de lenprop, a fin de agilizar nuestro manejo con ellas.

1. **Supresión de paréntesis exteriores.** Cuando una conjunción $(A \wedge B)$ se nombre sola, suprimimos los paréntesis exteriores, poniendo sencillamente:

$$A \wedge B$$

Lo mismo hacemos con disyunciones, condicionales y bicondicionales, cuando estas fórmulas se nombran solas:

$$A \vee B \qquad\qquad A \rightarrow B \qquad\qquad A \leftrightarrow B$$

2. **Conjunciones iteradas.** Dadas cualesquiera fórmulas A, B y C de lenprop, abreviamos la conjunción iterada $A \wedge (B \wedge C)$, poniendo sencillamente:

$$A \wedge B \wedge C$$

3. **Disyunciones iteradas.** De igual modo, dadas cualesquiera flas A, B y C de lenprop, abreviamos la disyunción iterada $A \vee (B \vee C)$, poniendo sencillamente:

$$A \vee B \vee C$$

4. **Conjunción y disyunción ligan más fuerte.** Dadas cualesquiera fórmulas A, B y C de lenprop,

abreviamos $A \rightarrow (B \wedge C)$ *mediante:* $A \rightarrow B \wedge C$

De este modo, al suprimir los paréntesis en torno a $\wedge$, entendemos que esta conectiva **"liga más fuerte"**, por así decirlo, que $\rightarrow$.

Otro tanto hacemos cuando $\wedge$ aparece en el antecedente:

abreviamos $(A \wedge B) \to C)$ *mediante:* $A \wedge B \to C$

Por lo tanto, aquí también se entiende que $\wedge$ **"liga más fuerte"** que $\to$.

Por su parte, cuando se combinan $\to$ y $\vee$, hacemos lo mismo: entendemos que $\vee$ *liga más fuerte* que $\to$.

Por consiguiente:

abreviamos	$A \to (B \vee C)$	*mediante:*	$A \to B \vee C$
"	$(A \vee B) \to C)$	"	$A \vee B \to C$

Y exactamente lo mismo hacemos cuando $\wedge$ y $\vee$ se combinan con $\leftrightarrow$. También en estos casos entendemos que $\wedge$ y $\vee$ *ligan más fuerte* que $\leftrightarrow$, de tal modo que:

abreviamos	$A \leftrightarrow (B \wedge C)$	*mediante:*	$A \leftrightarrow B \wedge C$
"	$(A \wedge B) \leftrightarrow C$	"	$A \wedge B \leftrightarrow C$
"	$A \leftrightarrow (B \vee C)$	"	$A \leftrightarrow B \vee C$
"	$(A \vee B) \leftrightarrow C)$	"	$A \vee B \leftrightarrow C$

§ 6.3. EJEMPLOS

Un ejemplo de fórmula de lenprop en cuyo nombre hemos aplicado varias de estas convenciones, es la siguiente:

$$p \wedge q \wedge r \rightarrow s \vee t$$

Pues bien, si restauramos todos los paréntesis suprimidos, obtendríamos:

$$((p \wedge (q \wedge r)) \rightarrow (s \wedge t))$$

Sin embargo, a la fórmula $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ no le podemos quitar el paréntesis interior, porque no se le aplica ninguna de estas reglas.

Y a la fórmula $A \wedge (B \rightarrow C)$, tampoco le podemos quitar el paréntesis interior, porque tampoco se le aplica ninguna de estas reglas.

§ 6.4. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Pon un ejemplo de fórmula compuesta que tenga al menos 12 caracteres (es decir, al menos 12 apariciones de símbolos, contando repeticiones y paréntesis).

2. Para la fórmula propuesta, elige una conectiva interior e indica cuál es su alcance.

3. Repite los ejercicios anteriores, pero esta vez con una fórmula que tenga al menos 18 caracteres.

4. Pon un ejemplo de fórmula a la que se pueda aplicar la primera regla de supresión de paréntesis (la supresión de paréntesis exteriores), e indica cuál es el resultado de abreviarla de esa manera.
5. Repite el ejercicio anterior, pero esta vez respecto a la segunda regla de supresión de paréntesis.
6. Repite el ejercicio anterior, pero esta vez respecto a la tercera regla de supresión de paréntesis.
7. Repite el ejercicio anterior, pero esta vez respecto a la cuarta regla de supresión de paréntesis.
8. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:
    a) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.
    b) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.
    c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 7

Semántica veritativo-funcional: bivalencia y reglas de valoración

§ 7.1. EL PRINCIPIO DE BIVALENCIA

El lenguaje de la lógica proposicional es un *lenguaje formal*, porque lo hemos definido completamente, en su alfabeto y su sintaxis (es decir, las reglas de combinación de símbolos), sin hacer referencia a ninguna interpretación suya.

Sin embargo, para que este lenguaje nos sea de utilidad, tenemos que interpretarlo de alguna manera. Pues bien, aquí vamos a explorar la principal forma de interpretar este lenguaje, que es la llamada **"semántica veritativo-funcional"** (o **"semántica vf"**, para abreviar).

La semántica vf pone en relación dos cosas: por una parte, fórmulas de lenprop; y por otra, los llamados **"valores de verdad"** (es decir, **verdadero** y **falso**, la *verdad* y la *falsedad*).

En este curso no vamos a detenernos a investigar qué es la verdad y qué es la falsedad. Nos conformaremos con la comprensión intuitiva de que hay proposiciones que son verdaderas (por ejemplo, *La Tierra es un planeta*) y otras que son falsas (por ejemplo, *Murcia es la ciudad más grande de España*).

Ello presupone un trasfondo que en buena medida es discutible y está por descubrir; pero aquí no vamos a detenernos a explorarlo. Nos limitaremos a suponer — es decir, a dar por sentado — que algunas proposiciones son verdaderas y otras falsas. Y sobre esa base, iremos asignando *la verdad* (abreviadamente, "$\mathbb{V}$"), o *la falsedad* (abreviadamente, "$\mathbb{F}$"), a cada una de las fórmulas de lenprop.

En todo caso, la semántica vf es **bivalente**, porque en cada interpretación, cada una de las flas de lenprop resultará ser, o bien *verdadera*, o bien *falsa*. A este presupuesto se le llama **"principio de bivalencia"**, y es **uno de los pilares fundamentales de la lógica clásica**.

§ 7.2. REGLAS DE VALORACIÓN SEMÁNTICA

A los valores de verdad ($\mathbb{V}$ y $\mathbb{F}$) se les llama también *"valores veritativos"*. De ahí viene la expresión "semántica *veritativo*-funcional".

La otra parte de la expresión ("funcional") hace referencia a que los valores de verdad de las fórmulas compuestas se asignan *en función* de los valores de sus subfórmulas. A su vez, los valores de estas subfórmulas se asignan en función de los valores de las subfórmulas más pequeñas que contengan, y así hasta llegar a las fórmulas atómicas (es decir, a los símbolos proposicionales).

De este modo, el valor de verdad de una fórmula compuesta estará en función del valor de verdad de los símbolos proposicionales que aparezcan en ella — así como de la combinación de estos símbolos con las diferentes conectivas. Y para realizar esa asignación, hay unas pautas (o **reglas de valoración semántica**), que son las que vamos a exponer a continuación.

Teniendo en cuenta todo esto, definimos una **interpretación proposicional** (abreviadamente, **intprop**) como una **asignación de valores de verdad** a las fórmulas de lenprop, de acuerdo con las siguientes cláusulas recursivas:

1. **Fórmulas atómicas.** Si A es una fórmula atómica (es decir, un símb prop), entonces una intprop I le asignará un valor de verdad, verdadero o falso. Abreviadamente:

   Si A es una fla atóm, entonces $I(A) = \mathbb{V}$ o $I(A) = \mathbb{F}$

2. **Negaciones.** Sea A es cualquier fórmula. Entonces, si una intprop I asigna a la fórmula A el valor $\mathbb{V}$, le asignará a la fórmula $\neg A$ el valor $\mathbb{F}$; y viceversa.

   Es decir:

   $$I(\neg A) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si } I(A) = \mathbb{F} \\ \mathbb{F} & \text{si } I(A) = \mathbb{V} \end{cases}$$

   A continuación, sean A y B cualesquiera fórmulas.

3. **Conjunciones.** Una intprop I asignará a la fórmula $A \wedge B$ el valor verdadero, si asigna el valor verdadero tanto a la fórmula

A como a la fórmula B; en cualquier otro caso, I asignará a la fórmula $A \wedge B$ el valor falso.

Es decir:

$$I(A \wedge B) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si } I(A) = \mathbb{V} \text{ y } I(B) = \mathbb{V} \\ \mathbb{F} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

4. **Disyunciones.** Una intprop I asignará a la fórmula $A \vee B$ el valor verdadero, si asigna el valor verdadero a la fórmula A, o a la fórmula B, o a ambas; en cualquier otro caso, I asignará a la fórmula $A \vee B$ el valor falso.

   Es decir:

$$I(A \vee B) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si } I(A) = \mathbb{V} \text{ o } I(B) = \mathbb{V} \\ \mathbb{F} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

5. **Condicionales.** Una intprop I asignará a la fórmula $A \rightarrow B$ el valor falso, si asigna a la fórmula A el valor verdadero y asigna a la fórmula B el valor falso; en cualquier otro caso, I asignará a la fórmula $A \rightarrow B$ el valor verdadero.

   Es decir:

$$I(\boxed{A \to B}) = \begin{cases} \mathbb{F} & \text{si } I(\boxed{A}) = \mathbb{V} \text{ y } I(\boxed{B}) = \mathbb{F} \\ \mathbb{V} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

6. **Bicondicionales.** Una intprop I asignará a la fórmula $A \leftrightarrow B$ el valor verdadero, si asigna el mismo valor a las fórmulas A y B (es decir, si les asigna a las dos el valor verdadero, o les asigna a las dos el valor falso); en caso contrario, I asignará a la fórmula $A \leftrightarrow B$ el valor falso.

   Es decir:

$$I(\boxed{A \leftrightarrow B}) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si } I(\boxed{A}) = I(\boxed{B}) \\ \mathbb{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

§ 7.3. SATISFACCIÓN

Dicho todo esto, al valor que una interpretación proposicional I asigna a una fórmula A, lo llamamos también "el valor de A bajo I".

Asimismo, si este valor es $\mathbb{V}$, decimos que I "hace $\mathbb{V}$ a A", o que I **"satisface"** A. Y esto lo abreviamos mediante el signo de "puerta giratoria doble" con el subíndice "PROP", poniendo:

$$I \models_{\text{PROP}} A$$

Por su parte, si el valor que I asigna a una fórmula A es $\mathbb{F}$, entonces decimos que I "hace $\mathbb{F}$ a A", o que I **"no satisface"** A. Y esto lo abreviamos mediante el signo anterior, pero tachado, así:

$$I \not\models_{\text{PROP}} A$$

Usando esta terminología, podemos decir que una intprop I hace $\mathbb{V}$ a una fórmula condicional $A \to B$, cuando sucede que **si** I hace $\mathbb{V}$ al antecedente (A), **entonces** también hace $\mathbb{V}$ al consecuente (B).

Del mismo modo, podemos decir que una intprop I hace $\mathbb{V}$ a una fórmula bicondicional $A \leftrightarrow B$, cuando sucede que I hace $\mathbb{V}$ a A **si y solo si** hace $\mathbb{V}$ a B.

Así se entiende mejor que $\to$ y $\leftrightarrow$ se llamen "símbolo condicional" y "símbolo bicondicional" respectivamente.

Finalmente, también es bastante obvio que una intprop I hace $\mathbb{V}$ a un bicondicional $A \leftrightarrow B$, cuando sucede que I hace $\mathbb{V}$ a los condicionales en los dos sentidos, $A \to B$ y $B \to A$. Por consiguiente, el bicondicional $A \leftrightarrow B$ será verdadero exactamente en los mismos casos en que lo sea la conjunción:

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

§ 7.4. EJEMPLOS DE VALORACIONES SEMÁNTICAS

Sea I una intprop tal que:

- $I(p) = \mathbb{V}$

- $I(q) = \mathbb{F}$
- $I(t) = \mathbb{V}$
- $I(p_5) = \mathbb{F}$

Pues bien, en ese caso, aplicando la cláusula 2 de la definición anterior, tendremos:

$$I(\neg p) = \mathbb{F} \qquad\qquad I(\neg p_5) = \mathbb{V}$$

$$I(\neg t = \mathbb{F} \qquad\qquad I(\neg\neg t) = \mathbb{V} \qquad\qquad I(\neg\neg\neg t) = \mathbb{F}$$

Por su parte, aplicando la cláusula 6 de la definición anterior, y teniendo en cuenta que $I(q) = \mathbb{F}$ e $I(p_5) = \mathbb{F}$, tendremos:

$$I(q \leftrightarrow p_5) = \mathbb{V}$$

Y por consiguiente, aplicando la cláusula 2:

$$I(\neg(q \leftrightarrow p_5)) = \mathbb{F}$$

Aplicando ahora las cláusulas 2, 3 y 4 de esta misma definición, tendremos:

$$I(q \vee q) = \mathbb{F} \qquad I(\neg(q \vee q)) = \mathbb{V} \qquad I(\neg p_5 \wedge \neg(q \vee q)) = \mathbb{V}$$

Y finalmente, aplicando las cláusulas 2 y 5, tendremos:

$$I(p_5 \rightarrow q \vee q) = \mathbb{V}$$

Nótese que, por la regla de supresión de paréntesis que introdujimos en el tema anterior, la disyunción liga más fuerte que el condicional, con lo cual esta fórmula ha de leerse: $p_5 \to (q \vee q)$

Naturalmente, si tomamos otra interpretación diferente, que asigne otros valores a nuestras cuatro fórmulas atómicas

$$p \qquad q \qquad t \qquad p_5$$

entonces podrían cambiar, a su vez, los valores de todas las fórmulas compuestas en las que estas fórmulas atómicas aparecen.

§ 7.5. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Propón una intprop J para los símbolos proposicionales p, q, r y s. Es decir, especifica, para cada una de estas cuatro fórmulas atómicas, cuál es su valor ($\mathbb{V}$ o $\mathbb{F}$) bajo J, a tu elección. (Puedes elegir el valor que quieras para cada fórmula.)

2. Especifica cuál es el valor de la negación de cada una de esas cuatro fórmulas bajo J. Es decir, especifica

$$J(\neg p) \qquad J(\neg q) \qquad J(\neg r) \qquad J(\neg s)$$

3. Basándote en tus respuestas anteriores, especifica:

$$J(p \wedge q) \qquad J(r \vee s) \qquad J(p \to r) \qquad J(q \leftrightarrow s)$$

4. Basándote en tus respuestas anteriores, especifica:

$$J(\neg p \to p \wedge q) \qquad J(\neg(r \vee s)) \qquad J((p \to r) \wedge (q \leftrightarrow s))$$

Recuerda que la disyunción liga más fuerte que el condicional, por lo que la primera de estas fórmulas ha de leerse: $\neg p \to (p \wedge q)$.

5. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Razona detalladamente lo que se apunta al final de § **7.3** : que una intprop I hace $\mathbb{V}$ a

   $$A \leftrightarrow B$$

   exactamente en los mismos casos en que a

   $$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

   b) Especula libremente, pero de forma breve, sobre cómo sería una lógica "no bivalente".

   c) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.

   d) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

   e) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 8

Semántica veritativo-funcional: validez y consecuencia lógica

§ 8.1. TAUTOLOGÍAS

La semántica vf tiene una curiosa consecuencia: *algunas fórmulas de lenprop resultan verdaderas bajo cualquier interpretación.*

El ejemplo por antonomasia es:

$$p \vee \neg p$$

En efecto, dadas las reglas de valoración semántica que vimos en **§ 7.2** , para cualquier intprop I tenemos que:

(a) Si $I(p) = \mathbb{V}$, entonces, por la cláusula 4 de las reglas de valoración, sucede que $I(p \vee \neg p) = \mathbb{V}$.

(b) Pero si $I(p) = \mathbb{F}$, entonces, por la cláusula 2 de las reglas de valoración, sucede que $I(\neg p) = \mathbb{V}$. Y por consiguiente, aplicando de nuevo la cláusula 4 de las reglas de valoración, tendremos igualmente $I(p \vee \neg p) = \mathbb{V}$.

En definitiva, la fórmula $p \vee \neg p$ **resulta verdadera bajo cualquier interpretación proposicional**, y para expresar esto decimos que es una **"tautología"**, o que es **"tautológica"** (abreviadamente, **"taut"**). También decimos que es una **"ley lógica a nivel de la lógica proposicional"** (o que es una **"ley de la lógica proposicional"**).

Otro tanto ocurre, obviamente, si en lugar de p ponemos cualquier otro símbolo proposicional (como q, etc).

Y también son tautologías muchas otras fórmulas de lenprop, como por ejemplo:

$$p \to p \qquad\qquad p \leftrightarrow \neg\neg p \qquad\qquad (p \wedge q) \vee \neg(p \wedge q)$$

En efecto, de cada una de esas fórmulas, es fácil comprobar que resulta verdadera para cualquier interpretación.

Por último, de las tautologías decimos también que son **"verdades lógicas de la lógica proposicional"**, o **"fórmulas lógicamente válidas de la lógica proposicional"**.

§ 8.2. CONTRADICCIONES

Recíprocamente, hay también fórmulas de lenprop que resultan *falsas bajo cualquier interpretación*. En este caso, el ejemplo por antonomasia es:

$$p \wedge \neg p$$

En efecto, dadas las reglas de valoración semántica que vimos en **§ 7.2** , es obvio que para cualquier interpretación I:

(a) Si $I(p) = \mathbb{V}$, entonces tendremos $I(\neg p) = \mathbb{F}$. Y por consiguiente, por la clásula 3 de las reglas de valoración, tendremos $I(p \wedge \neg p) = \mathbb{F}$.

(b) Pero si $I(p) = \mathbb{F}$, entonces directamente (por misma cláusula 3), tendremos $I(p \wedge \neg p) = \mathbb{F}$.

En definitiva, la fórmula $p \wedge \neg p$ **resulta falsa bajo cualquier interpretación proposicional**, y para expresar esto decimos que es una **"contradicción"**, o que es **"contradictoria"** (abreviadamente, **"contrad"**).

La fórmula $p \wedge \neg p$ (o con cualquier otro simbprop, q, etc) constituye la contradicción por antonomasia, es decir, la más reconocible en lenprop.

Sin embargo, no es difícil encontrar otras contradicciones en este lenguaje (esto es, otras fórmulas que también son falsas bajo cualquier intprop). Por ejemplo:

$$p \leftrightarrow \neg p \qquad\qquad \neg p \wedge \neg\neg p \qquad\qquad (p \wedge q) \ \wedge \ \neg(p \wedge q)$$

De cada una de esas fórmulas, es fácil comprobar que resulta falsa para cualquier interpretación.

Finalmente, de las contradicciones decimos también que son **"fórmulas insatisfacibles en lógica proposicional"**, o **"fórmulas lógicamente falsas en lógica proposicional"**.

§ 8.3. SATISFACIBILIDAD DE UNA FÓRMULA

Si A es una fórmula de lenprop, decimos que A es **"satisfacible en lógica proposicional"** si existe alguna interpretación proposicional que la satisface (es decir: si existe alguna intprop I, tal que $I(A) = \mathbb{V}$).

Naturalmente, cualquier fla de lenprop que no sea una contradicción, será satisfacible. Ello incluye las tautologías, pero también muchas otras fórmulas de este lenguaje, que resultan verdaderas en algunas interpretaciones, pero no en todas.

Como ejemplos de fórmulas satisfacibles de lenprop podemos señalar las siguientes:

$p \rightarrow p$ $\qquad$ $p \vee \neg p$ $\qquad$ p $\qquad$ q $\qquad$ $p \vee q$

Las dos primeras son tautologías. Las otras tres son simplemente satisfacibles, pero no tautológicas.

§ 8.4. CONJUNTOS Y PERTENENCIA

A un grupo de ovejas que pastan juntas lo llamamos *"rebaño"*. A un grupo de abejas que vuelan juntas lo llamamos *"enjambre"*.

Pues bien, con este mismo espíritu, hablamos a veces de **"un conjunto"** de objetos (los que sean), y expresamos que un determinado objeto **"pertenece"** a ese conjunto, mientras que otro objeto *"no pertence"*. A veces abreviamos la palabra, y escribimos simplemente **"cjto"**.

Además, para exhibir los objetos que pertenecen a un conjunto, utilizaremos la llamada *"notación de llaves"*. Así por ejemplo, podemos especificar el conjunto de provincias de Aragón, poniendo:

$$\text{Aragón} \;=\; \{\,\text{Zaragoza, Huesca, Teruel}\,\}$$

Incluso si un conjunto es infinito, se puede a veces dar a entender cuáles son sus elementos, mostrando unos pocos. Así por ejemplo, es habitual caracterizar el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, poniendo:

$$\mathbb{N} \;=\{\,0,\;1,\;2,\;\ldots\,\}$$

(donde está claro que la serie continúa $3, 4, 6, \ldots$, y así hasta el infinito).

Por último, si D es un conjunto y el objeto a pertenece al mismo, entonces pondremos, para abreviar,

$$a \;\in\; D$$

Y si b es un objeto que *no* pertenece al conjunto D, entonces lo que pondremos es:

$$b \;\notin\; D$$

Por consiguiente, dados los ejemplos anteriores, podemos decir que:

$$\text{Zaragoza} \in \text{Aragón} \qquad\qquad \text{Murcia} \notin \text{Aragón}$$

$$7 \in \mathbb{N} \qquad\qquad \frac{3}{4} \notin \mathbb{N}$$

§ 8.5. SATISFACCIÓN DE UN CONJUNTO DE FÓRMULAS

Sea ahora D un *conjunto* de fórmulas de lenprop, y sea I una interpretación proposicional. Entonces, decimos que I **"satisface"** D, si satisface todas y cada una de las fórmulas de D. Esto lo abreviamos mediante el signo de la puerta giratoria doble:

$$I \models_{\text{PROP}} D \qquad \text{si y solo si} \qquad I \models_{\text{PROP}} A \text{ para cualquier fla } A \in D$$

Por el contrario, si existe al menos una fla en D que la intprop I no satisface, entonces decimos que I **"no satisface"** D, lo cual abreviamos mediante el signo de puerta giratoria doble, pero tachado:

$$I \not\models_{\text{PROP}} D \qquad \text{si y solo si} \qquad I \not\models_{\text{PROP}} A \text{ para alguna fla } A \in D$$

Así por ejemplo, tomemos el siguiente conjunto de fórmulas:

$$D_1 = \{ p, q, \neg r \}$$

Pues bien, una interpretación que satisface ese conjunto es, obviamente:

$$I_1(p) = \mathbb{V} \qquad I_1(q) = \mathbb{V} \qquad I_1(r) = \mathbb{F}$$

Mientras que una interpretación que *no* lo satisface es, por ejemplo:

$$I_2(p) = \mathbb{F} \qquad I_2(q) = \mathbb{V} \qquad I_2(r) = \mathbb{F}$$

Ahora tomemos otro conjunto de fórmulas:

$$D_2 = \{ p \vee q \vee r, \neg p, \neg q \}$$

Pues bien, en este caso, una intprop que satisface este otro conjunto es la siguiente:

$$I_3(\, p \,) = \mathbb{F} \qquad I_3(\, q \,) = \mathbb{F} \qquad I_3(\, r \,) = \mathbb{V}$$

Mientras que una intprop que *no* lo satisface es:

$$I_4(\, p \,) = \mathbb{F} \qquad I_4(\, q \,) = \mathbb{F} \qquad I_4(\, r \,) = \mathbb{F}$$

§ 8.6. SATISFACIBILIDAD DE UN CONJUNTO DE FÓRMULAS

A continuación, decimos que un conjunto de fórmulas de lenprop D es **"satisfacible en lógica proposicional"** (abreviadamente, **"sat logprop"**) cuando existe alguna interpretación proposicional que lo satisface.

Los dos ejemplos anteriores, D_1 y D_2, son obviamente satisfacibles.

Otro ejemplo de conjunto de fórmulas satisfacible es:

$$D_3 \;=\; \{\, p \vee q \vee r \,,\; p \,\}$$

En efecto, es inmediato darse cuenta de que cualquier interpretación en la que p sea $\mathbb{V}$, también hará $\mathbb{V}$ a la fórmula $p \vee q \vee r$ (y por consiguiente, a todo el conjunto D_3).

Por último, decimos que un conjunto de fórmulas de lenprop es **"insatisfacible en lógica proposicional"** (abreviadamente, **"insat logprop"**) cuando no es satisfacible, es decir, cuando no existe ninguna interpretación proposicional que haga verdaderas a todas sus fórmulas.

Un ejemplo obvio de conjunto de fórmulas insatisfacible es:

$$D_4 = \{ \, p \, , \; \neg p \, \}$$

En efecto, dada la definición de interpretación proposicional, es claro que no puede haber ninguna interpretación que haga verdaderas a las fórmulas p y $\neg p$.

Y otro ejemplo — también bastante claro — de conjunto de fórmulas insatisfacible, es:

$$D_5 = \{ \, p \vee q \, , \; \neg p \, , \; \neg q \, \}$$

En efecto, si una interpretación hace $\mathbb{V}$ a $p \vee q$, entonces tendrá que hacer $\mathbb{V}$ a p o a q, y por tanto hará $\mathbb{F}$ a alguna de las fórmulas $\neg p$ o $\neg q$.

§ 8.7. CONSECUENCIA LÓGICA

Dadas dos fórmulas A y B de lenprop, decimos que **“la fórmula B es consecuencia lógica de la fórmula A en lógica proposicional”** (abreviadamente, **“consec logprop”**), cuando sucede que **cualquier interpretación proposicional que satisfaga A, también satisface B**.

Cuando ocurre esto, también decimos que **“ B se sigue de A en lógica proposicional”**, o que **“el argumento de A a B es válido en lógica proposicional”**. Y este hecho lo abreviamos poniendo:

$$A \models_{\text{PROP}} B$$

En caso contrario (es decir, cuando B *no* es consecuencia lógica de A), ponemos:

$$A \not\models_{\text{PROP}} B$$

Así por ejemplo, es fácil darse cuenta de que:

$$p \wedge q \quad \models_{\text{PROP}} \quad p$$

En efecto, si una interpretación satisface $p \wedge q$, también tiene que satisfacer p. Por lo tanto, p es consecuencia lógica de $p \wedge q$.

Por otra parte, también es fácil ver que:

$$p \vee q \quad \not\models_{\text{PROP}} \quad p$$

En efecto, puede haber una interpretación que satisfaga $p \vee q$ y *no* satisfaga p (basta con que satisfaga q). Por consiguiente, p *no* es una consecuencia lógica de $p \vee q$.

Por último, dada una fórmula A y un conjunto de fórmulas D, decimos que **"la fórmula A es consecuencia lógica del conjunto D en lógica proposicional"** ((abreviadamente, **"consec logprop"**), cuando sucede que **cualquier interpretación proposicional que satisfaga el conjunto D, también satisface la fórmula A.**

En este caso, también decimos que **"A se sigue de D en lógica proposicional"**, o que **"el argumento de D a A es válido en lógica proposicional"**. Y este hecho lo abreviamos poniendo:

$$D \models_{\text{PROP}} A$$

En caso contrario (es decir, cuando A **no es consecuencia lógica** de D), ponemos:

$$D \not\models_{\text{PROP}} A$$

Los siguientes casos son ejemplos bastante obvios de una cosa y de otra:

$$\{ p , p \to q \} \models_{\text{PROP}} q$$

$$\{ p , p \to q \} \not\models_{\text{PROP}} r$$

En este punto, conviene recordar la regla de valoración semántica del condicional (**§ 7.2** , regla 5). Pues bien, dada esta regla, es claro que si una interpretación satisface el conjunto de fórmulas $\{ p , p \to q \}$, también tendrá que satisfacer la fórmula q (en otro caso, la fórmula $p \to q$ sería falsa bajo esa interpretación). Por consiguiente, esta última fórmula es una consecuencia lógica de dicho conjunto.

Pero por otro lado, una interpretación puede satisfacer ese conjunto sin satisfacer la fórmula r, por lo que esta fórmula *no* es una consecuencia lógica suya.

§ 8.8. EQUIVALENCIA LÓGICA

Finalmente, decimos que dos fórmulas de lenprop, A y B son **"lógicamente equivalentes en lógica proposicional"**, cuando tenemos al mismo tiempo:

$$A \models_{\text{PROP}} B \qquad \text{y} \qquad B \models_{\text{PROP}} A$$

Esto lo abreviamos poniendo:

$$A \equiv_{\text{PROP}} B$$

Así por ejemplo, es fácil ver que si una intprop I satisface una fórmula A, también satisfará su doble negación, $\neg\neg A$, y vicecersa. En efecto, si I hace $\mathbb{V}$ a A, entonces hará $\mathbb{F}$ a $\neg A$, y por lo tanto hará $\mathbb{V}$ a $\neg\neg A$. Y recíprocamente: si I hace $\mathbb{V}$ a $\neg\neg A$, entonces hará $\mathbb{F}$ a $\neg A$, y por consiguiente hará $\mathbb{V}$ a A.

En definitiva, hemos demostrado que para cualquier fla A,

$$A \equiv_{\text{PROP}} \neg\neg A$$

§ 8.9. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Pon un ejemplo de tautología.
2. Pon un ejemplo de contradicción.
3. Pon un ejemplo de fórmula satisfacible no tautológica.
4. Especifica un conjunto mediante la notación de llaves. A continuación, da un ejemplo de objeto que pertenezca a ese conjunto, y otro que no pertenezca, mediante la notación indicada en **§ 8.4**.
5. Da un ejemplo de conjunto de fórmulas satisfacible y especifica una interpretación que lo satisfaga.

6. Da un ejemplo de conjunto de fórmulas insatisfacible y explica por qué lo es.

7. Especifica un conjunto de tres fórmulas, y a continuación indica una fórmula que sea consecuencia lógica de ese conjunto, y otra que no lo sea.

8. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Da una explicación, similar a la de **§ 8.8**, que establezca que para cualesquiera fórmulas A y B,

   $$A \to B \quad \equiv_{\text{PROP}} \quad \neg A \vee B$$

   b) Da una explicación, similar a la de **§ 8.8**, que establezca que para cualesquiera fórmulas A y B,

   $$A \leftrightarrow B \quad \equiv_{\text{PROP}} \quad (A \to B) \wedge (B \to A)$$

   c) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.

   d) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

   e) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 9

Formalización en lenprop: negaciones y conjunciones

§ 9.1. ARGUMENTOS FORMALES, VALIDEZ Y CONSECUENCIA LÓGICA

Para que todo el aparataje que llevamos construido hasta aquí sea de alguna utilidad en el análisis de los argumentos deductivos, tenemos que ponerlo en relación con el lenguaje natural, que es donde se lleva a cabo la argumentación humana.

Para ello, vamos a intentar **"extraer" algunas estructuras lógicas subyacentes a las proposiciones del lenguaje natural, y a ponerlas en correspondencia con fórmulas de nuestro lenguaje formal**. A esta tarea la llamamos **"formalización"**.

Al formalizar las premisas y la conclusión de un argumento deductivo, obtenemos su **contrapartida formal**. Esta contrapartida consiste en un **argumento formal**, esto es: un conjunto de fórmulas que corresponden a las premisas del argumento, junto con una fórmula adicional, que corresponde a su conclusión.

Pues bien, la noción de *consecuencia lógica* definida en **§ 8.7** tiene la siguiente propiedad: **si el argumento formalizado es válido** (es decir, si el argumento expresado en lenguaje natural constituye un argumento deductivo correcto), **entonces, en su contrapartida formal, la conclusión es consecuencia lógica de las premisas**.

Esto es obvio, teniendo en cuenta que la característica definitoria de los argumentos deductivos es precisamente que si las premisas son verdaderas, la conclusión también tiene que serlo. Y eso coincide con la noción de *consecuencia lógica* de **§ 8.7**, definida en el terreno de las fórmulas de lenprop y la noción de interpretación proposicional.

§ 9.2. UTILIDAD Y DIFICULTADES DE LA FORMALIZACIÓN

La formalización es, sin duda, el gran *talón de Aquiles* de la lógica: **ahí es donde las distintas teorías de la lógica presentan más fallas**. Ello se debe principalmente a tres razones, que son las siguientes.

En primer lugar, **no existe un método** que nos indique cómo debemos formalizar las proposiciones del lenguaje natural: aprendemos a formalizar de manera intuitiva, a través de ejemplos y explicaciones dispersas.

En segundo lugar, cualquiera que sea el lenguaje lógico escogido, **siempre encontramos desajustes** respecto al área del lenguaje natural que queremos representar. Es decir, siempre acaban apareciendo matices o atributos lógicos de las proposiciones del lenguaje natural, que el lenguaje formal escogido no puede captar. Todo ello convierte la tarea de formalización en un terreno discutible y resbaladizo.

Pero además, hay una tercera limitación a la formalización lógica, que es la más profunda, y afecta al ámbito de las matemáticas. La explicaremos — muy por encima — en la sección siguiente.

§ 9.3. LÍMITES DE LA FORMALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS

Como dijimos en **§ 3.8** , las matemáticas se presentan habitualmente en un lenguaje *semi-formal*, esto es: con profusión de símbolos y términos técnicos, pero *no en un lenguaje completamente formalizado.*

De hecho, cualquier texto de matemáticas tiene a la base un lenguaje natural, ya sea el castellano, el inglés, el ruso, etc. Y es mediante ese lenguaje natural que se va explicando el significado de los símbolos y términos técnicos que se van introduciendo. A veces, se utilizan también figuras, diagramas y otros recursos gráficos, que a su vez se van comentando y explicando mediante el lenguaje natural en cuestión.

Sin embargo, es notorio que las matemáticas hacen un uso del lenguaje natural bastante limitado, restringido a un registro lingüístico más bien reducido y repetitivo. Por eso, formalizar matemáticas resulta más fácil, aparentemente, que formalizar cualquier otra área del discurso humano — en matemáticas parece haber menos desajustes expresivos, en principio, respecto a los lenguajes formales.

Sin embargo, incluso en ese ámbito del discurso humano tan asequible, aparentemente, a la formalización, existen limitaciones infranqueables a dicha tarea.

En concreto, el primer teorema de incompletitud de Gödel (demostrado en 1931) establece que **ni siquiera la aritmética elemental**

— es decir, la teoría matemática que trata de los números naturales y las relaciones de orden entre ellos — **es completamente formalizable**. En efecto, para cualquier teoría formal que intente representar la aritmética, existe una proposición aritmética verdadera, que esa teoría no contiene. Volveremos sobre este resultado, con un poco más de detalle, en logfor2.

En cualquier caso, aun asumiendo las dificultades y limitaciones de la formalización lógica, lo cierto es que, a fecha de hoy, sigue siendo nuestra mejor herramienta disponible para analizar el razonamiento deductivo. Y es por ello que debemos aprender a manejarla.

§ 9.4. FORMALIZACIÓN MEDIANTE SÍMBOLOS PROPOSICIONALES

El uso de símbolos proposicionales para formalizar proposiciones del lenguaje natural es relativamente sencillo. Consiste en identificar una proposición concreta (es decir, una oración enunciativa, en la que interpretamos que se está haciendo una determinada afirmación), y asignarle un símbolo proposicional que la represente.

Por ejemplo:

p : *Llueve.*

q : *Hace frío.*

r : *Ana lleva paraguas.*

s : *2 + 2 = 4*

t : *Madrid está en España.*

A este emparejamiento entre símbolos de lenprop y proposiciones del lenguaje natural (en nuestro caso, el castellano) lo llamamos **"tabla de convenciones simbólicas"**. Toda formalización lógica presupone una tabla de estas características, aunque a veces no se hace explícita, porque solo con ver la fórmula ya entendemos a qué corresponde cada cosa.

§ 9.5. ESTRUCTURA DE LAS PROPOSICIONES FORMALIZADAS

A continuación, vamos a dar orientaciones respecto a la formalización mediante cada una de las conectivas de lenprop.

Al hacerlo, trasladaremos a las proposiciones del lenguaje natural, la estructura y terminología correspondiente a aquellas fórmulas de lenprop que tienen esa conectiva como conectiva principal.

En particular, si representamos una proposición del lenguaje natural como una negación $\neg A$, diremos que la proposición que corresponde a A es la **"proposición negada"**. Si representamos una proposición del lenguaje natural como un condicional $A \rightarrow B$, diremos que la proposición que corresponde a A es el **"antecedente"**, y la que corresponde a B es **"el consecuente"**. Y análogamente para el resto de conectivas de lenprop.

§ 9.6. FORMALIZACIÓN DE NEGACIONES

No es difícil imaginar que con el símbolo de negación vamos a formalizar aquella operación lógica que consiste en **negar** una determinada proposición. Así por ejemplo, manteniendo las convenciones anteriores, tenemos:

$\neg\, p$: *No llueve.*

$\neg\, q$: *No hace frío.*

$\neg\, r$: *Ana no lleva paraguas.*

$\neg\, s$: *2 + 2 ≠ 4*

$\neg\, t$: *Madrid no está en España.*

§ 9.7. MATICES DE LAS NEGACIONES QUE ESCAPAN A LENPROP

El símbolo de negación es bastante tosco, deja fuera muchos matices. Así por ejemplo, si alguien dice:

Tajantemente no llueve, estamos en las antípodas del llover (1)

está expresando un hecho distinto a quien afirma:

Está que casi llueve, aunque todavía no. (2)

Sin embargo, en lenprop **no hay varios símbolos de negación**, que nos permitieran reflejar la diferencia entre negar algo categóricamente, como hace (1), y negarlo de forma vacilante ("por la mínima"), como hace (2).

La única forma que tenemos de formalizar la negación de *Llueve* es mediante $\neg p$, que significa genéricamente *No llueve.* Y ello no recoge los matices adicionales que puedan acompañar esa negación en el lenguaje natural.

§ 9.8. FORMALIZACIÓN DE CONJUNCIONES

Por su parte, utilizaremos el símbolo de conjunción para formalizar aquellas proposiciones del lenguaje natural en la que se **combinan dos afirmaciones** en una sola. Estas afirmaciones combinadas vienen a corresponder a lo que en el análisis sintáctico-gramatical se denominan *"conjunciones copulativas"*.

Así por ejemplo, manteniendo las convenciones simbólicas anteriores, tenemos:

$p \wedge q$: *Llueve y hace frío.*

$p \wedge \neg r$: *Llueve y Ana no lleva paraguas.*

$s \wedge t$: *2 + 2 = 4 y Madrid está en España.*

§ 9.9. MATICES DE LAS CONJUNCIONES QUE ESCAPAN A LENPROP

También el símbolo de conjunción es muy tosco, en relación a la cantidad de matices que se pueden expresar al combinar afirmaciones en el lenguaje natural. Así por ejemplo:

$$\textit{Llueve, pero no hace frío.} \tag{3}$$

da a entender que hay un contraste entre una cosa y otra (algo así como que lloviendo, sería de esperar que hiciera frío, aunque de hecho no haga frío en ese momento).

Sin embargo, en lenprop **solo hay un símbolo de conjunción**, por lo que (3) se ha de formalizar mediante $p \wedge \neg q$, que significa genéricamente *Llueve y no hace frío*, sin recoger matices adicionales.

Por otra parte, casi siempre que emitimos dos afirmaciones combinadas en el lenguaje natural (ya sea mediante "y", "pero" u otras partículas gramaticales), damos a entender que una es relevante para la otra. Así, saber si llueve y hace frío, nos ayuda a equiparnos para salir a la calle. Y si Ana no lleva paraguas, el hecho de que llueva es obviamente relevante.

Sin embargo, decir:

2 + 2 = 4 y Madrid está en España

suena raro, porque no se adivina la relación que se quiere apuntar entre una cosa y otra.

Pues bien, todos esos matices del lenguaje natural quedan también fuera de la correspondiente formalización de la conjunción. La formalización $s \wedge t$ no entraña ni presupone que tenga que haber relación alguna entre esos dos conyuntos, a pesar de que se afirmen juntos. Tampoco implica que no pueda haber relación: simplemente es independiente de si hay relación o no.

§ 9.10. FORMALIZACIÓN DE CONJUNCIONES ITERADAS

Por último, al formalizar conjunciones del lenguaje natural, aplicaremos el sentido común para representar conjunciones iteradas, y utilizaremos las reglas de supresión de paréntesis allí donde sea posible.

Así por ejemplo, supongamos que queremos formalizar la siguiente proposición en lenprop, haciendo visible su estructura como conjunción:

Lorca está en Murcia, en España y en Europa. (4)

Pues bien, en este caso aplicaríamos una tabla de convenciones como la siguiente:

p_1 : *Lorca está en Murcia.*

p_2 : *Lorca está en España.*

p_3 : *Lorca está en Europa.*

Como vemos, la tabla de convenciones de la formalización nos obliga a explicitar el sujeto, verbo y predicado de cada proposición. Esto contrasta con la formulación del lenguaje natural de (4), más fluida y abreviada, en la que se omiten el sujeto y verbo de p_2 y p_3 (los cuales quedan "elípticos").

Y una vez hecho esto, formalizaríamos (4) sencillamente como:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$$

§ 9.11. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Pon un ejemplo de negación en el lenguaje natural y su formalización en lenprop, especificando la correspondiente tabla de convenciones simbólicas.
2. Pon dos ejemplos de proposiciones en el lenguaje natural que nieguen lo mismo, pero con diferentes grados de fuerza, y formalízalas en lenprop.
3. Pon un ejemplo de conjunción en el lenguaje natural y su formalización en lenprop, especificando la correspondiente tabla de convenciones simbólicas.
4. Pon un ejempo de conjunción en el lenguaje natural, que contenga matices que lenprop no es capaz de expresar. Explica por qué, en pocas palabras.
5. Pon un ejemplo de conjunción iterada en el lenguaje natural, y su formalización en lenprop.
6. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:
   a) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.
   b) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.
   c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 10

Formalización en lenprop: disyunciones, condicionales y bicondicionales

§ 10.1. FORMALIZACIÓN DE DISYUNCIONES INCLUSIVAS

En cuanto al símbolo de disyunción, tampoco es difícil de imaginar que lo vamos a utilizar para formalizar proposiciones del lenguaje natural en las que **se presentan distintas alternativas, de las cuales al menos una ha de ser verdadera**.

También aquí hay que hacer una advertencia importante, y es que el símbolo de disyunción de lenprop corresponde a una **disyunción inclusiva**. Así se desprende de la regla de valoración 4 que vimos en § **7.2** .

En efecto, para que una intprop I satisfaga una fórmula $A \vee B$, basta con que satisfaga A o satisfaga B. Si satisface las dos, también cumple con la condición, y por tanto I satisfará la disyunción $A \vee B$.

Por consiguiente, el símbolo de disyunción se puede utilizar para formalizar proposiciones del lenguaje natural en las que se admite la posibilidad de que las dos opciones puestas en disyunción sean verdaderas al mismo tiempo. Así por ejemplo, imaginemos que alguien dice:

Mañana voy a verte o te llamo. (1)

En este caso, la persona se está comprometiendo a hacer una de las dos cosas: visitar o llamar a la otra persona. Pero también podría hacer las dos, y estaría cumpliendo su promesa.

Por consiguiente, la proposición (1) se puede formalizar como una disyunción de lenprop, sin más:

$$p \vee q$$

donde:

p : *Mañana voy a verte.*

q : *Mañana te llamo.*

§ 10.2. FORMALIZACIÓN DE DISYUNCIONES EXCLUSIVAS

Hay ocasiones, sin embargo, en que las disyuntivas que se presentan en el lenguaje natural conllevan un sentido **exclusivo**. Es decir, que se sobrentiende que solo una de las alternativas propuestas puede ser verdadera.

Así por ejemplo, supongamos que alguien afirma:

O se sigue protegiendo al lince ibérico,
o se acabará extinguiendo. (2)

Pues bien, esa persona está queriendo decir que solo una de las alternativas puede ser verdadera: si de hecho se protege al lince, entonces *no* se extinguirá; y si se acaba extinguiendo, es porque *no* se le ha protegido. Por consiguiente, estamos ante una **disyunción exclusiva**.

Pues bien, en este caso, lenprop **sí tiene recursos** para expresar este tipo de disyunción, pero para ello hay que recurrir a una fórmula un poco más compleja.

Concretamente, lo que hacemos es combinar la disyunción con una conjunción negada, que bloquea la posibilidad de que los dos disyuntos sean verdaderos al mismo tiempo.

En particular, la proposición (2) se formalizaría mediante:

$$(s \vee t) \wedge \neg(s \wedge t)$$

donde:

s : *Se sigue protegiendo al lince ibérico.*

t : *El lince ibérico se acabará extinguiendo.*

Obviamente, esta formalización implica que o se sigue protegiendo al lince ibérico, o este se extinguirá (es decir, que una de las dos opciones es verdadera); pero además, esta formalización implica también que no van a suceder las dos cosas.

§ 10.3. FORMALIZACIÓN DE DISYUNCIONES ITERADAS

Las disyunciones iteradas *inclusivas* son también muy fáciles de formalizar, aplicando la correspondiente supresión de paréntesis.

Así por ejemplo:

Mañana voy a verte, o te llamo, o te pongo un wassap.

se formalizaría mediante

$$p \vee q \vee r$$

donde:

p : *Mañana voy a verte.*

q : *Mañana te llamo.*

r : *Mañana te pongo un wassap.*

Las disyunciones iteradas *exclusivas* no las vamos a analizar aquí, porque son menos frecuentes (y más complejas, porque hay que especificar si la exclusión afecta a cualesquiera dos disyuntos, o al conjunto de todos ellos, etc).

§ 10.4. FORMALIZACIÓN DE CONDICIONALES: EL CONDICIONAL MATERIAL

Sin duda, la conectiva que más problemas plantea en la formalización es el símbolo condicional. Ello es debido a la regla de valoración 5 que vimos en **§ 7.2** .

En efecto, se sigue de dicha regla que para que una intprop I satisfaga una fórmula $A \rightarrow B$, basta con que *satisfaga* B o *no satisfaga* A. Puesto en otras palabras: para que un condicional $A \rightarrow B$ sea verdadero bajo una interpretación, basta con que esa interpretación haga falso al antecedente (A) o haga verdadero al consecuente (B).

A este tipo de condicional se le llama **"condicional material"** o **"condicional veritativo-funcional"**. Lo más característico de este condicional, y a la vez lo más paradójico, es que **no entraña ninguna relación de relevancia (causal o del tipo que sea) entre A y B**. En efecto, el condicional $A \rightarrow B$ será verdadero si sucede, de hecho, que A es falso, o que B es verdadero, con independencia de todo lo demás.

Por ejemplo, imaginemos que alguien me dice que es espía de la CIA. Y yo, para mostrar mi incredulidad, le respondo:

Si tú eres espía de la CIA, entonces yo soy el Papa. (3)

Es evidente que no hay ninguna relación entre que esa persona sea espía de la CIA y que yo sea el Papa. Por consiguiente, si el condicional (3) es verdadero, ello se debe al hecho de que esa persona no es espía de la CIA, contrariamente a lo que afirma.

Por consiguiente, cabe interpretar (3) como un condicional material, y formalizarlo como:

$$p_1 \rightarrow p_2$$

donde:

p_1 : *Tú eres espía de la CIA.*

p_2 : *Yo soy el Papa.*

En efecto, como el antecedente (p_1) es falso, el condicional resulta automáticamente verdadero, con independencia de lo que ocurra con el consecuente. En este caso, el consecuente (p_2) es también falso, porque obviamente yo no soy el Papa.

§ 10.5. LOS CONDICIONALES EN MATEMÁTICAS Y FUERA DE ELLAS

Curiosamente, el condicional material es el condicional habitual en matemáticas. Así por ejemplo,

$$\textit{Si } n > 4, \textit{ entonces } 2^n > n^2$$

es trivialmente verdadero para $n = 3$, porque no cumple el antecedente. En efecto, como $3 \not> 4$, da igual que el consecuente se cumpla o no (de hecho no se cumple, porque $2^3 < 3^2$).

Ahora bien, cuando estamos fuera de las matemáticas, o de un contexto irónico como (3), tenemos que pensarlo muy bien antes de formalizar una proposición mediante $\rightarrow$.

En efecto, al formalizar una proposición mediante $\rightarrow$, la estamos codificando como un condicional material, es decir, como una mera función de verdad entre antecedente y consecuente. Y al hacerlo, estamos dejando fuera cualquier implicación de causalidad o relevancia que conlleve esa proposición en el lenguaje natural.

Así por ejemplo, supongamos que alguien dice:

Si ahora mismo me llevo las manos a la cabeza,
saldré volando como un pájaro. (4)

Y supongamos que a continuación *no* se lleva las manos a la cabeza.

En ese contexto, pongamos:

p_3 : *Ahora mismo me llevo las manos a la cabeza.*

p_4 : *Saldré volando como un pájaro.*

Pues bien, si formalizamos (4) mediante

$$p_3 \to p_4$$

entonces la hemos reducido a un condicional material. Y por consiguiente, **como esa persona no se ha llevado las manos a la cabeza, tendremos que admitir que $p_3 \to p_4$ es verdadero** (!).

Ello es así, sencillamente, porque tratándose de un condicional material — y aplicando una vez más lo que venimos diciendo —, basta con que el antecedente sea falso para que el condicional resulte verdadero. Y por consiguiente, si de hecho esa persona no se ha llevado las manos a la cabeza, entonces (4), al ser un condicional material, no tiene más remedio que ser verdadero, por muy anti-intuitivo que esto nos resulte.

Por último, conviene señalar que sí hay un aspecto en el cual el condicional material coincide con todas las demás formas de condicionales, y es que **si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, entonces el condicional queda falsado**.

§ 10.6. LOCUCIONES VARIADAS PARA EXPRESAR CONDICIONALES EN EL LENGUAJE NATURAL

Además de la dificultad que acabamos de señalar, también hay que tener en cuenta que las proposiciones condicionales se expresan en el lenguaje natural mediante locuciones muy diversas. Y por esa razón, conviene prestar atención a la hora de identificar antecedente y consecuente, a fin de evitar deslices.

En particular, debemos advertir que, con frecuencia, se suprime el *"entonces"*, dejando en su lugar una simple coma:

Si tú eres espía de la CIA, yo soy el Papa.

Además, hay veces en las que el consecuente se enuncia primero, y la cláusula *"si"*, junto con el antecedente, aparecen detrás:

Yo soy el Papa, si tú eres espía de la CIA.

Y por último, hay veces en que se usa la locución *"solo si"*, y entonces lo que sigue a esa locución es el consecuente:

Tú eres espía de la CIA solo si yo soy el Papa.

Cualquiera de esas tres oraciones corresponden a la proposición, (3), que hemos formalizado como $p_1 \to p_2$.

En este sentido, hay dos reglas que nos interesa recordar:

1. Cuando aparece *"si"* a secas, lo que va justo después es el antecedente.
2. Cuando aparece *"solo si"* (a secas), lo que va justo después es el consecuente.

§ 10.7. EJEMPLOS DE FORMALIZACIÓN DE CONDICIONALES Y BICONDICIONALES

Por **§ 7.3** , sabemos que un bicondicional $A \leftrightarrow B$ viene a ser como una conjunción de condicionales en los dos sentidos:

$$(A \rightarrow B) \land (B \rightarrow A)$$

Por consiguiente, el símbolo bicondicional nos ha de servir para formalizar aquellas proposiciones del lenguaje natural que expresan *condiciones materiales* (es decir, *condiciones veritativo-funcionales*) en los dos sentidos.

Dicho esto, el bicondicional es menos complicado de formalizar que el condicional, porque no hay que identificar antecedente y consecuente, con roles separados: basta con señalizar el primer término y el segundo término del bicondicional, en cualquier orden en el que se presenten.

A continuación, vamos a examinar algunos ejemplos de formalización de proposiciones condicionales y bicondicionales del lenguaje natural. Al hacerlo, tenemos que ser conscientes — una vez más — de que estamos dejando fuera cualquier implicación de relevancia (causal o del tipo que sea) entre las condiciones expresadas.

Empezaremos estableciendo la siguiente tabla de convenciones simbólicas:

p_5 : *Madrid está en España.*

p_{10} : *París está en Francia.*

Y entonces tenemos, por ejemplo:

Si Madrid está en España, París está en Francia: $p_5 \rightarrow p_{10}$

Madrid está en España si París está en Francia: $p_{10} \rightarrow p_5$

Madrid está en España solo si París está en Francia: $p_5 \rightarrow p_{10}$

Solo si Madrid está en España, París está en Francia: $p_{10} \rightarrow p_5$

Madrid está en España si y solo si París está en Francia: $p_5 \leftrightarrow p_{10}$

§ 10.8. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Pon un ejemplo de disyunción en el lenguaje natural que sea inclusiva, y formalízala.
2. Pon un ejemplo de disyunción en el lenguaje natural que sea *exclusiva*, y formalízala.
3. Explica con tus propias palabras por qué $p_3 \rightarrow p_4$ (de **§ 10.5**) resulta verdadero, si de hecho la persona no se lleva las manos a la cabeza.
4. Pon 5 ejemplos de condicionales y bicondicionales variados, al estilo de los que aparecen al final de **§ 10.7**, y formalízalos
5. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.

b) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 11

Dednatprop con primitivas: regla de premisas, modus ponens y modus tollens

§ 11.1. CÁLCULOS DEDUCTIVOS

Llegados a este punto del curso, vamos a empezar a representar en lenprop **cadenas de razonamientos**, que imitarán de alguna manera — aunque con notables diferencias — el razonamiento deductivo humano en el lenguaje natural.

A tal fin, introduciremos varios **cálculos deductivos** (también llamados **"sistemas formales"**, **"sistemas deductivos"** o **"cálculos lógicos"**). Se trata de **conjuntos de reglas sintácticas, asociadas a un lenguaje lógico-formal, que nos permitirán derivar unas fórmulas a partir de otras**.

Al igual que ocurre con los lenguajes formales, los cálculos deductivos tienen que poder describirse completamente sin hacer referencia a ninguna interpretación suya. Por eso son puramente *sintácticos*, es decir, *meras manipulaciones de símbolos*.

A veces, al hecho de proporcionar un cálculo deductivo para un sistema de lógica se le llama *"axiomatizar"* ese sistema. Esta palabra procede de los llamados *"cálculos axiomáticos"*, aunque de hecho, ninguno de los cálculos que vamos a presentar aquí utilizan axiomas.

§ 11.2. EL CÁLCULO DE DEDUCCIÓN NATURAL PARA LA LÓGICA PROPOSICIONAL CLÁSICA

El primer cálculo deductivo que vamos a estudiar es el llamado **"cálculo de deducción natural para la lógica proposicional clásica"** (abreviadamente, **"dednatprop"**).

Este cálculo, en la versión que vamos a manejar aquí, consta de **17 reglas primitivas** y otras tantas **reglas derivadas**. En este tema veremos tres reglas primitivas, las más sencillas. El resto de reglas irán apareciendo a lo largo de los temas siguientes.

Mediante dichas reglas, construiremos lo que vamos a llamar **"deducciones formales"** o **"derivaciones formales"** (abreviadamente, **"deriv"**). En otros cálculos lógicos, en vez de derivaciones se usan *tablas*, *árboles* o construcciones de otro tipo.

En dednatprop, las deducciones constan de líneas separadas, cada una de las cuales contiene una fórmula, y se van colocando verticalmente, una encima de otra.

Además, a la izquierda de cada fórmula debe aparecer el número de línea, y a la derecha debe estar indicada la regla del cálculo que nos permite introducir esa fórmula (así como las líneas a las que se ha aplicado dicha regla, si procede).

A este respecto, es importante tener en cuenta que, en una derivación formal, **no se puede introducir a capricho una nueva fórmula, sino solo en virtud de una regla del cálculo que lo permita**.

A las fórmulas introducidas mediante la llamada *"regla de premisas"*, si las hay, las llamaremos **"premisas de la derivación"**. Enseguida explicaremos en qué consiste dicha regla. Y a la fórmula que ocupa la última línea de la derivación, independientemente de la regla por la que se haya introducido, la llamaremos **"conclusión de la derivación"**.

Por último, a todo esto se añade la llamada **"notación de banderas"**, que nos servirá para acotar *subderivaciones transitorias*, como piezas separadas de la derivación principal. Más adelante veremos cómo funciona.

§ 11.3. DERIVABILIDAD EN DEDNATPROP

Pues bien, dadas dos fórmulas de lenprop, A y B, diremos que B es **"derivable de A en dednatprop"**, cuando exista una deducción cuya única premisa sea A, y cuya conclusión sea B.

Para abreviar esto, utilizaremos la "puerta giratoria sencilla" con el subíndice "DNP" (por "dednatprop"), poniendo:

$$A \vdash_{\text{DNP}} B$$

Más en general, diremos que B es **"derivable de un conjunto de fórmulas D en dednatprop"**, cuando exista una deducción cuyas premisas sean fórmulas de D, y cuya conclusión sea la fórmula B.

Esto lo abreviaremos poniendo:

$$D \vdash_{\text{DNP}} \boxed{B}$$

Y por último, diremos que $\boxed{B}$ es un **"teorema formal de dednatprop"**, cuando exista una deducción **que no use ninguna premisa**, y que termine con la fórmula $\boxed{B}$ como conclusión.

Esto último lo abreviaremos poniendo:

$$\vdash_{\text{DNP}} \boxed{B}$$

§ 11.4. LA REGLA DE PREMISAS

La primera regla de dednatprop que vamos a estudiar es la **regla de premisas** (abreviadamente, **"Pr"**). Se trata de una regla muy importante, porque las derivaciones solo pueden empezar de dos maneras, y esta regla es una de ellas.

Pues bien, como su propio nombre indica, la regla de premisas es la que nos permite **introducir las premisas de la derivación**. Y para hacerlo, solo tenemos que tomar la precaución de escribir a la derecha de cada línea el código Pr, que es el que identifica a esta regla, sin más indicación.

Esquemáticamente:

Pr		
(1)	A	Pr
(2)	B	Pr
	...	

§ 11.5. EJEMPLO DE DERIV CON LA REGLA DE PREMISAS

Así por ejemplo, si queremos derivar un argumento a partir de las premisas p y $p \to q$, empezaremos la derivación poniendo:

(1)	p	Pr
(2)	$p \to q$	Pr

Nótese que aquí tenemos ya una derivación completa, aunque poco significativa. La última fórmula de dicha derivación es $p \to q$, lo cual convierte a esta fórmula en la conclusión de la derivación, aunque sea también, simultáneamente, una premisa.

Por consiguiente, mediante dicha derivación hemos establecido que:

$$p \ , \ p \to q \vdash_{\text{DNP}} p \to q$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que colocar premisas en una deriv, no obliga necesariamente a que estas sean relevantes para la misma. En particular, en la derivación anterior, la premisa p es irrelevante para introducir la conclusión.

En este aspecto, nuestro cálculo se parece al lenguaje natural: nuestro cálculo admite la presencia de premisas irrelevantes en las derivaciones formales, al igual que algunos razonamientos en el lenguaje natural empiezan con premisas que luego resultan ser irrelevantes.

§ 11.6. EL MODUS PONENS

La siguiente regla que vamos a introducir se llama **"modus ponens"** (abreviadamente **MP**), y su funcionamiento es el siguiente.

Sean A y B dos flas cualesquiera de lenprop. Y supongamos que en una línea de una deducción tenemos la fla $A \to B$, y en otra línea tenemos la fla A. El hecho de que una de estas flas aparezca antes o después de la otra es indiferente.

Pues bien, en ese caso podemos añadir una nueva línea a la deducción, con la fla B. Al hacerlo, pondremos a la derecha de esta línea la inscripción *"MP"*, seguida por los números de línea de las flas A y $A \to B$.

Esquemáticamente:

MP

(. . .)	$A \to B$	
(. . .)	A	
	B	MP *núms. de línea de* $A \to B$ *y* A

§ 11.7. PREMISAS Y CONCLUSIÓN DE UNA REGLA

En este contexto, a las fórmulas $A \to B$ y A las llamamos **"premisas del modus ponens"**. Y a la fórmula B la llamamos **"conclusión del modus ponens"**.

Y lo otro tanto haremos con el resto de reglas que vienen a continuación: llamaremos *"premisas de la regla"* a las fórmulas a las que aplica la regla, y *"conclusión de la regla"* a la fórmula que se obtiene de dicha aplicación.

Naturalmente, en cualquier derivación habrá que poner atención para diferenciar entre las premisas y conclusión de cada regla que se ha ido aplicando, y las premisas y conclusión de la derivación en su conjunto. Son cosas distintas.

§ 11.8. EJEMPLO DE DERIV CON EL MODUS PONENS

El modus ponens nos permite continuar la derivación del ejemplo anterior, construyendo otra deriv más larga a partir de ella.

Para ello, ponemos:

(1)	p	Pr
(2)	$p \to q$	Pr
(3)	q	MP 1,2

Obviamente, la última fórmula de esta nueva derivación es q. Por consiguiente, mediante esta derivación hemos establecido que:

$$p \,,\; p \to q \vdash_{\text{DNP}} q$$

§ 11.9. EL MODUS TOLLENS

La siguiente regla que vamos a introducir se llama **“modus tollens”** (abreviadamente, **“MT”**), y es contrapuesta a la anterior.

En efecto, sean A y B dos flas cualesquiera de lenprop. Y supongamos que en una línea de la deducción tenemos la fla $A \to B$, y en otra línea tenemos la fla $\neg B$.

Al igual que con MP, el hecho de que aparezca una de estas dos flas antes o después que la otra, es indiferente. Y lo mismo se aplica al resto de reglas de dednatprop que veamos después, tanto primitivas como derivadas: **el orden en que aparezcan las premisas de una regla es indiferente, siempre que aparezcan *antes* del momento en que aplicamos esa regla**.

Pues bien, cuando sucede todo eso, podemos añadir una nueva línea a la deducción, con la fla $\neg A$. Y al hacerlo, pondremos a la derecha de esta línea la inscripción *“MT”*, seguida por los números de línea de las flas $A \to B$ y $\neg B$.

Esquemáticamente:

MT

(...)	$A \to B$	
(...)	$\neg B$	
	$\neg A$	MT *núms. de línea de* $A \to B$ *y* $\neg B$

§ 11.10. EL MODUS TOLLENS COMO MECANISMO DE FALSACIÓN

El modus tollens se ha vindicado como herramienta especialmente importante en filosofía de la ciencia, a modo de *mecanismo de falsación*. La razón es que, en apariencia, una sola instancia en contra de una hipótesis condicional sirve para "falsarla", mientras que la verificación por medio de casos favorables nunca es definitiva del todo.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que las hipótesis científicas se contrastan siempre en conjunción con muchos supuestos. Y en consecuencia, ningún resultado observacional, favorable o adverso a una hipótesis, constituye una confirmación o una falsación definitiva a esa hipótesis específicamente.

Más bien hay que decir que el resultado observacional será una confirmación, o una falsación, del **bloque** que forma esa hipótesis junto con todos los supuestos involucrados en la interpretación del resultado. Esto vale tanto para hipótesis que tengan forma de condicional, como para cualquier otra forma lógica.

§ 11.11. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Siguiendo el ejemplo de **§ 11.4**, elabora una derivación formal que demuestre:

$$q \vee r \ , \ \neg q \vdash_{\text{DNP}} \neg q$$

2. Siguiendo el ejemplo de **§ 11.6**, elabora una derivación formal que demuestre:

$$q \vee r \ , \ q \vee r \rightarrow s \vdash_{\text{DNP}} s$$

3. Pon un ejemplo de derivación que utilize el modus tollens.

4. Basándote en el ejemplo de **§ 11.4**, construye una derivación que sea todavía más corta que ese ejemplo. Indica cuáles son las premisas y la conclusión de tu derivación.

5. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Expresa tu opinión sobre lo que se explica en **§ 11.10**, aportando lo que se te ocurra al respecto.

   b) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.

   c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

   d) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 12

Dednatprop con primitivas: doble negación, supuestos y prueba condicional

§ 12.1. LA DOBLE NEGACIÓN

En este tema vamos a introducir otras cuatro reglas primitivas de dednat. Las dos primeras afectan a la llamada *"doble negación"*.

Normalmente, en el lenguaje ordinario, negar algo dos veces equivale a afirmarlo. En efecto, supongamos que alguien dice *"No estuve allí"* y se demuestra que miente. Entonces es que sí estuvo.

Por consiguiente, la proposición, doblemente negativa:

No es cierto que no estuvo allí.

equivale a la afirmación (simple):

Estuvo allí.

Pues bien, en las derivaciones formales también aparecen a veces dobles negaciones, y nos interesa eliminarlas de la misma manera.

Como también hay veces en las que nos puede interesar, en el transcurso de una derivación, introducir la doble negación de una fórmula, si es que ello nos ayuda a acercarnos a la conclusión que buscamos.

§ 12.2. INTRODUCCIÓN DE LA DOBLE NEGACIÓN

Pues bien, para realizar estas operaciones en las derivaciones, vamos a introducir una pareja de reglas: la regla de **introducción de la doble negación** y la regla de **eliminación de la doble negación**.

El funcionamiento de estas dos reglas es tan similar, que las llamaremos a ambas, genéricamente, **"reglas de doble negación"** (y las abreviaremos como **"DN"**), aunque estrictamente hablando se trata de dos reglas distintas.

Vamos a explicar, en primer lugar, la regla de introducción.

Supongamos que A es una fórmula cualquiera que aparece en una línea de una deducción. Pues bien, entonces podemos añadir una nueva línea a esa deducción, con la fórmula $\neg\neg A$. Al hacerlo, pondremos a la derecha de esa línea la inscripción *"DN"*, seguida por el número de línea de la fla A.

Esquemáticamente:

DN (introducción)

$(\ldots)$	A	
	$\neg\neg A$	DN *núm. de línea de* A

Es importante advertir que, para poder aplicar la introducción de la doble negación a una fórmula A, es necesario que esta fórmula aparezca como línea en una derivación.

En particular, **la regla DN no permite introducir dobles negaciones a las subfórmulas que están en el interior de una fórmula**. Solamente se puede aplicar a la *fórmula entera* que aparezca en una línea de una derivación.

Lo mismo ocurre con la regla de eliminación de la doble negación, que vamos a ver a continuación, y con otras reglas similares.

§ 12.3. ELIMINACIÓN DE LA DOBLE NEGACIÓN

Por su parte, la regla de **eliminación de la doble negación** procede de forma parecida a la regla de introducción, pero a la inversa.

En efecto, sea A una fórmula cualquiera de lenprop, y supongamos que la fórmula $\neg\neg A$ aparece en una línea de una deducción. Pues bien, entonces podemos añadir una nueva línea a esa deducción, con la fórmula A. Al hacerlo, pondremos a la derecha de esta línea la inscripción *"DN"*, seguida por el número de línea de la fla $\neg\neg A$.

Esquemáticamente:

DN (eliminación)

$(\ldots)$	$\neg\neg A$	
	A	DN *núm. de línea de* $\neg\neg A$

§ 12.4. EJEMPLOS DE DERIVACIONES CON LAS REGLAS DE DOBLE NEGACIÓN

Un ejemplo muy sencillo de derivación que utiliza las dos reglas de doble negación, es el siguiente:

(1)	p	Pr
(2)	$\neg\neg p$	DN 1
(3)	p	DN 2

En este caso, la conclusión de la deriv es la misma que la premisa, con lo que no se puede decir que hayamos llegado muy lejos; pero valga como ejemplo de derivación formal en la que se utilizan las dos reglas DN que acabamos de introducir.

Otro ejemplo, un poco más sofisticado, es:

(1)	$\neg p \to q$	Pr
(2)	$\neg q$	Pr
(3)	$\neg\neg p$	MT 1,2
(4)	p	DN 3

Esa derivación es más interesante que la anterior. Mediante ella, hemos establecido que:

$$\neg p \to q \;,\; \neg q \vdash_{\text{DNP}} p$$

§ 12.5. LA REGLA DE SUPUESTOS

A veces, cuando razonamos en el lenguaje natural, nos detenemos a considerar una hipótesis de forma transitoria, *por mor del argumento*, para ver a qué conclusión nos lleva. Y a continuación, volvemos al razonamiento principal, teniendo en cuenta las consecuencias que hemos extraído a partir de esa hipótesis transitoria, en nuestra exploración colateral.

Pues bien, la siguiente la regla que vamos a estudiar es un correlato formal de esa estrategia de razonamiento. Se trata de la **regla de supuestos** (o **regla S**).

La regla de supuestos nos permite introducir una fórmula cualquiera A como **supuesto provisional**, del cual esperamos extraer una fórmula B como **conclusión transitoria**. A la conclusión transitoria la llamamos también el **“objetivo”** del supuesto provisional.

El supuesto provisional se recuadra, como si fuera una bandera. Y a la derecha del mismo escribimos la letra "*S*", seguida de la palabra **"hacia"**, y el *objetivo* al que queremos llegar. Opcionalmente, por abreviar, en vez de *"objetivo"* podemos poner **"target"**, y en vez de escribir *"hacia"* podemos poner **"to"**.

A partir de ese momento, comienza una **subderivación transitoria**, que terminará cuando consigamos derivar la conclusión (o *target*) que buscamos. Y el "asta" de la bandera acompañará la subderivación a la izquierda, señalizándola hasta que se introduzca esa conclusión.

Esquemáticamente:

S

(. . .)	$\boxed{A}$	S hacia B
(. . .)	. . .	
(. . .)	B	

. . .

Para llegar al target deseado (es decir, a la fórmula B, en este esquema), nos las tenemos que ingeniar. Eso significa que tenemos que barajar las distintas reglas de dednatprop, hasta encontrar una ruta que nos permita derivar esa fórmula. Y solo si lo conseguimos, podemos decir que *"tenemos una bandera que nos lleva de A a B"*.

La regla de supuestos es bastante más compleja que las anteriores. Se entenderá mejor su dinámica a partir de los ejemplos de uso que vayamos viendo.

§ 12.6. ENGRANAJE DE LA REGLA DE SUPUESTOS CON OTRAS REGLAS Y CON LA DERIVACIÓN PRINCIPAL

Hay que subrayar que, cuando se abre una bandera mediante la regla de supuestos, lo que comienza a continuación es una *subderivación transitoria*, y como tal *no forma parte de la derivación principal*.

También conviene advertir que algunas derivaciones complicadas contienen una subderivación dentro de otra (es decir, *"subderivaciones anidadas"*). Veremos ejemplos de ello más adelante.

En todo caso, **ninguna derivación que contenga banderas puede terminar hasta que estas se hayan cerrado, y haya aparecido alguna fórmula que esté fuera de todas ellas**.

Y por último, hay que tener en cuenta que para que las conclusiones transitorias (o targets) resulten de utilidad en la derivación principal, necesitamos reglas que nos permitan sacar otras conclusiones a partir de ellas (necesitamos *"hacer caja"* de esas conclusiones transitorias, por así decirlo). Pues bien, en dednatprop **hay 3 reglas que se engranan con la regla de supuestos**, para hacer justamente eso. Y a continuación vamos a estudiar la primera de ellas.

§ 12.7. PRUEBA CONDICIONAL

Para aplicar la llamada **"prueba condicional"** (abreviadamente, **"PCo"**), tenemos que dar los siguientes pasos.

Sean A y B dos fórmulas cualesquiera, e imaginemos que, en el transcurso de una derivación, necesitamos obtener la fórmula $A \to B$. Pues bien, el procedimiento para obtener esta fórmula mediante la regla PCo, es el siguiente.

En primer lugar, introducimos la fórmula A mediante la regla de supuestos, indicando que se introduce para llegar al target B. Y a continuación, intentaremos derivar la fórmula B a partir de ese supuesto inicial, utilizando el conjunto de todas las reglas, así como las fórmulas previas de esa derivación.

Si conseguimos derivar B, habremos terminado la subderivación transitoria. Es decir, tendremos una bandera que empieza por la fórmula A y termina con la fórmula B.

Pues bien, en ese caso, la regla PCo nos permite introducir a continuación la línea $A \to B$, *por debajo de esa bandera, y fuera de ella.*

A la derecha de esa nueva línea, colocaremos la indicación *"PCo"*, junto con los números de línea de A y B (es decir, la primera y última línea de la bandera que acabamos de cerrar).

Esquemáticamente:

PCo

(...)	$\boxed{A}$	S hacia B
(...)	...	
(...)	B	
(...)	$A \to B$	PCo *núms. de línea de* A *y* B

§ 12.8. EJEMPLOS DE DERIVACIÓN CON LA PRUEBA CONDICIONAL

Como primer ejemplo de deriv con PCo, vamos a elaborar una derivación para demostrar que:

$$\vdash_{\text{DNP}} p \to \neg\neg p$$

Obsérvese que se trata de una derivación sin premisas. Por lo tanto, este será el primer *teorema formal* de dednatprop que vamos a derivar (es decir, nuestro primer *argumento formal sin premisas*).

Pues bien, para derivar este teorema, basta con poner:

(1)	$\boxed{p}$	S hacia $\neg\neg p$
(2)	$\neg\neg p$	DN 1
(3)	$p \to \neg\neg p$	PCo 1,2

Como vemos, esta bandera consta de dos únicos pasos: el supuesto provisional (es decir, la línea 1 que aparece recuadrada), y la conclusión transitoria, que obtenemos en la línea 2, mediante la regla DN. Y con esto, se cierra la bandera y continúa la derivación principal.

A continuación, observamos que se ha aplicado la regla PCo, obteniendo un condicional que tiene como antecedente al supuesto provisional (es decir, la fla p), y como consecuente a la conclusión transitoria (es decir, la fla $\neg\neg p$).

Y dado que ese condicional se encuentra ya fuera de la bandera, y forma parte de la derivación principal, la derivación puede terminar ahí.

Como segundo ejemplo de deriv con PCo, vamos a elaborar una derivación para demostrar que:

$$p \to q \ \vdash_{\text{DNP}} \ \neg q \ \to \ \neg p$$

Pues bien, para derivar esto, ponemos:

(1)	$p \to q$	Pr
(2)	$\boxed{\neg q}$	S hacia $\neg p$
(3)	$\mid\ \neg p$	MT 1,2
(4)	$\neg q \to \neg p$	PCo 2,3

§ 12.9. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Siguiendo los ejemplos de **§ 12.4** , construye una derivación para demostrar que:

$$p \ \vdash_{\text{DNP}} \ \neg\neg p$$

2. Siguiendo los ejemplos de § **12.4** , construye una derivación para demostrar que:

$$\boxed{p \to q}\ ,\ \boxed{\neg\neg p}\ \vdash_{\text{DNP}}\ \boxed{\neg\neg q}$$

3. Siguiendo los ejemplos de § **12.8** , construye una derivación para demostrar que:

$$\boxed{p \to \neg q}\ \vdash_{\text{DNP}}\ \boxed{q \to \neg p}$$

4. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Construye una derivación, lo más compleja que se te ocurra, con las reglas de dednatprop vistas hasta ahora.

   b) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.

   c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

   d) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 13

Dednatprop con primitivas: reglas de intro y elim de conjunción y disyunción

§ 13.1. INTRODUCCIÓN DE LA CONJUNCIÓN

En este tema, vamos a exponer seis nuevas reglas del cálculo. Tres de ellas serán relativas a la introducción y eliminación del símbolo de conjunción; y las otras tres serán relativas a la introducción y eliminación del símbolo de disyunción.

Empezaremos por la **regla de introducción de la conjunción** (abreviadamente, **"intro de la conjunción"**, o **"I∧"**). Esta regla es sumamente sencilla.

Supongamos que las fórmulas A y B aparecen en dos líneas de una derivación. Como dijimos en **§ 11.9**, en estos casos no importa el orden (no importa cuál de las dos fórmulas aparezca primero).

Pues bien, entonces podemos introducir una nueva línea en la derivación, con la fórmula $A \wedge B$, colocando a su derecha la inscripción

"$I\wedge$", seguida de los números de líneas de las fórmulas A y B.

Esquemáticamente:

I∧

$(\dots)$	A	
$(\dots)$	B	
	$A \wedge B$	I$\wedge$ *núms. de línea de* A *y* B

Así por ejemplo, resulta sumamente sencillo elaborar una derivación para demostrar que:

$$p\,,\; q \vdash_{\text{DNP}} p \wedge q$$

En efecto, basta con poner:

(1)	p	Pr
(2)	q	Pr
(3)	$p \wedge q$	I$\wedge$ 1,2

§ 13.2. ELIMINACIÓN DE LA CONJUNCIÓN

A continuación, vamos a formular dos reglas para la *eliminación de la conjunción*: la **eliminación del primer conyunto** y la **eliminación del segundo conyunto**.

Aunque se trata de dos reglas distintas, su funcionamiento es tan similar que las llamaremos a ambas, genéricamente, **“eliminación de la conjunción”** (abreviadamente, **“elim de la conjunción”**, o **“E$\wedge$”**).

Pues bien, supongamos que tenemos la fórmula $A \wedge B$ en una línea de una derivación. Entonces, la regla de eliminación del primer conyunto nos permite añadir una nueva línea que contenga la fórmula A.

A la derecha de esa nueva línea, colocaremos la inscripción “$E\wedge$”, seguida del número de la línea de la fórmula $A \wedge B$.

Esquemáticamente:

E$\wedge$, primer conyunto

(...)	$A \wedge B$	
	A	E$\wedge$ *núm. de línea de* $A \wedge B$

Por su parte, la regla de eliminación del segundo conyunto es totalmente análoga, excepto que en la línea añadida, en lugar de aparecer el primer conyunto de la conjunción, aparece el segundo.

Esquemáticamente:

E∧, segundo conyunto

(...)	$A \wedge B$	
	B	E∧ *núm. de línea de* $A \wedge B$

§ 13.3. EJEMPLOS DE DERIVACIONES CON LAS REGLAS DE ELIM DE LA CONJUNCIÓN

Empezamos elaborando una derivación para demostrar que:

$$p \wedge q\ ,\ \vdash_{\text{DNP}}\ p$$

Esto es realmente sencillo:

(1)	$p \wedge q$	Pr
(2)	p	E∧ 1

A continuación, veremos un ejemplo de derivación ligeramente más sofisticada, en la que también interviene la regla $E\wedge$. Es la derivación que nos permite demostrar que:

$$p \to q \wedge r\ ,\ p\ \vdash_{\text{DNP}}\ q$$

La derivación en cuestión es la siguiente:

(1)	$p \to q \wedge r$	Pr
(2)	p	Pr
(3)	$q \wedge r$	MP 1,2
(4)	q	$E\wedge 1$

§ 13.4. INTRODUCCIÓN DE LA DISYUNCIÓN POR LA DERECHA

A continuación, vamos a formular dos reglas para la *introducción de la disyunción*: la **introducción de la disyunción por la derecha** y la **introducción de la disyunción por la izquierda**.

Aquí también tenemos dos reglas distintas, pero con un funcionamiento muy similar. Por eso, una vez más, les vamos a dar un solo nombre a las dos: las vamos a llamar a ambas, genéricamente, **"introducción de la disyunción"** (abreviadamente, **"intro de la disyunción"**, o **"I∨"**).

Pues bien, supongamos que tenemos la fórmula A en una línea de una derivación. Y sea B cualquier fórmula. Pues bien, la regla $I\vee$ por la derecha nos permite añadir una línea que contenga la fórmula $A \vee B$. A la derecha de esa nueva línea, colocaremos la inscripción "$I\vee$", seguida del número de la línea de la fórmula A.

Esquemáticamente:

I∨ por la derecha

(...)	A	
	$A \vee B$	I∨ *núm. de línea de* A

§ 13.5. INTRODUCCIÓN DE LA DISYUNCIÓN POR LA IZQUIERDA

Por su parte, la regla $I\vee$ por la izquierda consiste en lo siguiente.

Supongamos que tenemos la fórmula A en una línea de una derivación. Y sea B cualquier fórmula. Pues bien, la regla $I\vee$ por la izquierda nos permite añadir una línea que contenga la fórmula $B \vee A$. A la derecha de la nueva línea, colocaremos la inscripción "$I\vee$", seguida del número de la línea de la fórmula A.

Esquemáticamente:

I$\vee$ por la derecha

$(\dots)$	A	
	$\overline{}$	
	$B \vee A$	I$\vee$ *núm. de línea de* A

§ 13.6. EJEMPLOS DE DERIVACIONES CON LAS REGLAS INTRO DE LA DISYUNCIÓN

Vamos a empezar elaborando una derivación para demostrar que:

$$p \vdash_{\text{DNP}} p \vee q$$

Esto es sumamente sencillo:

(1)	p	Pr
(2)	$p \vee q$	E$\vee$ 1

Un ejemplo un poquito más sofisticado es el que nos permite demostrar que:

$$p \; , \; p \vee q \to r \; \vdash_{\text{DNP}} \; r$$

Pues bien, la deducción correspondiente es:

(1)	p	Pr
(2)	$p \vee q \to r$	Pr
(3)	$p \vee q$	I$\vee$ 1
(4)	r	MP 2,3

§ 13.7. LA PRUEBA DE CASOS: PRELIMINARES

Finalmente, a la regla de **eliminación de la disyunción** la vamos a llamar por un nombre especial, que describe muy bien su funcionamiento: **"prueba de casos"** (abreviadamente, **PCa**).

De todas las reglas de dednatprop, esta es la más difícil de usar. Al igual que la prueba condicional, la regla de casos engarza con la regla de supuestos. Pero en esta ocasión, tendremos que usar la regla de supuestos dos veces seguidas, lo cual dará lugar a dos subderivaciones transitorias consecutivas, antes de continuar con la derivación principal.

La prueba de casos mimetiza cierta forma de razonamiento en el lenguaje natural, en la cual examinamos dos opciones o alternativas, y concluimos que de las dos se sigue una misma cosa. Por ejemplo:

Esta tarde voy a pasear o a meditar.
Pasear es gratis, y meditar también.
Por lo tanto, esta tarde no gastaré dinero.

En el razonamiento precedente, se parte de una disyunción entre dos opciones. A continuación, se examinan cada una de esas dos opciones, y de las dos se extrae una misma conclusión. Finalmente, se afirma esa conclusión, sobre la base de la disyunción inicial.

Pues bien, este tipo de estrategia es la que viene a representar la prueba de casos, pero en el contexto de las derivaciones formales.

§ 13.8. LA PRUEBA DE CASOS: DINÁMICA DE LA PRUEBA

Sean entonces A y B fórmulas cualesquiera, y supongamos que en una línea de una derivación tenemos la fórmula $A \vee B$.

En estas condiciones, para poder aplicar la regla PCa, tenemos dar los siguientes pasos.

En primer lugar, tenemos que pensar en una fórmula C que podamos derivar tanto de A como de B, y que nos ayude a completar la derivación que tenemos entre manos. Esta fórmula será el **objetivo** (o ***target***) de esa aplicación de la PCa.

La propia regla PCa no nos dice qué fórmula tenemos que escoger como *target*. Dependiendo del resultado final que busquemos en la derivación, y dependiendo de nuestra experiencia con dednatprop, tendremos que hacer diferentes ensayos hasta dar con la fórmula adecuada en cada caso.

Una vez elegido el *target* (digamos, C), introducimos A como supuesto, indicando que va "hacia" C. A continuación, trataremos de derivar C, usando el supuesto A junto con el resto de reglas a nuestro alcance.

Cuando hayamos conseguido derivar C en dependencia del supuesto A, cerraremos la primera bandera.

A continuación, repetiremos la operación con el segundo disyunto. Es decir, introduciremos la fla B como supuesto, indicando que va "hacia" el target C (tiene que ser el mismo que en la primera bandera). Y entonces, trataremos de derivar C, usando el supuesto B junto con el resto de reglas a nuestro alcance.

Cuando hayamos conseguido derivar C en dependencia del supuesto B, cerraremos la segunda bandera.

Y por último, tras cerrar la segunda bandera, introduciremos una nueva línea en la que repetiremos por tercera vez la fórmula C. Pero esta vez, pondremos a la derecha de esa fórmula que la hemos obtenido por la regla $E\vee$, e indicaremos los números de línea de $A \vee B$, así como de inicio y fin de cada una de las dos banderas que acabamos de cerrar.

Esquemáticamente, el funcionamiento de esta regla se describe así:

PCa

(...)	$A \vee B$	
(...)	$\boxed{A}$	S hacia C
(...)	...	
(...)	C	
(...)	$\boxed{B}$	S hacia C
(...)	...	
(...)	C	
(...)	C	PC *núms. de línea de* $A \wedge B$ *y las dos banderas*

§ 13.9. EJEMPLO DE DERIVACIÓN MEDIANTE LA PRUEBA DE CASOS

Un ejemplo sencillo de derivación mediante PCa, es la que nos permite probar que:

$$p \vee q \ \vdash_{\text{DNP}} \ q \vee p$$

En efecto, para ello ponemos:

(1)	$p \lor q$	Pr
(2)	$\boxed{p}$	S hacia $q \lor p$
(3)	$\quad q \lor p$	I$\lor$ 2
(4)	$\boxed{q}$	S hacia $q \lor p$
(5)	$\quad q \lor p$	I$\lor$ 3
(6)	$q \lor p$	PCa 1,2–3,4–5

§ 13.10. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Construye una derivación para demostrar que:

$$p \ , \ q \ , \ p \land q \to r \land s \ \vdash_{\text{DNP}} s$$

2. Construye una derivación para demostrar que:

$$p \to q \ , \ \neg q \ \vdash_{\text{DNP}} r \lor \neg p$$

3. Construye una derivación para demostrar que:

$$p \lor q \ , \ p \to r \ , \ q \to r \ \vdash_{\text{DNP}} r$$

4. Construye una derivación para demostrar que:

$$p \lor q \ \vdash_{\text{DNP}} \neg\neg p \lor \neg\neg q$$

5. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Construye una o dos derivaciones adicionales que usen la regla PCa, tan complicadas como se te ocurran.

   b) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.

   c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

   d) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 14

Dednatprop con primitivas: intro y elim de bicondic y reducción al absurdo

§ 14.1. INTRODUCCIÓN DEL BICONDICIONAL

Supongamos que tenemos las fórmulas $A \to B$ y $B \to A$ como líneas separadas en una deducción (nuevamente, sin importar el orden).

Pues bien, en ese caso, la regla de **introducción del bicondicional** (abreviadamente, **intro de bicondic**, o **"I↔"**) nos permite introducir una línea nueva con el bicondicional $A \leftrightarrow B$. A la derecha de la nueva línea introducida pondremos la inscripción "I↔", y el número de las dos líneas en las que se ha basado la aplicación de esta regla.

Esquemáticamente:

I↔

(. . .) $A \to B$

(. . .) $B \to A$

$A \leftrightarrow B$ I↔ *núms. de línea de* A *y* B

Por ejemplo, es inmediato elaborar una derivación para demostrar que:

$$p \to q \,,\; q \to p \vdash_{\text{DNP}} p \leftrightarrow q$$

En efecto, basta con poner:

(1) $p \to q$ Pr

(2) $q \to p$ Pr

(3) $p \leftrightarrow q$ I↔ 1,2

§ 14.2. ELIMINACIÓN DEL BICONDICIONAL

A continuación, vamos a formular dos reglas para la *eliminación del bicondicional*: la **eliminación del bicondicional de izquierda a derecha**, y la **eliminación del bicondicional de derecha a izquierda**.

Como ocurría anteriormente con las reglas DN, $E\vee$, etc, las reglas de eliminación del bicondicional constituyen una pareja de reglas distintas. Pero su funcionamiento es tan similar, que las llamaremos a ambas genéricamente **"eliminación del bicondicional"** (abreviadamente, **"elim de bicondic"**, o **"E↔"**).

Pues bien, supongamos que tenemos la fórmula $A \leftrightarrow B$ en una línea de una derivación. Entonces, la regla de $E \leftrightarrow$ de izda a dcha nos permite añadir una línea que contenga la fórmula $A \to B$. A la derecha de esa fórmula colocaremos la inscripción "E↔", seguida del número de la línea de la fórmula $A \leftrightarrow B$.

Esquemáticamente:

E↔ de izda a dcha

(. . .)	$A \leftrightarrow B$	
	$A \to B$	E↔ *núm. de línea de* $A \leftrightarrow B$

Y por su parte, la regla $E \leftrightarrow$ de dcha a izda es enteramente análoga, excepto por la fla que se obtienen como conclusión.

Esquemáticamente:

E↔ de dcha a izda

(. . .)	$A \leftrightarrow B$	
	$B \to A$	E↔ *núm. de línea de* $A \leftrightarrow B$

§ 14.3. EJEMPLOS DE DERIVACIONES CON LA REGLA DE ELIMINACIÓN DEL BICONDICIONAL

Vamos a empezar elaborando una derivación para demostrar que:

$$p \leftrightarrow q \vdash_{\text{DNP}} p \rightarrow q$$

Esto es sumamente sencillo:

(1) $p \leftrightarrow q$ Pr

(2) $p \rightarrow q$ E↔ 1

A continuación, veremos un ejemplo ligeramente más complejo: una derivación para demostrar que:

$$p \leftrightarrow q \,,\, p \,,\, r \leftrightarrow q \vdash_{\text{DNP}} r$$

Pues bien, la derivación correspondiente sería:

(1) $p \leftrightarrow q$ Pr

(2) p Pr

(3) $r \leftrightarrow q$ Pr

(4) $p \rightarrow q$ E↔ 1

(5) q MP 2,4

(6) $q \rightarrow r$ E↔ 3

(7) r MP 5,6

§ 14.4. LA REGLA DE REDUCCIÓN AL ABSURDO

Cuando una suposición lleva a un absurdo, esa suposición no puede ser cierta.

Por ejemplo: se busca a alguien por asesinato, pero luego se descubre que esa persona había muerto un año antes de que se produjera el crimen. Pues bien, en ese momento se desecha la hipótesis inicial. Esa persona no cometió el crimen, porque sería absurdo pensar que lo hizo después de muerta.

La regla de **reducción al absurdo** (abreviadamente, **RA**) es un reflejo de esta forma de razonamiento, adaptada a las derivaciones formales.

En la versión de dednatprop que estamos estudiando aquí, *RA* es la tercera y última regla que engarza con la regla de supuestos.

Su funcionamiento es el siguiente.

Para empezar, introducimos una fórmula A mediante la regla de supuestos, poniendo como target una contradicción, $B \wedge \neg B$ (siendo B cualquier fórmula).

Pues bien, si conseguimos obtener dicha contradicción, cerramos la bandera. Y a continuación, introducimos una nueva línea, ya en la derivación principal, con la fórmula $\neg A$. A la derecha de esta última fórmula indicamos que la hemos obtenido por la regla *RA*, y colocamos los números de inicio y fin de la bandera en cuestión.

Esquemáticamente:

RA

$(\dots)$	$\boxed{A}$	S hacia $B \land \neg B$
$(\dots)$	$\quad \dots$	
$(\dots)$	$\quad B \land \neg B$	
$(\dots)$	$\neg A$	RA *núms. de línea de* A *y* $B \land \neg B$

§ 14.5. EJEMPLOS DE DERIVACIONES MEDIANTE REDUCCIÓN AL ABSURDO

Como primer ejemplo, vamos a elaborar una derivación para demostrar que:

$$p \lor q \to r \;,\; \neg r \;\vdash_{\text{DNP}}\; \neg p$$

Pues bien, basta con poner:

(1)	$p \lor q \to r$	Pr
(2)	$\neg r$	Pr
(3)	$\boxed{p}$	S hacia $r \land \neg r$
(4)	$\quad p \lor q$	I$\lor$ 3
(5)	$\quad r$	MP 1,4
(6)	$\quad r \land \neg r$	I$\land$ 2,5
(7)	$\neg p$	RA 3,6

A continuación, vamos a elaborar una derivación para demostrar que:

$$p \to q \,,\ p \to \neg q \ \vdash_{\text{DNP}} \ \neg p$$

Pues bien, basta con poner:

(1)	$p \to q$	Pr
(2)	$p \to \neg q$	Pr
(3)	$\boxed{p}$	S hacia $q \wedge \neg q$
(4)	q	MP 1,3
(5)	$\neg q$	MP 2,3
(6)	$q \wedge \neg q$	I$\wedge$ 4,5
(7)	$\neg p$	RA 3,6

Y por último, vamos a elaborar una derivación para demostrar que:

$$p \wedge q \to r \,,\ p \,,\ \neg r \ \vdash_{\text{DNP}} \ \neg q$$

Pues bien, basta con poner:

(1)	$p \wedge q \to r$	Pr
(2)	p	Pr
(3)	$\neg r$	Pr
(4)	$\boxed{q}$	S hacia $r \wedge \neg r$
(5)	$\quad p \wedge q$	I$\wedge$ 2,4
(6)	$\quad r$	MP 1,5
(7)	$\quad r \wedge \neg r$	I$\wedge$ 3,6
(8)	$\neg q$	RA 4,7

§ 14.6. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Siguiendo el ejemplo de **§ 14.1**, construye una derivación para demostrar que:

$$\neg\neg(p \to q)\ ,\ \neg\neg(q \to p)\ \vdash_{\text{DNP}}\ p \leftrightarrow q$$

2. Siguiendo los ejemplos de **§ 14.3**, construye una derivación para demostrar que:

$$p \leftrightarrow q\ ,\ \neg\neg p\ \vdash_{\text{DNP}}\ \neg\neg q$$

3. Siguiendo los ejemplos de **§ 14.5**, construye una derivación para demostrar que:

$$p \to q\ ,\ q \to r\ ,\ \neg r\ \vdash_{\text{DNP}}\ \neg p$$

4. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

    a) Elabora una o dos derivaciones adicionales que usen la regla RA, tan complicadas como se te ocurran.

    b) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.

    c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

    d) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 15

Más ejemplos de formalización y derivación en dednatprop con primitivas

§ 15.1. EJEMPLO ADICIONAL DE FORMALIZACIÓN Y DERIVACIÓN EN DEDNATPROP CON REGLAS PRIMITIVAS

Como primer ejemplo, vamos a empezar formalizando el siguiente argumento, y a continuación demostraremos que es derivable en dednatprop con reglas primitivas

Si Juan fue a la fiesta, entonces no fue Pedro.
Pedro fue a la fiesta.
Por lo tanto, Juan no fue.

Empezamos estableciendo la correspondiente tabla de convenciones simbólicas:

$$p \;:\; \textit{Juan fue a la fiesta.}$$

$$q \;:\; \textit{Pedro fue a la fiesta.}$$

A continuación, procedemos a la formalización del argumento:

$$p \to \neg q \;,\; q \;\vdash_{\text{DNP}}\; \neg p$$

Y por último, procedemos a construir una derivación de dicho argumento en dednatprop:

(1)	$p \to \neg q$	Pr
(2)	q	Pr
(3)	$\neg\neg q$	DN 2
(4)	$\neg p$	MT 1,3

§ 15.2. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN Y DERIVACIÓN EN DEDNATPROP CON REGLAS PRIMITIVAS

A continuación, vamos a formalizar y derivar este otro argumento:

Si Juan fue a la fiesta, entonces no fue Pedro.
Por lo tanto, si Pedro fue a la fiesta, entonces no fue Juan.

Como convenciones simbólicas, mantenemos las mismas que en el ejemplo anterior. Sin embargo, en este caso la formalización es ligeramente distinta:

$$p \to \neg q \;\vdash_{\text{DNP}}\; q \to \neg p$$

Por consiguiente, la derivación también será algo diferente:

(1)	$p \to \neg q$	Pr
(2)	q	S hacia $\neg p$
(3)	$\neg\neg q$	DN 2
(4)	$\neg p$	MT 1,3
(5)	$q \to \neg p$	PCo 2,4

§ 15.3. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN Y DERIVACIÓN EN DEDNATPROP CON REGLAS PRIMITIVAS

A continuación, vamos a hacer lo mismo con este otro argumento

Si Juan y Pedro fueron a la fiesta, también fue Ana.
Por lo tanto, si Juan fue a la fiesta, entonces,
si fue Pedro, Ana también fue.

Como convenciones simbólicas, mantenemos las mismas que en el ejemplo anterior, añadiendo:

r : *Ana fue a la fiesta.*

Pues bien, la formalización resultante sería:

$$p \wedge q \to r \quad \vdash_{\text{DNP}} \quad p \to (q \to r)$$

Y una derivación de este argumento formal en dednatprop sería la siguiente:

(1)	$p \wedge q \to r$	Pr
(2)	$\boxed{p}$	S hacia $q \to r$
(3)	$\boxed{q}$	S hacia r
(4)	$p \wedge q$	I$\wedge$ 2
(5)	r	MP 1,4
(6)	$q \to r$	PCo 3,5
(7)	$p \to (q \to r)$	PCo 2,6

Nótese que aquí tenemos dos banderas anidadas, es decir, una bandera dentro de otra (una subderivación dentro de otra subderivación). Es la única forma de obtener el condicional complejo que constituye la conclusión de este argumento.

§ 15.4. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN Y DERIVACIÓN EN DEDNATPROP CON REGLAS PRIMITIVAS

Ahora nos vamos a plantear la formalización y derivación de este otro argumento:

O llueve, o llueve y hace frío.
Por lo tanto, llueve.

Aquí tenemos que cambiar de convenciones simbólicas, así que pondremos:

s : *Llueve.*

t : *Hace frío.*

A continuación, procedemos a la formalización del argumento:

$$s \vee (s \wedge t) \vdash_{\text{DNP}} s$$

Y finalmente, procedemos a su derivación en dednatprop con primitivas:

(1)	$s \vee (s \wedge t)$	Pr
(2)	$\boxed{s}$	S hacia s
(3)	$\boxed{s \wedge t}$	S hacia s
(4)	s	E$\wedge$ 3
(5)	s	PCa 1,2 –2, 3 –4

Como vemos, la primera bandera de esta derivación no tiene asta, dado que su target es idéntico al supuesto provisional.

§ 15.5. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN Y DERIVACIÓN EN DEDNATPROP CON REGLAS PRIMITIVAS

Por último, veremos este otro ejemplo:

Si llueve, no hace frío.

Por lo tanto, no es cierto que llueva y haga frío.

Mantenemos las mismas convenciones simbólicas que en el ejemplo anterior, y procedemos a formalizar el argumento:

$$s \rightarrow \neg t \vdash_{\text{DNP}} \neg(s \wedge t)$$

Y sobre ese contexto, procedemos a la derivación del argumento:

(1)	$s \to \neg t$	Pr
(2)	$\boxed{s \wedge t}$	S hacia $t \wedge \neg t$
(3)	s	E$\wedge$ 2
(4)	$\neg t$	MP 1,2
(5)	t	E$\wedge$ 2
(6)	$t \wedge \neg t$	I$\wedge$ 4,5
(7)	$\neg(s \wedge t)$	RA 2–6

§ 15.6. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Siguiendo el ejemplo de **§ 15.1**, formaliza y construye una derivación en dednatprop con primitivas para el siguiente argumento:

   Si Marta no estaba, Álex sí.
   Álex no estaba.
   Por lo tanto, Marta sí estaba.

2. Siguiendo el ejemplo de **§ 15.2**, haz lo mismo con el siguiente argumento:

   Si Marta no estaba, Álex sí.
   Por lo tanto, si Álex no estaba, sí estaba Marta.

3. Siguiendo el ejemplo de **§ 15.5**, haz lo mismo con el siguiente argumento:

   Marta no estaba.
   Álex sí estaba.
   Por lo tanto, no es cierto que
   si estaba Álex, entonces estaba Marta.

4. Si te sobra tiempo, inventa más ejercicios similares, y resuélvelos.

Tema 16

Dednatprop con derivadas: conmutativas, transitiva, contradicciones y PTE

§ 16.1. ESQUEMAS DE DERIVACIONES

Al introducir cada una de las reglas primitivas, hemos hecho uso de un *“esquema”*, en el cual aparecen letras como A y B, en representación de *fórmulas cualesquiera* de lenprop.

Pues bien, lo mismo se puede hacer con derivaciones enteras, dando lugar a **esquemas de derivaciones**. Estos esquemas se pueden usar después en otras derivaciones más complejas, a modo de abreviaturas. Es como si estuviéramos abreviando una secuencia de pasos, que se pueden repetir en distintas derivaciones con otras fórmulas, aunque siempre con una misma estructura.

En concreto, en este tema vamos a introducir 7 de esos esquemas. Conforme los presentemos, les vamos a dar un nombre y un código a cada uno. Y **a partir del momento en que introduzcamos cada uno, podremos utilizar ese esquema como una nueva regla**

derivada del cálculo dednatprop.

Ello facilitará sustancialmente las deducciones posteriores, ya que en cualquier momento podremos apoyarnos en la secuencia de pasos que están condensados en cada una de estas reglas derivadas.

§ 16.2. REGLA CONMUTATIVA DE LA CONJUNCIÓN

Si en una línea de una derivación tenemos una conjunción, $A \wedge B$, entonces podemos introducir una nueva línea en la que se revierta el orden de los conyuntos, poniendo: $B \wedge A$.

A esta regla la llamaremos **"conmutativa de la conjunción"** (abreviadamente, **Cm∧**). Y a la derecha de su utilización, anotaremos el número de la línea en la que aparecía la conjunción original.

A continuación, damos el esquema argumentativo de esta regla y su demostración:

$$A \wedge B, \vdash_{\text{DNP}} B \wedge A$$

(1)	$A \wedge B$	Pr
(2)	A	E∧ 1
(3)	B	E∧ 1
(4)	$B \wedge A$	I∧ 2,3

§ 16.3. EJEMPLO DE DERIVACIÓN QUE USA LA REGLA Cm∧

Un ejemplo sumamente sencillo de uso de dicha regla lo tenemos en la derivación para demostrar que:

$$p \to q \wedge r \;,\; p \;\vdash_{\text{DNP}}\; r \wedge q$$

En efecto, basta con poner:

(1)	$p \to q \wedge r$	Pr
(2)	p	Pr
(3)	$q \wedge r$	MP 1,2
(4)	$r \wedge q$	Cm∧ 3

§ 16.4. REGLA CONMUTATIVA DE LA DISYUNCIÓN

Si en una línea de una derivación tenemos una disyunción, $A \vee B$, entonces podemos introducir una nueva línea en la que se revierta el orden de los disyuntos, poniendo: $B \vee A$.

A esta regla la llamaremos **"conmutativa de la disyunción"** (abreviadamente, **Cm∨**). Y a la derecha de su utilización, anotaremos el número de la línea en la que aparecía la disyunción original.

El correspondiente esquema argumentativo es:

$$A \vee B \;\vdash_{\text{DNP}}\; B \vee A$$

En este caso, la derivación es idéntica a la que vimos en **§ 13.9**, con una sola diferencia: allí se aplicaba a una fórmula en concreto de lenprop ($p \vee q$), mientras que aquí se aplica a cualquier disyunción de lenprop (es decir, a cualquier fla de la forma $A \vee B$, donde A y B son cualesquiera flas).

§ 16.5. REGLA TRANSITIVA DEL CONDICIONAL

Si en una línea de una derivación aparece un condicional $A \rightarrow B$, y en otra línea aparece un condicional $B \rightarrow C$, entonces podemos introducir una nueva línea con el condicional $A \rightarrow C$.

A esta regla la llamaremos **"transitiva del condicional"** (abreviadamente, **"Tr→"**). Y a la derecha de su utilización, anotaremos los números de las dos líneas en las que aparecían los condicionales $A \rightarrow B$ y $B \rightarrow C$.

A continuación, damos el esquema argumentativo de esta regla y su demostración:

$$A \rightarrow B,\ B \rightarrow C \vdash_{\text{DNP}} A \rightarrow C$$

(1)	$A \rightarrow B$	Pr
(2)	$B \rightarrow C$	Pr
(3)	A	S hacia C
(4)	B	MP 1,3
(5)	C	MP 2,4
(6)	$A \rightarrow C$	PCo 3,5

§ 16.6. EL PRINCIPIO DE NO CONTRADICCIÓN

El **principio de no contradicción** (abreviadamente, **"PNC"**) es una regla derivada especial, porque no recoge una derivación con premisas, sino un **teorema formal**. Como vimos en **§ 11.3** , los teoremas del cálculo son fórmulas derivables sin premisas:

$$\vdash_{\text{DNP}} \neg (A \wedge \neg A)$$

La derivación de esta fórmula, sin usar premisa alguna, es muy sencilla:

(1)	$\boxed{A \wedge \neg A}$	S hacia $A \wedge \neg A$
(2)	$\neg(A \wedge \neg A)$	RA 1,1

Aquí tenemos un nuevo caso de bandera sin asta, puesto que la suposición provisional coincide con el target de la *RA*.

Pues bien, a partir de ahora, en cualquier momento de una derivación, y para cualquier fórmula A , podemos introducir como una nueva línea la fórmula $\neg(A \wedge \neg A)$. A su derecha, colocaremos la inscripción *"PNC"* (sin indicación numérica, pues esta regla no se aplica a líneas anteriores de la derivación, sino que se introduce sin más).

§ 16.7. EJEMPLO DE DERIVACIÓN QUE USA LAS REGLAS DERIVADAS Cm∨, Tr→ y PNC

Un ejemplo de uso de estas tres reglas derivadas lo tenemos en la demostración de que:

$$\neg(p \vee q) \to r \;,\; r \to q \vee \neg q \;\vdash_{\text{DNP}}\; q \vee p$$

En efecto, usando estas reglas derivadas, basta con poner:

(1)	$\neg(p \vee q) \to r$	Pr
(2)	$r \to q \vee \neg q$	Pr
(3)	$\neg(p \vee q) \to (q \vee \neg q)$	Tr→ 1,2
(4)	$\neg(q \vee \neg q)$	PNC
(5)	$\neg\neg(p \vee q)$	MT 3,4
(6)	$p \vee q$	DN 5
(7)	$q \vee p$	Cm∨ 6

§ 16.8. EX CONTRADICTIONE QUODLIBET, PRIMERA REGLA

A continuación vamos a introducir dos reglas derivadas, a las que denominaremos **“ex contradictione quodlibet”** (abreviadamente, **“ECQ”**). El significado de dicha frase latina es: *“de una contradicción, lo que se quiera*. Y efectivamente, estas dos reglas encapsulan el principio de razonamiento según el cual *de una contradicción se sigue cualquier cosa.*

Por eso, a este principio de razonamiento se le conoce también como **“principio de explosión”**.

Como acabamos de señalar, vamos a desglosar este principio en dos reglas distintas, aunque son tan parecidas que las simbolizaremos de la misma manera, como hemos hecho anteriormente en casos similares.

Pues bien, la primera regla ECQ consiste en lo siguiente. Supongamos que en una derivación tenemos una línea con la fórmula $A \wedge \neg A$. Pues bien, en cualquier momento posterior podemos introducir una línea nueva con la fórmula B, siendo B cualquier fórmula de lenprop que escojamos, sin ninguna restricción.

A la derecha de la nueva fórmula introducida, colocaremos la inscripción “ECQ”, seguida por el número de línea de la fórmula $A \wedge \neg A$.

A continuación, damos el esquema argumentativo de esta regla y su demostración:

$$A \wedge \neg A \vdash_{\text{DNP}} B$$

(1)	$A \wedge \neg A$	Pr
(2)	$\boxed{\neg B}$	S hacia $A \wedge \neg A$
(3)	$\quad \neg B \wedge (A \wedge \neg A)$	I$\wedge$ 1,2
(4)	$\quad A \wedge \neg A$	E$\wedge$ 3
(5)	$\neg\neg B$	RA 2,4
(6)	B	DN 5

§ 16.9. EX CONTRADICTIONE QUODLIBET, SEGUNDA REGLA

La segunda regla se aplica al caso en que A y $\neg A$ aparecen en premisas separadas:

$$A,\ \neg A \vdash_{\text{DNP}} B$$

Naturalmente, en este caso, a la derecha de la fórmula introducida colocaremos la inscripción "ECQ", seguida por los números de línea de las dos fórmulas, A y $\neg A$.

La prueba es muy sencilla también:

(1)	A	Pr
(2)	$\neg A$	Pr
(3)	$\boxed{\neg B}$	S hacia $A \wedge \neg A$
(4)	$A \wedge \neg A$	I$\wedge$ 1,2
(5)	$\neg\neg B$	RA 3,4
(6)	B	DN 5

§ 16.10. EL PRINCIPIO DE TERCERO EXCLUIDO

El **principio de tercero excluido** (o **tercio excluso**, abreviadamente **"PTE"**) nos permite introducir la fórmula $A \vee \neg A$, para cualquier fórmula A, en cualquier línea de una derivación.

De nuevo, estamos ante un teorema, cuyo esquema y demostración damos a continuación:

$$\vdash_{\text{DNP}} A \lor \neg A$$

Derivación:

(1)	$\neg(A \lor \neg A)$	S hacia $(A \lor \neg A) \land (A \lor \neg A)$
(2)	A	S hacia $(A \lor \neg A) \land (A \lor \neg A)$
(3)	$A \lor \neg A$	I$\lor$ 2
(4)	$(A \lor \neg A) \land (A \lor \neg A)$	I$\land$ 1,3
(5)	$\neg A$	RA 2,4
(6)	$A \lor \neg A$	I$\lor$ 5
(7)	$(A \lor \neg A) \land (A \lor \neg A)$	I$\land$ 1,6
(8)	$\neg\neg(A \lor \neg A)$	RA 1,7
(9)	$A \lor \neg A$	DN 8

Esta prueba es un poquito "enrevesada", y en ella vuelven a aparecer dos banderas "anidadas", es decir, una dentro de la otra. Pero es la más sencilla posible, en dednatprop, para derivar este resultado.

§ 16.11. EJEMPLO DE DERIVACIÓN QUE USA LAS REGLAS DERIVADAS ECQ y PTE

Un ejemplo de derivación que usa estas dos reglas derivadas lo tenemos en la demostración de que:

$$p \vee \neg p \to q \wedge \neg q \;\vdash_{\text{DNP}}\; r$$

En efecto, usando estas reglas derivadas, basta con poner:

(1)	$p \vee \neg p \to q \wedge \neg q$	Pr
(2)	$p \vee \neg p$	PTE
(3)	$q \wedge \neg q$	MP 1,2
(4)	r	ECQ 3

§ 16.12. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Construye una derivación, apoyándote en Cm$\wedge$, para demostrar que:
$$p \wedge q \to r \;\vdash_{\text{DNP}}\; q \wedge p \to r$$
2. Construye una derivación **con reglas primitivas** que demuestre que:
$$(p \to q) \vee (r \wedge s) \;\vdash_{\text{DNP}}\; (r \wedge s) \vee (p \to q)$$
3. Construye una derivación **con reglas primitivas** que demuestre que:
$$A \vee B\,,\; \neg B \;\vdash_{\text{DNP}}\; A$$
4. Siguiendo los ejemplos de **§ 16.3** , **§ 16.7** y **§ 16.11** , construye una derivación que demuestre:
$$p \to q\,,\; q \to \neg r \wedge r\,,\; p \;\vdash_{\text{DNP}}\; t$$

5. Si te sobra tiempo, inventa más ejercicios similares y resuélvelos.

Tema 17

Dednatprop con derivadas: silogismo disyuntivo, interdefinición y De Morgan

§ 17.1. SILOGISMO DISYUNTIVO

Bajo el rótulo **"silogismo disyuntivo"** y la abreviatura **"SD"**, encapsulamos dos reglas derivadas distintas, pero muy similares (al igual que hemos venido haciendo en ocasiones anteriores).

Contando con la experiencia acumulada, nos limitaremos a mostrar simplemente el esquema argumentativo y la derivación de cada una de estas reglas.

La primera regla SD es:

$$A \vee B\,,\ \neg A \ \vdash_{\text{DNP}} \ B$$

Y su derivación es:

(1)	$A \vee B$	Pr
(2)	$\neg A$	Pr
(3)	$\boxed{A}$	S hacia B
(4)	$A \wedge \neg A$	I$\wedge$ 2,3
(5)	B	ECQ 4
(6)	$\boxed{B}$	S hacia B
(7)	B	PCa 1, 3–5, 6–6

La segunda regla SD, es la siguente:

$$A \vee B,\ \neg B \vdash_{\text{DNP}} A$$

En este caso, la derivación la dejamos para las preguntas del final.

§ 17.2. INTERDEFINICIÓN DE CONJUNCIÓN A CONDICIONAL

La regla de **interdefinición de conjunción a condicional** (abreviadamente, **Id$\wedge$ $\rightarrow$**) se define por el siguiente esquema argumentativo y derivación:

$$A \wedge B \vdash_{\text{DNP}} \neg(A \rightarrow \neg B)$$

(1)	$A \wedge B$	Pr
(2)	$\boxed{A \to \neg B}$	S hacia $B \wedge \neg B$
(3)	A	E$\wedge$ 1
(4)	B	E$\wedge$ 1
(5)	$\neg B$	MP 2,3
(6)	$B \wedge \neg B$	I$\wedge$ 4,5
(7)	$\neg(A \to \neg B)$	RA 2,6

§ 17.3. INTERDEFINICIÓN DE CONDICIONAL A CONJUNCIÓN

A su vez, la regla de **interdefinición de condicional a conjunción** (abreviadamente, **Id$\to\wedge$**) se define por el siguiente esquema argumentativo y derivación:

$$A \to B \ \vdash_{\text{DNP}} \ \neg(A \wedge \neg B)$$

(1)	$A \to B$	Pr
(2)	$\boxed{A \wedge \neg B}$	S hacia $B \wedge \neg B$
(3)	A	E$\wedge$ 2
(4)	B	MP 1,3
(5)	$\neg B$	E$\wedge$ 2
(6)	$B \wedge \neg B$	I$\wedge$ 4,5
(7)	$\neg(A \wedge \neg B)$	RA 2,6

§ 17.4. INTERDEFINICIÓN DE DISYUNCIÓN A CONDICIONAL

A continuación, la regla de **interdefinición de disyunción a condicional** (abreviadamente, **Id$\vee$ $\rightarrow$**) se define por el siguiente esquema argumentativo y derivación:

$$A \vee B \vdash_{\text{DNP}} \neg A \rightarrow B$$

(1)	$A \vee B$	Pr
(2)	$\boxed{\neg A}$	S hacia B
(3)	B	SD 1,2
(4)	$\neg A \rightarrow B$	PCo 2,3

§ 17.5. INTERDEFINICIÓN DE CONDICIONAL A DISYUNCIÓN

Por último, la regla de **interdefinición de condicional a disyunción** (abreviadamente, **Id$\rightarrow$ $\vee$**) se define por el siguiente esquema argumentativo y derivación:

$$A \to B \;\vdash_{\text{DNP}}\; \neg A \vee B$$

(1)	$A \to B$	Pr
(2)	$A \vee \neg A$	PTE
(3)	$\boxed{A}$	S hacia $\neg A \vee B$
(4)	B	MP 1,3
(5)	$\neg A \vee B$	I$\vee$ 4
(6)	$\boxed{\neg A}$	S hacia $\neg A \vee B$
(7)	$\neg A \vee B$	I$\vee$ 6
(8)	$\neg A \vee B$	PCa 2, 3–5, 6–7

§ 17.6. EJEMPLO DE DERIVACIÓN QUE USA LAS REGLAS DERIVADAS SD Y DE INTERDEFINICIÓN

Un ejemplo de derivación que usa las reglas derivadas SD y de interdefinición es la demostración de que:

$$p \vee (q \to r)\;,\; \neg p \;\vdash_{\text{DNP}}\; \neg(q \wedge \neg r)$$

En efecto, usando estas reglas derivadas, basta con poner:

(1)	$p \vee (q \rightarrow r)$	Pr
(2)	$\neg p$	Pr
(3)	$q \rightarrow r$	SD 1,2
(4)	$\neg(q \wedge \neg r)$	Id$\rightarrow \wedge$ 3

§ 17.7. DE MORGAN

Finalmente, tras las reglas de interdefinición, vamos a introducir nuestras últimas cuatro reglas derivadas. Las llamaremos **"leyes de De Morgan"**, y asignaremos un código distinto a cada una de ellas.

De nuevo, nos limitamos a poner el esquema argumentativo y su demostración, para cada una de estas reglas.

DM$_\mathbf{1}$:

$$A \land B \ \vdash_{\text{DNP}} \ \neg(\neg A \lor \neg B)$$

(1)	$A \land B$	Pr
(2)	$\boxed{\neg A \lor \neg B}$	S hacia $B \land \neg B$
(3)	$\neg\neg A \to \neg B$	Id$\lor \to$ 2
(4)	A	E$\land$ 1
(5)	$\neg\neg A$	DN 4
(6)	$\neg B$	MP 3,5
(7)	B	E$\land$ 2
(8)	$B \land \neg B$	I$\land$ 6,7
(9)	$\neg(\neg A \land \neg B)$	RA 2,8

DM$_2$:

$$A \vee B \vdash_{\text{DNP}} \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

(1)	$A \vee B$	Pr
(2)	$\boxed{\neg A \wedge \neg B}$	S hacia $B \wedge \neg B$
(3)	$\neg A \rightarrow B$	I$\vee \rightarrow$ 2
(4)	$\neg A$	E$\wedge$ 2
(5)	B	MP 3,4
(6)	$\neg B$	E$\wedge$ 2
(7)	$B \wedge \neg B$	I$\wedge$ 5,6
(8)	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$	RA 2,7

DM$_3$:

$$\neg(A \wedge B) \vdash_{\text{DNP}} \neg A \vee \neg B$$

(1)	$\neg(A \wedge B)$	Pr
(2)	$\boxed{A}$	S hacia $\neg B$
(3)	$\quad \boxed{B}$	S hacia $B \wedge \neg B$
(4)	$\quad\quad A \wedge B$	I$\wedge$ 2,3
(5)	$\quad\quad B \wedge \neg B$	ECQ 1,4
(6)	$\quad \neg B$	RA 3,5
(7)	$A \rightarrow \neg B$	PCo 2,6
(8)	$\neg A \vee \neg B$	Id$\rightarrow \vee$ 7

DM$_4$:

$$\neg(A \vee B) \vdash_{\text{DNP}} \neg A \wedge \neg B$$

(1)	$\neg(A \vee B)$	Pr
(2)	$\boxed{A}$	S hacia $A \wedge \neg A$
(3)	$\quad A \vee B$	I$\vee$ 2
(4)	$\quad A \wedge \neg A$	ECQ 1,3
(5)	$\neg A$	RA 2, 4
(6)	$\boxed{B}$	S hacia $B \wedge \neg B$
(7)	$\quad A \vee B$	I$\vee$ 6
(8)	$\quad B \wedge \neg B$	ECQ 1,6
(9)	$\neg B$	RA 6,8
(10)	$\neg A \wedge \neg B$	I$\wedge$ 5,9

§ 17.8. EJEMPLO DE DERIVACIÓN QUE USA LAS LEYES DE DE MORGAN

Un ejemplo de derivación que usa las leyes de De Morgan es la demostración de que:

$$\neg(\neg p \vee \neg q) \to r \vee s \vdash_{\text{DNP}} p \wedge q \to \neg(\neg r \wedge \neg s)$$

En efecto, usando estas reglas derivadas, basta con poner:

(1)	$\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow r \vee s$	Pr
(2)	$\boxed{p \wedge q}$	S hacia $\neg(\neg r \wedge \neg s)$
(3)	$\quad\neg(\neg p \vee \neg q)$	DM_1 2
(4)	$\quad r \vee s$	MP 1,3
(5)	$\quad\neg(\neg r \wedge \neg s)$	DM_2 4
(6)	$p \wedge q \rightarrow \neg(\neg r \wedge \neg s)$	PCo 2,5

§ 17.9. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Construye una derivación **con reglas primitivas** que demuestre que:

$$A \vee B\ ,\ \neg B \ \vdash_{\text{DNP}}\ A$$

2. Siguiendo los ejemplos de **§ 17.6** y **§ 17.8**, construye una derivación que demuestre que:

$$p \vee (r \wedge \neg s)\ ,\ r \rightarrow s \ \vdash_{\text{DNP}}\ p$$

3. Siguiendo los ejemplos de **§ 17.6** y **§ 17.8**, construye una derivación que demuestre que:

$$p \ \vdash_{\text{DNP}}\ \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

4. Siguiendo los ejemplos de **§ 17.6** y **§ 17.8**, construye una derivación que demuestre que:

$$(p \vee q) \wedge (r \wedge s) \ \vdash_{\text{DNP}}\ (\neg p \rightarrow q) \wedge \neg(r \rightarrow \neg s)$$

5. Si te sobra tiempo, inventa más ejercicios similares, y resuélvelos.

Tema 18

Metateoría de dednatprop

§ 18.1. NIVELES DE ANÁLISIS DE LAS HABILIDADES COGNITIVAS SUPERIORES

Una vez que hemos definido nuestro primer cálculo lógico y nos hemos familiarizado con él, cabe preguntarse hasta qué punto *"describe"*, *"modela"* o *"nos ayuda a entender"* esa capacidad humana a la que llamamos "razonamiento deductivo".

El razonamiento deductivo es una de las habilidades cognitivas superiores del ser humano. Y está dentro de ese grupo por la sencilla razón de que involucra el uso del lenguaje.

Pues bien, en cualquier aproximación a una habilidad cognitiva superior (ya sea el razonamiento deductivo o cualquier otra), cabe distinguir tres niveles de análisis:

1. **El nivel *input-output*.**
2. **La realidad psicológica del algoritmo.**
3. **La implementación material.**

§ 18.2. EL NIVEL INPUT-OUTPUT

El nivel 1 (es decir, el nivel *input-output*, o "entrada-salida") intenta proporcionar **una caracterización explícita y sistemática de los inputs y outputs simbólicos que corresponden a la habilidad en cuestión**.

Los inputs son las expresiones simbólicas que dicha habilidad puede recibir y procesar. Los outputs son las expresiones que se generan como resultado, al procesar los inputs. Y además, nos interesa encontrar un modo sistemático de relacionar cada input con el output que le podría corresponder como respuesta (o con los outputs, si hay más de una respuesta posible).

En definitiva, en el nivel 1 comprende tres tareas:

(a) la caracterización de todos los posibles inputs que corresponden a esa habilidad;

(b) la caracterización de todos sus posibles outputs;

(c) la búsqueda de un mecanismo que nos permita determinar — o "calcular" — qué output o outputs corresponden a cada input (aunque sea aproximadamente, o con un margen de error).

§ 18.3. LOS NIVELES 2 Y 3: REALIDAD PSICOLÓGICA E IMPLEMENTACIÓN MATERIAL

El nivel 2 va un paso más allá, puesto que busca un mecanismo de cálculo (o "algoritmo") **que sea similar al modo en que opera de hecho nuestra mente, o nuestro cerebro, cuando ejercemos esa habilidad**. Puesto en otras palabras: el nivel 2 intenta encontrar una descripción de la estructura y los pasos del cálculo, que se asemeje al modo como operamos las personas, en la práctica, cuando ejercemos esa habilidad.

Así por ejemplo, imaginemos que en un determinado algoritmo, el paso de un input X a un output Y exige una computación especialmente complicada, que pasa por calcular un valor intermedio, Z.

Pues bien, si ese algoritmo tiene realidad psicológica, entonces es de esperar que el tiempo de respuesta de X a Y sea más largo de lo normal, puesto que la computación es especialmente complicada. Y además, es de esperar que si después de que una persona proporcione el output Y, a continuación le proponemos otra tarea que involucre el valor Z, responderá más rápidamente que en condiciones normales, porque se supone que ya ha tenido que calcular ese valor.

Por último, el nivel 3 aborda **la implementación material de la habilidad en cuestión**, es decir, la fisiología que la hace posible a nivel físico, químico y biológico.

§ 18.4. DEDNATPROP Y EL RAZONAMIENTO HUMANO

Dicho todo esto, es bastante claro que dednatprop está muy lejos del primero de estos tres objetivos, y por lo tanto, también de los otros dos.

En efecto, **dednatprop está muy lejos del nivel 1 (input-output), por la sencilla razón de que el razonamiento humano se produce en el seno del lenguaje natural, y dednatprop se aplica únicamente a fórmulas de un lenguaje formal**.

Además, como dijimos en **§ 9.2** , la traducción de las proposiciones del lenguaje natural al lenguaje formal (es decir, la *formalización*) es una operación asistemática y plagada de dificultades.

Aun así, cabe preguntarse si dednatprop pudiera representar algún "sustrato estructural" del razonamiento humano. Es decir, si pudiera representar *"algo"* de lo que hacemos cuando razonamos (aunque sea lejanamente, a grandes rasgos).

Esa es la pregunta que nos vamos a hacer a continuación.

§ 18.5. DEDNATPROP Y EL RAZONAMIENTO EN LENPROP

Para tratar de dilucidar si dednatprop pudiera representar algún sustrato del razonamiento humano, vamos dejar al margen el lenguaje natural, y vamos a restringir nuestra atención hacia el lenguaje formal lenprop, y a su interpretación mediante la semántica veritativo-funcional.

En ese contexto, nos preguntaremos **hasta qué punto se ajusta dednatprop a la habilidad de razonar deductivamente con las fórmulas de lenprop, interpretadas bajo la semántica vf**. Pues bien, esto sí ha sido objeto de estudio, y en profundidad, por parte de la lógica formal.

En efecto, la lógica formal se ha ocupado de investigar con esmero el nivel 1 (input-output), en lo que se refiere al razonamiento humano en lenprop y otros lenguaje formales.

Por el contrario, la lógica formal no se ha ocupado del nivel 2 (ni mucho menos del 3), ni siquiera en esos contextos restringidos.

Aquí conviene aclarar, en relación al nivel 2, que ciertamente dednatprop tiene un aire mucho más "natural" que el resto de sistemas deductivos. De ahí le viene su nombre ("cálculo de deducción *natural*"), y por eso es el cálculo deductivo que se suele enseñar en primer lugar en los cursos introductorios, como hemos hecho aquí.

Y también es verdad que las reglas de dednatprop corresponden a *"principios de razonamiento"* que se explicitan con cierta frecuencia, como pautas o modelos a seguir (así por ejemplo, la *reducción al absurdo*, el *modus tollens*, etc).

Sin embargo, hay que subrayar que *no existe ningún estudio que muestre que las reglas de dednatprop se correspondan con el modo en que nuestro cerebro está operando internamente, en la práctica, cuando "captamos" que un razonamiento formal es correcto.*

De hecho, la secuencia de pasos (o "flujo computacional") que sigue nuestro cerebro cuando razonamos mentalmente en lenprop, si es que se puede hablar en esos términos, continúa siendo a fecha de hoy un misterio.

§ 18.6. METATEORÍA DE LOS SISTEMAS FORMALES

Como acabamos de señalar, la lógica formal investiga el nivel input-output de los sistemas deductivos, en relación a los lenguajes formales y las interpretaciones definidas para ellos.

Y al hacerlo, nos centramos en ciertas propiedades matemáticas de estos sistemas, que se conocen como **"propiedades metateóricas**

de los sistemas formales". Pues bien, las tres más importantes de esas propiedades son las siguientes:

1. **Corrección:** un cálculo es correcto cuando cualquier derivación formal corresponde a un argumento formal válido (es decir, cuando cualquier derivación corresponde a un argumento formal cuya conclusión es consecuencia lógica de las premisas).

2. **Completitud:** un cálculo es completo cuando para cualquier argumento formal válido (es decir, un argumento formal cuya conclusión sea consecuencia lógica de las premisas), existe una derivación que parte de dichas premisas y llega a esa conclusión.

3. **Decidibilidad:** un cálculo es decidible cuando proporciona instrucciones mecánicas que nos permiten decidir, en un número finito de pasos, si una fórmula es o no derivable de un conjunto finito de fórmulas.

En el caso de los cálculos que no proceden mediante derivaciones, sino mediante tablas, árboles o lo que sea, la definición de *corrección* y *completitud* se referirá a la existencia de la correspondiente tablas, árboles, etc.

La combinación de las dos primeras propiedades (corrección y completitud) nos proporciona la *"adecuación input-output"* del cálculo deductivo en cuestión, en relación al lenguaje formal y al tipo de interpretación que estemos examinando. En efecto, **un cálculo deductivo es correcto y completo si la relación de *derivabilidad* en ese cálculo coincide con la relación de *consecuencia lógica***.

§ 18.7. PROPIEDADES METATEÓRICAS DE DEDNATPROP: CORRECCIÓN Y COMPLETITUD

En el caso de dednatprop, es bastante sencillo demostrar que **se trata de un cálculo correcto**. En efecto, para cualquier fórmula A y conjunto de fórmulas D, ocurre que:

$$\textbf{Si} \quad D \vdash_{\text{DNP}} A \quad \textbf{entonces} \quad D \models_{\text{PROP}} A$$

Para demostrar esto, hay que examinar una a una las reglas primitivas del cálculo, hasta asegurarnos de que cualquier derivación basada en ellas corresponderá a un argumento válido de acuerdo con la semántica veritativo-funcional. Ello garantizará a su vez la validez de las reglas derivadas, puesto que no son más que fragmentos abreviados de derivaciones con reglas primitivas.

Todo esto es bastante sencillo de hacer, pero aquí no nos vamos a detener en ello.

Además, el cálculo dednatprop **también es un cálculo completo**. Es decir, que para cualquier fórmula A y conjunto de fórmulas D, tenemos:

$$\textbf{Si} \quad D \models_{\text{PROP}} A \quad \textbf{entonces} \quad D \vdash_{\text{DN PROP}} A$$

En este caso, la prueba es sustancialmente más compleja. Se puede consultar en internet y en infinidad de manuales, respecto a cálculos similares a dednatprop.

§ 18.8. PROPIEDADES METATEÓRICAS DE DEDNATPROP: CARENCIA DE DECIDIBILIDAD

Por último, es obvio que **dednatprop no es un cálculo decidible**.

Para entender esto, tenemos que empezar por constatar que las reglas de dednatprop establecen claramente *qué se puede hacer y qué no se puede hacer*, en cada momento de una derivación; es decir, qué manipulaciones simbólicas están permitidas y cuáles no, en ese momento de la derivación. Por eso es un *cálculo deductivo*, esto es, un cálculo meramente *sintáctico*.

Sin embargo, dednatprop *no especifica* ***qué se debe hacer*** *en cada momento de una derivación*, es decir: no especifica qué manipulaciones simbólicas **tenemos que realizar** en ese momento, para llegar a obtener la conclusión que buscamos.

De hecho, al confeccionar derivaciones, nos encontramos a cada paso con muchas opciones disponibles, entre las cuales tenemos que elegir. Y la elección la hacemos mediante ensayo y error, y entrenando nuestro ingenio, hasta encontrar una ruta que nos permita derivar la conclusión deseada. El método nos dice qué pasos **podemos** dar, pero no nos dice qué pasos **debemos** dar, para llegar a la conclusión deseada.

Por esta razón, dednatprop no es un cálculo decidible: no es lo que se llama "procedimiento mecánico", "algoritmo mecánico" o "procedimiento de decisión". Y ello es así — como venimos diciendo — porque dednatprop no nos permite *decidir*, de una manera mecánica y en un número finito de pasos, si una fórmula es o no derivable de otra, o de un conjunto finito de fórmulas.

El siguiente cálculo lógico que vamos a ver sí es decidible, además de ser correcto y completo. Aunque tiene el inconveniente de ser bastante más "pesado" que dednatprop (es decir, que ocupa bastante más espacio y símbolos para validar un argumento). Son las llamadas *"tablas de verdad"*.

§ 18.9. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.

1. Explica con tus propias palabras la diferencia entre los tres niveles apuntada en **§ 18.1** , **§ 18.2** y **§ 18.3** . Al hacerlo, utiliza un ejemplo, como pueda ser *sumar*, *jugar al ajedrez* o cualquier otra habilidad intelectual que se te ocurra.

2. ¿Cómo se conjugan, en tu opinión, las limitaciones señaladas en **§ 18.4** y **§ 18.5** con lo que se dijo en su momento en **§ 9.3** , respecto a que "la formalización lógica ... sigue siendo nuestra mejor herramienta disponible para analizar el razonamiento deductivo"?

3. Indica sucintamente qué tendría que suceder para que dednatprop fuera un cálculo incorrecto (es decir, *no correcto*).

4. Indica sucintamente qué tendría que suceder para que dednatprop fuera un cálculo incompleto (es decir, *no completo*).

5. Indica sucintamente qué tendría que suceder para que dednatprop fuera un cálculo decidible.

6. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

    a) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.

    b) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 19

Tablas de verdad: instrucciones de confección

§ 19.1. LAS TABLAS DE VERDAD

El siguiente sistema deductivo que vamos a estudiar son las **tablas de verdad** (abreviadamente, **"tv"**). Como su propio nombre indica, en estas tablas juega un papel muy importante la verdad, así como la falsedad, las cuales seguiremos abreviando mediante las letras "$\mathbb{V}$" y "$\mathbb{F}$".

Sin embargo, para hacer ver que estamos ante un mero cálculo deductivo, debemos ignorar lo que significan esas letras, y centrarnos únicamente en el procedimiento de transformación de símbolos que vamos a describir. A estos efectos, $\mathbb{V}$ y $\mathbb{F}$ serán simplemente dos letras distintas, que iremos asignando a las flas de lengprop mediante unas instrucciones bien definidas.

De hecho, podríamos usar "1" y "0" en puesto de "$\mathbb{V}$" y "$\mathbb{F}$" (como se hace en algunos manuales), y podríamos llamarlas "tablas de verificar", en puesto de "tablas de verdad". Con ello, desparecería toda referencia a la verdad en la descripción del método.

De ese modo, ponemos de manifiesto que estamos ante un **cálculo sintáctico**, porque **se puede describir íntegramente como un conjunto de reglas de manipulación de símbolos, sin hacer ninguna referencia al significado de los mismos**.

§ 19.2. LA TABLA DE LA NEGACIÓN

Sea A cualquier fórmula de lenprop. Entonces, la tabla de verdad para la fórmula $\neg A$ consiste en poner:

A	$\neg$	A
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	

Esto requiere poca explicación, pero aun así la vamos a dar.

La primera columna contiene los dos posibles valores de verdad de la fórmula A, que son $\mathbb{V}$ y $\mathbb{F}$. A continuación del valor $\mathbb{V}$ para la fórmula A, viene el valor $\mathbb{F}$ para la fórmula $\neg A$, que aparece en rojo, debajo del símbolo de negación (que es la conectiva principal de $\neg A$).

Al hacer la tabla a mano, no hace falta utilizar el color rojo: basta con rodear la columna de la conectiva principal con una elipse alargada, en vertical.

Sinópticamente, podemos decir que, en cada fila, si le ponemos $\mathbb{V}$ a la fórmula A, entonces le ponemos $\mathbb{F}$ a la fórmula $\neg A$; y viceversa. Es decir, que la letra asignada a $\neg A$, en cada fila, es justamente la contraria a la que tenga asignada la fórmula A en esa misma fila.

Así por ejemplo, la tabla de verdad para la fórmula $\neg p$ será:

p	$\neg$	p
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	

§ 19.3. LA TABLA DE LA CONJUNCIÓN

Sean ahora A y B cualesquiera fórmulas de lenprop. Entonces, la tabla de verdad para la fórmula $A \wedge B$ consiste en poner:

A	B	A	$\wedge$	B
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$	
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$		$\mathbb{F}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$		$\mathbb{F}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$		$\mathbb{F}$	

En este caso, naturalmente, la conectiva principal es $\wedge$. Y lo que hace la tabla, sinópticamente, es asignarle a esta conectiva la letra $\mathbb{V}$ en la única fila en la que tanto A como B son $\mathbb{V}$. Y en el resto de filas, la tabla le asigna a la conectiva $\wedge$ la letra $\mathbb{F}$.

La tabla resulta algo más grande que la anterior, porque en este caso tenemos que cubrir todas las combinaciones posibles de las dos fórmulas A y B. Pero por lo demás, el procedimiento es bastante obvio.

§ 19.4. LA TABLA DE LA DISYUNCIÓN

Sean de nuevo A y B cualesquiera fórmulas de lenprop. Entonces, la tabla de verdad para la fórmula $A \vee B$ consiste en poner:

A	B	A	$\vee$	B
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$	
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$		$\mathbb{V}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$		$\mathbb{F}$	

Como vemos, la conectiva principal en este caso es $\vee$. Y lo que hace la tabla, sinópticamente, es asignarle a esta conectiva la letra $\mathbb{F}$ en la única fila en la que tanto A como B son $\mathbb{F}$. Y en el resto de filas, la tabla le asigna a la conectiva $\vee$ la letra $\mathbb{V}$.

§ 19.5. LA TABLA DEL CONDICIONAL

Sean de nuevo A y B cualesquiera fórmulas de lenprop. Entonces, la tabla de verdad para la fórmula $A \to B$ consiste en poner:

A	B	A	$\to$	B
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$	
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$		$\mathbb{F}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$		$\mathbb{V}$	

Como vemos, la conectiva principal en este caso es $\to$. Y lo que hace la tabla, sinópticamente, es asignarle a esta conectiva la letra $\mathbb{F}$ en la única fila en la que A es $\mathbb{V}$ y B es $\mathbb{F}$. Y en el resto de filas, la tabla le asigna a la conectiva $\to$ la letra $\mathbb{V}$.

§ 19.6. LA TABLA DEL BICONDICIONAL

Por último, sean una vez más A y B cualesquiera fórmulas de len-prop. Entonces, la tabla de verdad para la fórmula $A \leftrightarrow B$ consiste en poner:

A	B	A	$\leftrightarrow$	B
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$	
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$		$\mathbb{F}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$		$\mathbb{F}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$		$\mathbb{V}$	

Como vemos, la conectiva principal en este caso es $\leftrightarrow$. Y lo que hace la tabla, sinópticamente, es asignarle a esta conectiva la letra $\mathbb{V}$ en las dos filas en las que A y B reciben el mismo valor (sea $\mathbb{V}$ o $\mathbb{F}$). Y en las dos filas restantes, la tabla le asigna a la conectiva $\leftrightarrow$ la letra $\mathbb{F}$.

§ 19.7. EJEMPLOS DE TABLAS DE VERDAD

Utilizando estos patrones, es fácil hacer tablas de verdad para fórmulas diversas. El primer paso es identificar la conectiva principal y la estructura de la fórmula en subfórmulas, según explicamos en **§ 5.8** y **§ 6.1** . Y a continuación, vamos rellenando las columnas de la tabla poco a poco, con paciencia.

En cada tabla, lo que más interesa es la columna que corresponde a la conectiva principal de la fórmula entera. Esa es la columna que aparece en rojo en el manual (y que podemos rodear con una elipse vertical, al hacer las tablas a mano). En cada fila, el valor que aparece en esa columna es "el valor de la fórmula" en esa fila.

Un ejemplo sencillo es la tabla para la fórmula $\neg\neg p$:

p	$\neg$	$\neg$	p
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	

Otro ejemplo es la tabla para la fórmula $\neg\neg\neg p$:

p	$\neg$	$\neg$	$\neg$	p
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	

Y otro ejemplo es la tabla de verdad para la fórmula $\neg(q \leftrightarrow p_5)$:

q	p_5	$\neg$	(	q	$\leftrightarrow$	p_5	)
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$		
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$			$\mathbb{F}$		
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$			$\mathbb{F}$		
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$		

§ 19.8. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Haz la tabla de verdad para la fórmula: $p \to q$.
2. ” $p \leftrightarrow q$.
3. ” $q \vee q$.
4. ” $\neg(q \vee q)$.

5. ” $\neg p_5 \wedge \neg(q \vee q)$.

6. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Propón tus propios ejemplos de fórmulas, con dos símbolos proposicionales, y haz tablas de verdad para las mismas.

   b) Haz un resumen muy sinóptico de este tema, con tus propias palabras.

   c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

   d) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 20

Tablas de verdad: derivabilidad y metateoría

§ 20.1. TABLAS PARA UN CONJUNTO DE FÓRMULAS

Dado un conjunto de fórmulas de lenprop, una **tabla de verdad conjunta** es una gran tabla de verdad, en cuyas columnas iniciales están todos los símbolos proposicionales que aparecen en esas fórmulas (es decir, p, o q, etc), o en su defecto, las subfórmulas más pequeñas que tenemos a la vista (es decir, A, B, etc).

Así por ejemplo, vamos a ver una tabla conjunta para las fórmulas

$$\neg\neg\neg p \qquad\qquad p \vee q \qquad\qquad \neg(q \leftrightarrow p_5)$$

Pues bien, en este caso, los símbolos proposicionales involucrados son tres: p, q y p_5. Por consiguiente, esos símbolos irán en las columnas iniciales. Y a continuación aparecerán las tres fórmulas, en bloques separados. En definitiva, la tabla de verdad conjunta para esas tres fórmulas es la siguiente:

p	q	r	$\neg$	$\neg$	$\neg$	p	p	$\vee$	q	$\neg$	(	q	$\leftrightarrow$	r	)
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$		$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$		
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$			$\mathbb{F}$		
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$			$\mathbb{F}$		
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$		$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$		
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$			$\mathbb{V}$		$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$		
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$			$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$			$\mathbb{F}$		
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$			$\mathbb{F}$		$\mathbb{V}$			$\mathbb{F}$		
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$			$\mathbb{F}$		$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$		

Y a continuación vamos a ver una tabla conjunta para las fórmulas $A \wedge B$ y $A \vee B$ (siendo A y B cualesquiera fórmulas de lenprop):

A	B	A	$\wedge$	B	A	$\vee$	B
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$			$\mathbb{V}$	
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$		$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$		$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$		$\mathbb{F}$			$\mathbb{F}$	

§ 20.2. DERIVABILIDAD DE UNA FÓRMULA A PARTIR DE OTRA EN TABLAS DE VERDAD

Dadas dos fórmulas de lenprop, A y B, diremos que B es **"derivable de A mediante tablas de verdad"** (abreviadamente, **"deriv tv"**), cuando en cualquier tabla conjunta para esas dos fórmulas, sucede que en todas las filas en las que la fórmula A sale $\mathbb{V}$, la fórmula B también sale $\mathbb{V}$.

O dicho de otro modo: B *es deriv tv de* A, *cuando no hay ninguna fila en la cual* A *sea* $\mathbb{V}$ *y* B *sea* $\mathbb{F}$.

Para abreviar esto, utilizaremos la "puerta giratoria sencilla", con el subíndice correspondiente:

$$A \vdash_{\text{TV}} B$$

Y al hacer la tabla, trazaremos un rectángulo en aquellas filas en las que la fórmula A sale $\mathbb{V}$, si las hay.

Así por ejemplo, la siguiente tabla muestra que, para cualesquiera fórmulas de lenprop A y B, la fórmula $A \to B$ es deriv tv de $A \wedge B$:

A	B	$A \wedge B$	$A \to B$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$

Efectivamente, vemos que en la única fila en la cual la fórmula $A \wedge B$ recibe la letra $\mathbb{V}$ (que es la 1ª fila de la tabla), también la fórmula $A \to B$ recibe esa letra. Por consiguiente, mediante dicha tabla hemos demostrado que:

$$A \wedge B \vdash_{\text{TV}} A \to B$$

Veamos otro ejemplo. La siguiente tabla muestra que la fórmula p es deriv tv de la fórmula $p \wedge q$:

p	q	$p \wedge q$	p
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\boxed{\mathbb{V}}$	$\boxed{\mathbb{V}}$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$

En efecto, también aquí vemos que en la única fila en la cual la fórmula $p \wedge q$ recibe la letra $\mathbb{V}$ (nuevamente la 1ª fila de la tabla), la fórmula p recibe esa misma letra. Por consiguiente, mediante dicha tabla hemos demostrado que:

$$p \wedge q \vdash_{\text{TV}} p$$

§ 20.3. DERIVABILIDAD TV DE UNA FÓRMULA A PARTIR DE UN CONJUNTO DE FÓRMULAS

Más en general, diremos que una fórmula B es **“derivable mediante tablas de verdad”** (abreviadamente, **“deriv tv”**) **de un conjunto de fórmulas** D, cuando al hacer la tabla conjunta para D y B, en todas las filas en las que **todas** las fórmulas de D salgan $\mathbb{V}$, la fórmula B también salga $\mathbb{V}$.

O dicho de otro modo: B *es deriv tv de* D*, cuando no hay ninguna fila en la cual todas las fórmulas de* D *salgan* $\mathbb{V}$*, y la fórmula* B *salga* $\mathbb{F}$.

Eso lo abreviaremos poniendo:

$$D \vdash_{\text{TV}} B$$

Y al hacer la tabla correspondiente, trazaremos de nuevo un rectángulo en aquellas filas en las que todas las premisas sean $\mathbb{V}$, si las hay.

Así por ejemplo, la siguiente tabla muestra que la fórmula q es deriv tv del conjunto de fórmulas $\neg\neg\neg p$, $p \vee q$:

p	q	$\neg$	$\neg$	$\neg$	p	p	$\vee$	q	q
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$			$\mathbb{V}$		$\mathbb{F}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$			$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$			$\mathbb{F}$		$\mathbb{F}$

Efectivamente, en este caso vemos que la única fila en la que las dos premisas son $\mathbb{V}$ es la 3ª fila de la tabla. Y en esa fila, la conclusión (es decir, la fórmula q) también es $\mathbb{V}$. Por consiguiente, a la vista de esa tabla podemos afirmar que:

$$\neg\neg\neg p \,,\ p \vee q \ \vdash_{\text{TV}} q$$

§ 20.4. TEOREMA DEL CÁLCULO TV

Por último, diremos que B es un **"teorema formal"** del cálculo de tablas (abreviadamente, "teor tv") cuando, al hacer la tabla de verdad para B , esta fórmula salga $\mathbb{V}$ en todas las filas.

Esto lo abreviaremos poniendo:

$$\vdash_{\text{TV}} B$$

Un ejemplo de ello es la fla:

$$\vdash_{\text{TV}} p \vee \neg p$$

lo cual se demuestra mediante la siguiente tabla:

p	p	$\vee$	$\neg$	p
$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$	
$\mathbb{F}$		$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$	

Otro ejemplo es:

$$\vdash_{\text{TV}} A \to A \vee B$$

lo cual se demuestra mediante la siguiente tabla:

A	B	A	$\to$	A	$\vee$	B
$\mathbb{V}$	$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$	
$\mathbb{V}$	$\mathbb{F}$		$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$		$\mathbb{V}$	
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$		$\mathbb{V}$		$\mathbb{F}$	

§ 20.5. METATEORÍA DEL CÁLCULO DE TABLAS DE VERDAD

Si comparamos la definición de las tablas de verdad (**§ 19.2** – **§ 19.6**) con las reglas de valoración semántica (**§ 7.2**), es bastante obvio que las tablas de verdad proporcionan un método de comprobación **correcto** y **completo** de la relación de consecuencia en lógica proposicional.

El argumento que lo demuestra es sencillo de detallar, pero tampoco nos vamos a detener a hacerlo aquí.

Por otro lado, es aún más obvio que las tablas de verdad constituyen un cálculo **puramente mecánico**. Ello es así porque, a diferencia de lo que ocurría con el cálculo de deducción natural, al rellenar las tablas no "elegimos" nada: nos limitamos a seguir las instrucciones ciegamente, sin más. Por consiguiente, se trata de un cálculo **decidible**.

En contrapartida, las tablas suelen resultar bastante más engorrosas que la deducción natural: no requieren ingenio, pero sí requieren más espacio (y más símbolos) para su realización.

Así por ejemplo, la derivación

$$\neg\neg\neg p\ ,\ p \vee q \ \vdash_{\text{DED NAT PROP}} q$$

es notablemente más escueta que su análoga mediante tabla de verdad (vista en **§ 20.3**):

(1)	$\neg\neg\neg p$	Pr
(2)	$p \vee q$	Pr
(3)	$\neg p$	DN 1
(4)	q	SD 2,3

§ 20.6. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Da ejemplos de tres fórmulas de lenprop en las que aparezcan tres símbolos proposicionales distintos, como en el primer ejemplo de **§ 20.1** . Haz su tabla de verdad conjunta.

2. Da ejemplos de dos fórmulas de lenprop en las que aparezcan dos símbolos proposicionales. Haz su tabla de verdad conjunta, e indica si alguna de ellas es deriv tv de la otra.

3. Da un ejemplo de fórmula de lenprop en la que aparezcan dos símbolos proposicionales, los mismos que en los ejemplos de 2. Verifica mediante tablas de verdad si dicha fórmula es deriv tv de las fórmulas de 2.

4. Utilizando los mismos símb props que en 2 y 3, da un ejemplo de teorema del cálculo tv y demuestra que lo es mediante la correspondiente tabla de verdad.

5. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Explica con tus propias palabras por qué el cálculo de tablas de verdad es decidible, mientras que el cálculo de deducción natural no lo era.

   b) Demuestra la derivabilidad del ejemplo 3 mediante deducción natural, de la forma más corta que se te ocurra. Indica si consideras que, a simple vista, esta derivación ha ocupado más o menos espacio que la tabla de verdad que construiste en la cuestión 3.

   c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

   d) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 21

Árboles para lógica proposicional: nociones iniciales y reglas básicas

§ 21.7. INTRODUCCIÓN A LOS ÁRBOLES LÓGICOS

El tercer y último cálculo deductivo que vamos a estudiar en este curso es también completamente mecánico, al igual que las tablas. Pero tiene la ventaja de ser mucho más elegante.

Se trata de los **árboles lógicos** (o **"método de árboles"**) **para la lógica proposicional** (abreviadamente, **arprop**). De hecho, este método constituye el cálculo más eficiente, es decir, el que mejor optimiza los recursos de procesamiento de la información.

La única pega que tiene es que es menos intuitivo que los dos primeros. Pero con un poco de práctica, nos acostumbraremos enseguida.

Para empezar, hay que decir que los árboles que vamos a construir están en posición invertida, es decir: con la base del árbol arriba, y a continuación, el tronco creciendo hacia abajo, y las ramas bifurcándose hacia abajo.

Dicho esto, el árbol está compuesto de **nodos**, cada uno de los cuales alberga una fórmula (más o menos como las *líneas* de las deducciones en dednatprop). A la izquierda de cada nodo hay un número, que indica el **nivel** de desarrollo del árbol. Y a la derecha hay que justificar la introducción de la fórmula o fórmulas en ese nivel, dependiendo de la regla que se haya utilizado para ello.

A continuación iremos presentando, una a una, las reglas de arprop. En la versión que estudiaremos aquí, este método consta de doce reglas distintas. En este tema introduciremos tres de ellas — las más básicas — y en el tema siguiente introduciremos las otras nueve.

§ 21.8. REGLA DE PREMISAS DE ARPROP

Aunque el método arprop se puede usar para varios propósitos, en este curso nos vamos a limitar a su uso principal, que es como cálculo para generar **derivaciones**, desde un conjunto de *premisas* hacia una *conclusión*.

Pues bien, la primera regla que vamos a estudiar es la **regla de premisas**. Esta regla se llama igual que su homóloga en dednatprop, y su funcionamiento es muy similar — de hecho, son prácticamente idénticas.

En efecto, esta regla establece que las premisas de la derivación ocuparán el inicio del árbol: a cada premisa corresponderá un nodo (desde el nivel 1 en adelante), y se irán colocando en vertical, una debajo de otra.

Además, a la izquierdea de cada premisa pondremos su nivel, y a la derecha pondremos la indicación "Pr" (*premisa*), tal y como hacíamos en dednatprop.

Ocasionalmente, veremos árboles con una sola premisa. Y también veremos *árboles sin premisas* (es decir, árboles "desde el conjunto vacío de premisas"). En este último caso, el árbol no tendrá ningún nodo correspondiente a las premisas, por lo que comenzaremos directamente con la *regla de conclusión*, de la que vamos a hablar ahora mismo.

§ 21.9. REGLA DE ARPROP PARA INTRODUCIR LA CONCLUSIÓN

Efectivamente, una vez colocadas las premisas (si las hay), viene el turno de la conclusión. Y aquí es donde el método de árboles resulta un poco anti-intuitivo, y puede jugarnos una mala pasada, si no prestamos atención.

Pues bien, de acuerdo con la **regla de conclusión** de arprop:

> **LA CONCLUSIÓN HAY QUE INTRODUCIRLA SIEMPRE CON UNA NEGACIÓN DELANTE.**

Dicho en forma de eslogan: *"antes de la conclusión, pon siempre una negación"*.

Además, a la izquierda de esta fórmula, colocaremos su nivel en el desarrollo del árbol. Este número será el correlativo que le toque, dependiendo de cuántas premisas tenga la derivación que vamos a comprobar. Si se trata de un árbol sin premisas, entonces el nodo de conclusión estará en el nivel 1.

Y a la derecha de este nodo, colocaremos la anotación "¬C", que significa *negación de la conclusión.*

Por último, al conjunto de estos primeros nodos (es decir, los nodos con las premisas, si las hay, y el nodo de negación de la conclusión), los llamaremos **“la base del árbol”** (así como **“el tronco inicial del árbol”**, o su **“lista inicial”**).

§ 21.10. REGLA DE CIERRE

Una vez colocado el tronco inicial, procederemos a **extender** el árbol, añadiendo nuevos nodos al mismo. Para ello, utilizaremos las restantes reglas, que iremos presentando en las próximas secciones.

Algunas de esas reglas abrirán una bifurcación en dos ramas separadas. Otras reglas continuarán el tronco del árbol (o la rama a la que se apliquen) en vertical, sin bifurcar.

Ahora bien, tras la introducción de cualquier nueva fórmula en el árbol, tenemos una obligación especial: *debemos recorrer la rama en cuestión hacia atrás, hasta arriba del todo.* **Y debemos comprobar si se da la circunstancia de que en algún nodo de esa rama aparece una fórmula A (la que sea), y en otro aparece su negación, $\neg A$.**

Si detectamos eso, entonces diremos que esos dos nodos **“chocan entre sí”**. Y en ese momento, colocaremos un círculo con una cruz (“$\otimes$”) debajo esa rama, y diremos que dicha rama **“está cerrada”**.

Asimismo, debajo de la cruz indicaremos los números de los nodos que chocan. Y ya no nos ocuparemos de extender esa rama nunca más. Es por ello que a esta tercera regla de arprop la llamamos **“regla de cierre”**.

§ 21.11. DINÁMICA GENERAL DEL MÉTODO DE ÁRBOLES

Mientras una rama no esté cerrada, diremos que **“esa rama está abierta”**, y seguiremos ocupándonos de extenderla, mientras las reglas nos lo permitan.

Si llega un momento en que las reglas del método no nos permiten extender más una rama abierta, entonces diremos que **“esa rama está terminada y abierta”**.

En cuanto al árbol en su conjunto, si se llegan a cerrar todas sus ramas, entonces diremos que **“el árbol está cerrado”** (o que **“el árbol está terminado y cerrado”**, o que **“el árbol ha terminado cerrando”**).

Ahora bien, mientras el árbol tenga una o más ramas abiertas, entonces diremos que **“el árbol está abierto”**, y seguiremos ocupándonos de extenderlo, mientras las reglas nos lo permitan.

Y finalmente, si llega un momento en que las reglas del método no nos permiten extender más un árbol, aunque tenga ramas abiertas, entonces diremos que **“ese árbol está terminado y abierto”** (o que **“el árbol ha terminado abierto”**).

Por último, adoptaremos la siguiente pauta de actuación, por economía del método: **siempre que podamos, aplicaremos las reglas que no bifurcan antes que las reglas que bifurcan**. Esto no cambiará el hecho de que el árbol termine cerrado o abierto, pero sí hará que los árboles sean más cortos — y por tanto, nos ayudará a optimizar esfuerzos.

§ 21.12. DERIVABILIDAD EN ARPROP A PARTIR DE UNA FÓRMULA

Una vez asentado todo lo anterior, diremos que una fórmula B es **“derivable de otra fórmula A en arprop”**, cuando cualquier árbol que tenga como tronco inicial la premisa A y la conclusión B, acabe cerrando.

Para abreviar esto, utilizaremos la “puerta giratoria sencilla” con el subíndice “AP” (por “arprop”), poniendo:

$$A \vdash_{\text{AP}} B$$

Por otra parte, si a partir del tronco inicial formado por la premisa A y la conclusión B, conseguimos construir un árbol terminado y abierto, entonces diremos que B **“no es derivable de A en arprop”**, lo cual representaremos mediante:

$$A \nvdash_{\text{AP}} B$$

§ 21.13. EJEMPLO DE DERIVABILIDAD EN ARPROP A PARTIR DE UNA FÓRMULA

Para construir nuestro primer árbol, vamos a utilizar una sola fórmula, p, y la vamos a colocar como premisa y como conclusión. En ese caso, aplicando todo lo dicho hasta ahora, pondremos:

$$\begin{array}{ccc} (1) & p & \text{Pr} \\ (2) & \neg p & \neg\text{C} \\ & \underset{1,2}{\otimes} & \end{array}$$

Efectivamente, hemos colocado la única premisa (es decir, la fórmula p) en el nivel 1, avalada por la regla Pr. Y a continuación, en el nivel 2, hemos colocado la *negación* de la conclusión (es decir, la fórmula $\neg p$), avalada por la regla ¬C.

Ahora bien, inmediatamente después de introducir el segundo nodo, nos percatamos de que este *choca* con el primero. Por lo tanto, procedemos a cerrar esa rama, indicando los niveles de los nodos que chocan (el 1 y el 2).

Así pues, en este caso, el árbol termina cerrando. Con lo cual, hemos demostrado que:

$$p \vdash_{\text{AP}} p$$

§ 21.14. DERIVABILIDAD EN ARPROP A PARTIR DE UN CONJUNTO DE FÓRMULAS

Más en general, diremos que B es **"derivable de un conjunto de fórmulas D en arprop"**, cuando exista un árbol cerrado cuyas premisas sean fórmulas de D, y cuya conclusión sea la fórmula B.

Esto lo abreviaremos poniendo:

$$D \vdash_{\text{AP}} B$$

Por su parte, si ocurre que cualquier árbol que comience con premisas de D y la conclusión B termina abierto, entonces diremos que **"B no es derivable de D en arprop"**. Y esto lo abreviaremos poniendo:

$$D \nvdash_{\text{AP}} B$$

§ 21.15. EJEMPLO DE NO DERIVABILIDAD EN ARPROP A PARTIR DE UN CONJUNTO DE FÓRMULAS

Para construir nuestro segundo árbol, vamos a partir de las fórmulas p, q y r como premisas, y de la fórmula s como conclusión. Por consiguiente, empezaremos el árbol colocando una premisa en cada uno de los nodos iniciales, y a continuación colocaremos la negación de la conclusión:

$$\begin{array}{lcl} (1) & p & \text{Pr} \\ (2) & q & \text{Pr} \\ (3) & r & \text{Pr} \\ (4) & \neg s & \neg\text{C} \end{array}$$

Aunque todavía nos quedan por introducir nueve reglas del método de árboles, podemos anticipar que ninguna de ellas se aplica a simprops o negaciones de simprops.

Por consiguiente, este árbol no se puede extender más: se trata de un árbol terminado y abierto.

Con lo cual, hemos demostrado que:

$$p\ ,\ q\ ,\ r \nvdash_{\text{AP}} s$$

§ 21.16. TEOREMAS FORMALES DE ARPROP

A su vez, diremos que B es un **"teorema formal de arprop"**, cuando cualquier árbol que comience con $\neg B$ (sin incorporar ninguna premisa) acabe cerrando.

Esto lo abreviaremos poniendo:

$$\vdash_{\text{AP}} B$$

Y diremos que B **no** es un **"teorema formal de arprop"**, cuando cualquier árbol que comience con $\neg B$ (sin incorporar ninguna premisa) termine abierto.

Esto lo abreviaremos poniendo:

$$\nvdash_{\text{AP}} B$$

§ 21.17. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Indica brevemente qué pega tiene arprop, según **§ 21.7** y **§ 21.9** .
2. Indica brevemente en qué consiste el tronco inicial de un árbol, y cómo hay que construirlo.
3. Explica, a partir de **§ 21.11** , si es posible que un árbol cerrado tenga una rama abierta.
4. Inspirándote en **§ 21.10** y **§ 21.13** , construye un árbol para demostrar que:
$$\neg\neg q \vdash_{\text{AP}} q$$
5. Inspirándote en **§ 21.15** , construye un árbol para demostrar que:

$$\neg p \ , \ \neg q \ , \ \neg r \nvdash_{\text{AP}} s$$

6. Inspirándote otra vez en **§ 21.15**, construye un árbol para demostrar que:

$$\nvdash_{\text{AP}} p$$

7. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

   b) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 22

Árboles para lógica proposicional: reglas dinámicas

§ 22.1. REGLAS BÁSICAS Y REGLAS DINÁMICAS

A las tres primeras reglas de arprop, que introdujimos en el tema anterior (es decir, la regla de premisas, la regla de conclusión y la regla de cierre), las vamos a llamar **"reglas básicas de arprop"**.

Y a las restantes nueve reglas, que irán apareciendo a lo largo de este tema, las llamaremos **"reglas dinámicas"**. Este nombre está justificado en cuanto que cada una de estas reglas **extiende el árbol**, mediante la introducción de nodos nuevos a partir de los nodos ya existentes.

§ 22.2. REGLA DE DOBLE NEGACIÓN DE ARPROP

La **regla de doble negación de arprop** consiste en lo siguiente.

Sea A cualquier fórmula de lenprop, y supongamos que un nodo de un árbol consiste en la fórmula $\neg\neg A$. Pues bien, en ese caso procederemos a extender todas las ramas abiertas que contengan ese nodo, añadiendo la fórmula A. Al hacerlo, pondremos a la derecha de A la indicación "$\boxed{\neg\neg}$", seguida del nivel del nodo donde estaba la fórmula inicial.

Además, procederemos a colocar la marca de cotejo ("✓") a la derecha de $\neg\neg A$, pegadita a la fórmula. Dicha marca nos servirá como recordatorio de que **la fórmula $\neg\neg A$ ha sido utilizada en ese árbol, y ya no la volveremos a utilizar más**.

En este contexto, decimos que la fórmula $\neg\neg A$ es la **"premisa de la regla $\boxed{\neg\neg}$"**, mientras que la fórmula A es la **"conclusión"** de esta regla.

Esquemáticamente, podemos representar la regla $\boxed{\neg\neg}$ poniendo:

$$\boxed{\neg\neg}$$

$$\neg\neg A \ \checkmark$$

$$|$$

$$A \qquad \boxed{\neg\neg}\ \textit{nivel de}\ \neg\neg A$$

§ 22.3. EJEMPLO DE ÁRBOL CON LA REGLA DE DOBLE NEGACIÓN

Un ejemplo de árbol sencillo que usa la regla de doble negación es el que demuestra que:

$$\neg\neg\neg\neg p \ \vdash_{\text{AP}} \ p$$

En efecto, construimos un árbol cerrado para esa derivación poniendo:

(1)	$\neg\neg\neg\neg p$	Pr
(2)	$\neg p$	$\neg$C
(3)	$\neg\neg p$	$\boxed{\neg\neg}$ 1
	$\underset{2,3}{\otimes}$	

Como vemos, en el nodo 3 hemos introducido la fórmula que resulta de eliminar la primera doble negación en el nodo 1. Y la fórmula que resulta choca con el nodo 2, lo cual cierra el árbol.

§ 22.4. REGLA DE ARPROP PARA LA CONJUNCIÓN

La **regla de arprop para la conjunción** es también sumamente sencilla, y consiste en lo siguiente.

Sean A y B fórmulas cualesquiera de lenprop, y supongamos que un nodo de un árbol consiste en la fórmula $A \wedge B$. Pues bien, en ese caso procederemos a extender todas las ramas abiertas que contengan ese nodo, añadiendo dos nuevos nodos en vertical, en niveles sucesivos: en el primero de ellos colocaremos la fórmula A, y en el segundo colocaremos la fórmula B.

A la izquierda de cada uno de estos dos nodos, indicaremos el nivel correspondiente del árbol. Y a su derecha pondremos la indicación "$\boxed{\wedge}$", seguida del número de nivel de la fórmula $A \wedge B$.

Además, procederemos a colocar la marca de cotejo ("✓") a la derecha de $A \wedge B$, pegadita a la fórmula. Dicha marca nos servirá como recordatorio de que **la fórmula $A \wedge B$ ha sido utilizada en ese árbol, y ya no la volveremos a utilizar más**.

En este contexto, decimos que la fórmula $A \wedge B$ es la **“premisa de la regla $\boxed{\wedge}$”**, mientras que las fórmulas A y B son las **“conclusiones”** de esta regla.

Esquemáticamente, podemos representar la regla $\boxed{\wedge}$ poniendo:

$$\boxed{\boldsymbol{\wedge}}$$

$$\begin{array}{cl}
A \wedge B \ \checkmark & \\
| & \\
A & \boxed{\wedge}\ \textit{nivel de}\ A \wedge B \\
B & \boxed{\wedge}\ \textit{nivel de}\ A \wedge B
\end{array}$$

§ 22.5. EJEMPLO DE ÁRBOL CON LA REGLA DE LA CONJUNCIÓN

Un ejemplo sencillo de árbol que usa la regla de la conjunción es el que demuestra que:

$$p \wedge q \ \vdash_{\text{AP}} q$$

En efecto, construimos un árbol cerrado para esa derivación poniendo:

$$\begin{array}{ccl}
(1) & p \wedge q & \text{Pr} \\
(2) & \neg q & \neg\text{C} \\
(3) & p & \boxed{\wedge}\ 1 \\
(4) & q & \boxed{\wedge}\ 1 \\
 & \underset{2,4}{\otimes} &
\end{array}$$

§ 22.6. REGLA DE ARPROP PARA LA CONJUNCIÓN NEGADA

La **regla de arprop para la conjunción negada** es la primera de las reglas que vamos a ver que bifurca las ramas. Y lo hace de la manera siguiente.

Sean A y B fórmulas cualesquiera de lenprop, y supongamos que un nodo de un árbol consiste en la fórmula $\neg(A \wedge B)$.

Pues bien, en ese caso procederemos a extender todas las ramas abiertas que contengan ese nodo, mediante una bifurcación en dos nodos nuevos: en el nodo de la izquierda colocaremos la fórmula $\neg A$, y en el nodo de la derecha colocaremos la fórmula $\neg B$.

A la izquierda de estos dos nodos, indicaremos el número del nuevo nivel del árbol. Y a la derecha, pondremos la indicación "$\boxed{\neg\wedge}$", seguida del número de nivel de la fórmula $\neg(A \wedge B)$.

Además, procederemos a colocar la marca de cotejo ("✓") a la derecha de $\neg(A \wedge B)$, pegadita a la fórmula. Dicha marca nos servirá como recordatorio de que **la fórmula $\neg(A \wedge B)$ ha sido utilizada en ese árbol, y ya no la volveremos a utilizar más**.

En este contexto, decimos que la fórmula $\neg(A \wedge B)$ es la **"premisa de la regla $\boxed{\neg\wedge}$"**, mientras que las fórmulas $\neg A$ y $\neg B$ son las **"conclusiones"** de esta regla.

Esquemáticamente, podemos representar la regla $\boxed{\neg\wedge}$ poniendo:

$$\boxed{\neg\wedge}$$

$$\begin{array}{ccc} & \neg(A \wedge B)\ \checkmark & \\ \neg A & & \neg B \end{array}$$

$\boxed{\neg\wedge}$ *nivel de* $\neg(A \wedge B)$

§ 22.7. EJEMPLO DE ÁRBOL CON LA REGLA DE LA CONJUNCIÓN NEGADA

Como ejemplo sencillo de árbol que usa la regla de la conjunción negada, vamos a construir un árbol para mostrar que:

$$r \nvdash_{\mathrm{AP}} r \wedge s$$

Es decir, vamos a demostrar que $r \wedge s$ *no* es derivable desde r, en arprop.

Para demostrar esto, construimos un árbol a partir de la premisa r y la conclusión $r \wedge s$, y comprobamos que *el árbol termina abierto*:

$$\begin{array}{lccl} (1) & & r & \text{Pr} \\ (2) & & \neg(r \wedge s)\ \checkmark & \neg\text{C} \\ (3) & \neg r & \neg s & \boxed{\neg\wedge}\ 2 \\ & \underset{1,3}{\otimes} & & \end{array}$$

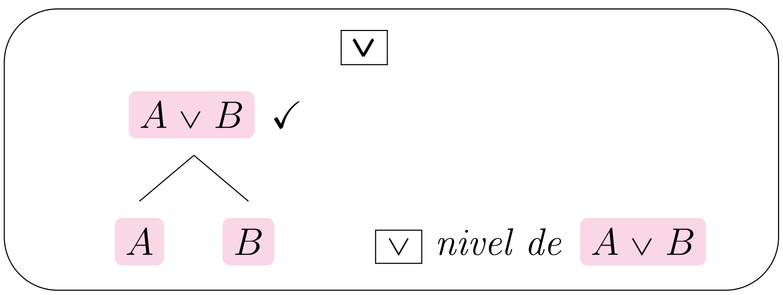
Efectivamente, vemos que la rama de la izquierda cierra, pero que la rama de la derecha termina abierta, y ya no quedan más nodos a los que aplicarles nuevas reglas.

Por lo tanto, el árbol termina abierto, lo cual demuestra que $r \wedge s$ *no* es derivable de la premisa r en arprop.

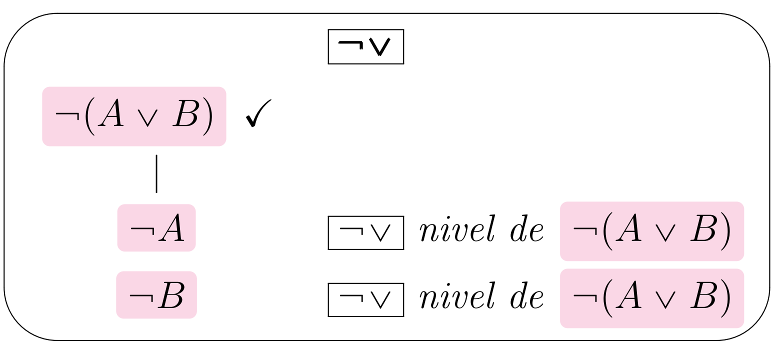
§ 22.8. REGLA DE ARPROP PARA LA DISYUNCIÓN

El resto de reglas de arprop son similares a las anteriores.

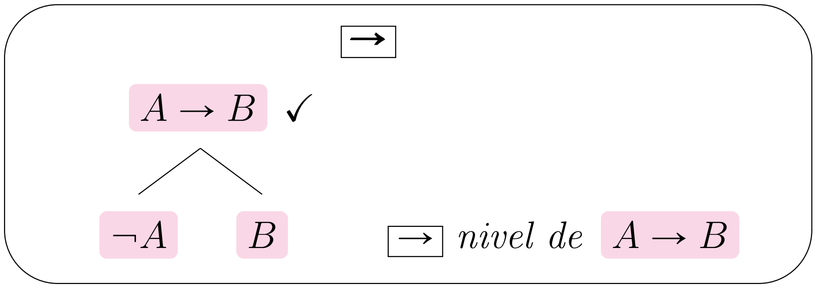
Y por ello, contando con el trabajo que ya hemos hecho con estas primeras reglas, y con el bagaje adquirido a lo largo del curso, nos vamos a limitar a dar el esquema de cada una.



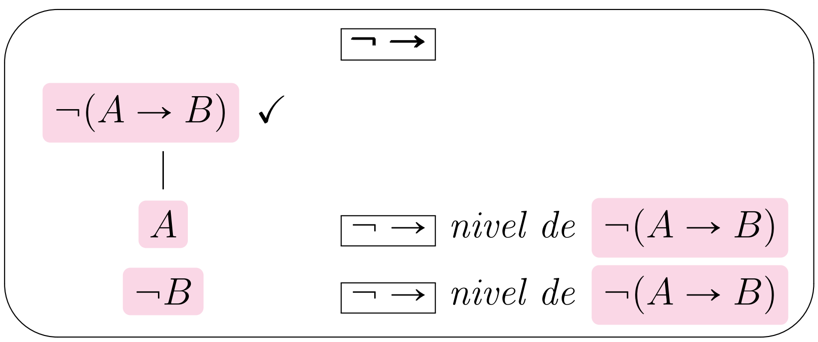
§ 22.9. REGLA DE ARPROP PARA LA DISYUNCIÓN NEGADA



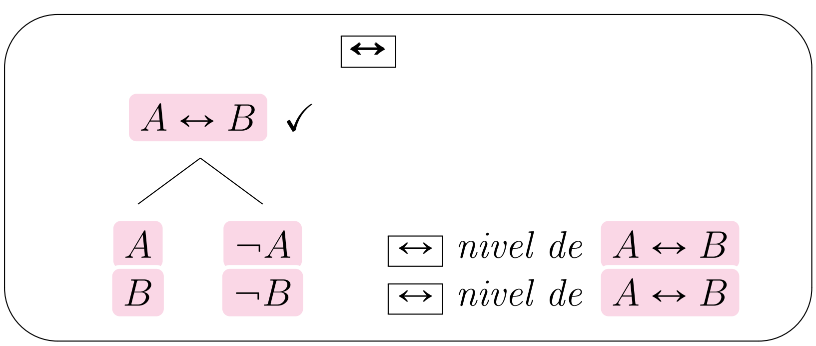
§ 22.10. REGLA DE ARPROP PARA EL CONDICIONAL



§ 22.11. REGLA DE ARPROP PARA EL CONDICIONAL NEGADO



§ 22.12. REGLA DE ARPROP PARA EL BICONDICIONAL



§ 22.13. REGLA DE ARPROP PARA EL BICONDICIONAL NEGADO

$\boxed{\neg \leftrightarrow}$

$\neg(A \leftrightarrow B)$ ✓

A	$\neg A$	$\boxed{\neg \leftrightarrow}$ *nivel de* $A \leftrightarrow B$
$\neg B$	B	$\boxed{\neg \leftrightarrow}$ *nivel de* $A \leftrightarrow B$

§ 22.14. EJEMPLOS DE ÁRBOLES CON DIVERSAS REGLAS

Vamos a empezar construyendo un árbol para demostrar:

$$p \vee (q \to r)\ ,\ \neg p \ \vdash_{\text{AP}} \ \neg(q \wedge \neg r)$$

(1)	$p \vee (q \to r)$ ✓		Pr
(2)	$\neg p$		Pr
(3)	$\neg\neg(q \wedge \neg r)$ ✓		$\neg$C
(4)	$q \wedge \neg r$ ✓		$\boxed{\neg\neg}$ 3
(5)	q		$\boxed{\wedge}$ 4
(6)	$\neg r$		$\boxed{\wedge}$ 4
(7)	p $\otimes$ 2,7	$q \to r$ ✓	$\boxed{\vee}$ 1
(8)		$\neg q$ $\otimes$ 5,8 r $\otimes$ 6,8	$\boxed{\to}$ 7

Y por último, construiremos otro árbol para demostrar:

$$p \leftrightarrow q \,,\; \neg(p \vee r) \nvdash_{\text{AP}} q$$

(1)	$p \leftrightarrow q$ ✓		Pr
(2)	$\neg(p \vee r)$ ✓		Pr
(3)	$\neg q$		$\neg$C
(4)	$\neg p$		$\boxed{\neg\vee}$ 2
(5)	$\neg r$		$\boxed{\neg\vee}$ 2
(6)	p	$\neg p$	$\boxed{\leftrightarrow}$ 1
(7)	q	$\neg q$	$\boxed{\leftrightarrow}$ 1
	$\otimes$ 3,7 — 4,6		

Como vemos, una de las ramas de este último árbol termina cerrando, pero la otra no. Por lo tanto, el árbol termina abierto, lo cual demuestra que *no* existe una derivación desde las premisas $p \leftrightarrow q$ y $\neg(p \vee r)$ hacia la conclusión q, en arprop.

§ 22.15. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Inspirándote en **§ 22.4** y **§ 22.6**, construye un árbol para demostrar:

$$p \wedge q \,,\; r \wedge s \;\vdash_{\text{AP}}\; p \wedge s$$

2. Usando las reglas $\boxed{\neg\neg}$, $\boxed{\vee}$ y $\boxed{\neg \rightarrow}$, construye un árbol para demostrar:

$$\neg\neg\neg p \vee q \;\vdash_{\text{AP}}\; p \rightarrow q$$

3. Construye un árbol terminado y abierto, para demostrar:

$$p \leftrightarrow q \ , \ p \vee r \nvdash_{\text{AP}} p \rightarrow r$$

4. Pon un ejemplo de argumento formal que se pueda derivar en arprop, y construye un árbol para demostrarlo.

5. Pon un ejemplo de argumento formal que *no* se pueda derivar en arprop, y construye un árbol para demostrarlo.

6. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Pon más ejemplos similares a los pedidos en 4 y 5, tan complejos como te sea posible.

   b) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

   c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 23

Metateoría del método de árboles para la lógica proposicional

§ 23.1. DECIDIBILIDAD DE ARPROP Y METATEORÍA DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

A la vista de las reglas del método, es evidente que **arprop es decidible**. En efecto, la construcción de los árboles es puramente mecánica: basta con ir aplicando las reglas una tras otra, hasta que no quede ninguna por aplicar. Y es obvio que todos los árboles terminan, abiertos o cerrados, tras un número finito de pasos.

Por consiguiente, ya conocemos dos cálculos deductivos deducibles para la lógica proposicional (las tablas de verdad y arprop). Y por el hecho de existir cálculos deductivos decidibles para la lógica proposicional, decimos genéricamente que **“la lógica proposicional es decidible”**.

A continuación, vamos a probar que arprop es también un cálculo correcto y completo, en el sentido en que definimos estos términos en **§ 18.6** .

Por consiguiente, los tres cálculos deductivos para la lógica proposicional que hemos presentado este curso (dednatprop, las tablas de verdad y arprop), han resultado ser correctos y completos. Y en el caso de arprop, lo vamos a demostrar detalladamente.

Pues bien, por el hecho de que existir sistemas deductivos correctos y completos para la lógica proposicional, decimos genéricamente que **“la lógica proposicional es axiomatizable”**.

§ 23.2. LEMA DE CORRECCIÓN DE LAS REGLAS DINÁMICAS DE ARPROP

Si una interpretación satisface la premisa de una regla dinámica, entonces también satisface sus conclusiones (en el caso en que la regla no bifurque), o al menos una de la ramas de conclusiones (en el caso en que la regla bifurque).

Prueba. La prueba de este resultado es muy sencilla: basta con inspeccionar las reglas dinámicas de arprop, una a una, y cotejarlas con las reglas de valoración semántica que vimos en **§ 7.2** .

Empecemos con las reglas que no bifurcan, y concretamente con la primera de ellas, $\boxed{\neg\neg}$. Pues bien, si una intprop I satisface la fórmula $\neg\neg A$ (es decir, si $I(\neg\neg A) = \mathbb{V}$), es obvio que también satisfará la fórmula A (es decir, $I(A) = \mathbb{V}$). En definitiva: si I satisface la premisa de la regla, también satisfará su conclusión.

La siguiente regla que no bifurca es $\boxed{\wedge}$. En este caso, la regla tiene dos conclusiones: A y B. Ahora bien, resulta obvio que si $I(A \wedge B) = \mathbb{V}$, entonces tendremos necesariamente $I(A) = \mathbb{V}$ y

$I(B) = \mathbb{V}$. Es decir, que si I satisface la premisa de la regla, entonces satisfará también sus dos conclusiones.

Lo mismo ocurre con las otras dos reglas que no bifurcan, $\boxed{\neg\vee}$ y $\boxed{\neg\rightarrow}$. Pero en este caso, vamos a dejar su explicación para las *Cuestiones* del final.

En cuanto a las reglas de arprop que bifurcan, son cinco: $\boxed{\neg\wedge}$, $\boxed{\vee}$, $\boxed{\rightarrow}$, $\boxed{\leftrightarrow}$ y $\boxed{\neg\leftrightarrow}$. Empezaremos examinando la primera de ellas, $\boxed{\neg\wedge}$.

Pues bien, supongamos que $I(\neg(A \wedge B)) = \mathbb{V}$. Como sabemos por **§ 22.6**, esta regla bifurca en dos: por una parte, $\neg A$, y por la otra, $\neg B$.

Ahora bien, es obvio que si $I(\neg(A \wedge B)) = \mathbb{V}$, entonces necesariamente tiene que ocurrir $I(A) = \mathbb{F}$ o $I(B) = \mathbb{F}$. Y por consiguiente, tendremos $I(\neg A) = \mathbb{V}$ o $I(\neg B) = \mathbb{V}$. Es decir, que I tiene que satisfacer una de las dos bifurcaciones, como se quería demostrar.

Las reglas $\boxed{\vee}$ y $\boxed{\rightarrow}$ se resuelven de forma similar, así que las dejaremos para las *Cuestiones* del final.

En cuanto a la regla $\boxed{\leftrightarrow}$, supongamos que $I(A \leftrightarrow B) = \mathbb{V}$. Pues bien, aplicando la valoración semántica de esta conectiva, es obvio que tendremos necesariamente, o bien:

$$I(A) = \mathbb{V} \qquad \text{y} \qquad I(B) = \mathbb{V}$$

o bien:

$$I(A) = \mathbb{F} \qquad \text{y} \qquad I(B) = \mathbb{F}$$

En el primer caso, serán $\mathbb{V}$ bajo I las conclusiones de la rama izquierda de esta regla. Y en el segundo caso, lo serán las conclusiones de la rama derecha. Por consiguiente, I satisface al menos una de las bifurcaciones, como se quería demostrar.

La regla $\boxed{\neg \leftrightarrow}$, por último, es similar a esta, y la dejaremos también para las *Cuestiones* del final.

§ 23.3. LEMA DE CORRECCIÓN DEL MÉTODO DE ÁRBOLES PARA LA LÓGICA PROPOSICIONAL

En arprop, si la lista inicial de un árbol es satisfacible, entonces el árbol terminará abierto.

Prueba. Supongamos que la lista inicial de un árbol es satisfacible. Por consiguiente, habrá una intprop, digamos I, que hará $\mathbb{V}$ a todas las fórmulas de esa lista.

El tronco inicial del árbol tiene que estar abierto, puesto que de otro modo tendría que contener una fórmula y su negación, y en tal caso la lista inicial no sería satisfacible.

Ahora bien, del lema que acabamos de demostrar se sigue que, al extender el tronco inicial mediante la aplicación de una regla dinámica, puesto que la premisa es $\mathbb{V}$ bajo I, al menos una de las ramas obtenidas seguirá siendo $\mathbb{V}$ bajo I. Esto ocurrirá con una de las dos ramas de la bifurcación, si se trata de una regla que bifurca, o bien con la continuación de la rama, si se trata de una regla que no bifurca.

En cualquier caso, la extensión del tronco inicial mediante cualquier regla, siempre contendrá una rama cuyas fórmulas son $\mathbb{V}$ bajo I.

A su vez, cuando esta rama se extienda por la aplicación de otra regla dinámica, al menos una rama obtenida de ella seguirá siendo $\mathbb{V}$ bajo I. Y así sucesivamente.

Ello implica que dicha rama estará siempre abierta, necesariamente, porque de otro modo tendría que contener una fórmula y su negación, y sus fórmulas no podrían ser (todas ellas) $\mathbb{V}$ bajo I.

Por consiguiente, este árbol no puede cerrar nunca, por lo que terminará abierto, como queríamos demostrar.

§ 23.4. TEOREMA DE CORRECCIÓN DEL MÉTODO DE ÁRBOLES PARA LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Si una fórmula es derivable en arprop de un conjunto de fórmulas, entonces es una consecuencia lógica suya:

$$\textbf{Si} \qquad D \vdash_{\text{AP}} \boxed{A} \qquad \textbf{entonces} \qquad D \models_{\text{PROP}} \boxed{A}$$

Prueba. Si $D \vdash_{\text{AP}} \boxed{A}$, ello significa que habrá un árbol cerrado, cuyo tronco inicial contendrá fórmulas de D como premisas, y la fórmula $\boxed{\neg A}$ como negación de la conclusión.

Ahora bien, en virtud del lema anterior, eso implica que no hay ninguna intprop que satisfaga simultáneamente todas las fórmulas de D y $\boxed{\neg A}$ (puesto que si la hubiera, el árbol tendría que terminar abierto).

Por consiguiente, cualquier intprop que satisfaga las fórmulas de D, tiene que satisfacer también a $\boxed{A}$. Es decir, que $\boxed{A}$ es consecuencia lógica de D (en otras palabras, $D \models_{\text{PROP}} \boxed{A}$), como se quería demostrar.

Una vez concluida la demostración del teorema de corrección, pasamos a la del teorema de completitud. También en este caso, la prueba procede a partir de dos lemas previos.

§ 23.5. LEMA DE COMPLETITUD DE LAS REGLAS DINÁMICAS DE ARPROP

Si una interpretación satisface las conclusiones de una regla dinámica (en el caso de que la regla no bifurque), o al menos

una de las ramas de conclusiones (en el caso de que la regla bifurque), entonces también satisface la premisa de esa regla.

Prueba. Este lema es recíproco al lema de corrección de las reglas dinámicas, y su prueba es similar. En efecto, también aquí basta con ir inspeccionando las reglas dinámicas de arprop una por una, y cotejarlas con las reglas de valoración semántica que vimos en **§ 7.2** . La única diferencia es que en este caso iremos "de abajo a arriba", por así decirlo.

Para esta prueba también empezaremos con las reglas que no bifurcan, y concretamente con $\boxed{\neg\neg}$.

Pues bien, partimos de la hipótesis de que una intprop I satisface la conclusión de esta regla, es decir, A . Dicho en otras palabras, partimos de la hipótesis de que $I(A) = \mathbb{V}$.

Pero entonces, resulta obvio que I también tiene que satisfacer la premisa de esta regla, y por consiguiente $I(\neg\neg A) = \mathbb{V}$.

La siguiente regla que no bifurca es $\boxed{\wedge}$, y la prueba del lema en este caso es igual de sencilla.

En efecto, partimos ahora de la hipótesis de que una intprop I satisface las dos conclusiones de esta regla, es decir, A y B (siendo A y B flas cualesquiera de lenprop). Pero en ese caso, resulta igualmente obvio que I tiene que satisfacer también la premisa de esta regla, es decir, la fla $A \wedge B$.

Otro tanto ocurre con las otras dos reglas que no bifurcan ($\boxed{\neg\vee}$ y $\boxed{\rightarrow}$), cuya explicación dejamos para las *Cuestiones*.

En cuanto a las reglas que bifurcan, empezaremos una vez más por la primera de ellas, $\boxed{\neg\wedge}$.

Pues bien, la premisa de dicha regla es la fórmula $\neg(A \wedge B)$, y la aplicación de la regla bifurca la rama en dos conclusiones separadas: en la rama izquierda aparece la fórmula $\neg A$, y en la rama derecha aparece la fórmula $\neg B$.

Ahora bien, es obvio que si cualquiera de estas dos fórmulas ($\neg A$ o $\neg B$) es $\mathbb{V}$ bajo I, también lo va a ser la fórmula $\neg(A \wedge B)$. Por consiguiente, el lema se cumple también en este caso.

Con el resto de reglas que bifurcan ($\boxed{\vee}$, $\boxed{\rightarrow}$, $\boxed{\leftrightarrow}$ y $\boxed{\neg\leftrightarrow}$) el razonamiento es igual de fácil, así que volveremos a dejar su explicación para las *Cuestiones* del final.

§ 23.6. LEMA DE COMPLETITUD DEL MÉTODO DE ÁRBOLES PARA LA LÓGICA PROPOSICIONAL

En arprop, si un árbol termina abierto, entonces la lista inicial es satisfacible.

Prueba. Para que un árbol termine abierto, tiene que tener al menos una rama abierta y terminada. Sea R dicha rama.

A continuación, vamos a definir una intprop I, que hará verdaderas a todas las fórmulas de R. Como la lista inicial del árbol (es decir, la base del tronco) pertenece a esta rama, se seguirá que dicha rama es satisfacible.

La definición de dicha interpretación es muy sencilla: I asignará el valor $\mathbb{V}$ a cada simprop que aparezca como nodo en la rama R. Y asignará el valor $\mathbb{F}$ a todos los demás.

Apoyándonos en el lema previo, es fácil ver que I tiene que hacer verdaderas, necesariamente, a todas las flas de la rama R.

Para comprobarlo, lo primero que tenemos que observar es que cada regla dinámica va descomponiendo las fórmulas a las que se aplica en fórmulas más pequeñas. A su vez, si a estas fórmulas se le aplican nuevas reglas, el resultado serán fórmulas aún más pequeñas. Y así sucesivamente, hasta llegar a las fórmulas atómicas y negaciones de atómicas, a las que ya no se puede aplicar ninguna regla.

Por hipótesis, todas las fórmulas atómicas de R (es decir, todos los simprops que aparecen como nodos independientes de la rama) son $\mathbb{V}$ bajo I.

Además, si R contiene la negación de una fórmula atómica, digamos $\neg p$, entonces no puede contener la propia fórmula p, porque se trata de una rama abierta. Y si R no contiene la fla p, eso significa que $I(p) = \mathbb{F}$, por definición de I. Y por consiguiente, $I(\neg p) = \mathbb{V}$-

Ello significa que todas las fórmulas atómicas, y todas las negaciones de fórmulas atómicas, que aparezcan en R, serán verdaderas bajo la interpretación I.

Ahora bien, exceptuando las fórmulas que pertenezcan al tronco inicial del árbol, el resto de fórmulas atómicas y negaciones de atómicas que estén en R, tendrán que ser conclusiones de las distintas reglas que se hayan aplicado en esa rama. Por consiguiente, en virtud del lema previo, también las premisas de esas reglas serán $\mathbb{V}$ bajo I.

A su vez, si esas premisas se han obtenido como conclusión de otras reglas, por la misma razón se sigue que a su vez las premisas de esas reglas serán $\mathbb{V}$ bajo I. Y así sucesivamente, hasta llegar a las fórmulas que están más arriba en el árbol.

Y por último, como la rama está terminada, sabemos que a todas sus fórmulas que no sean simprops o negaciones de simprops se le habrán aplicado las correspondientes reglas. Por consiguiente, cada una de esas fórmulas será premisa de alguna regla, y tendrá que ser $\mathbb{V}$ bajo I, en virtud del razonamiento precedente.

En definitiva, podemos concluir que todas las fórmulas de la rama R son verdaderas bajo I, como se quería demostrar.

§ 23.7. TEOREMA DE COMPLETITUD DEL MÉTODO DE ÁRBOLES PARA LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Si una fórmula es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas, entonces es derivable de dicho conjunto en arprop:

$$\textbf{Si} \qquad D \models_{\text{PROP}} A \qquad \textbf{entonces} \qquad D \vdash_{\text{AP}} A$$

Prueba (restringida). Para simplificar la prueba de este teorema, vamos a suponer que D es un conjunto *finito* de fórmulas. Por consiguiente, no probaremos el resultado en su generalidad, sino en esta versión restringida. El teorema en su generalidad también se puede demostrar, pero la prueba es mucho más compleja.

Pues bien, vamos a construir un árbol imaginario, en cuyo tronco inicial pondremos las fórmulas de D como premisas, junto con la fórmula $\neg A$ como negación de la conclusión.

A continuación, supondremos que hemos aplicado todas las reglas correspondientes, hasta que ese árbol esté terminado.

Como partimos de la hipótesis de que $D \models_{\text{PROP}} A$, podemos dar por sentado que cualquier interpretación que haga $\mathbb{V}$ a todas las flas de D, también hará $\mathbb{V}$ a la fla A. Por consiguiente, no puede haber ninguna intprop que haga $\mathbb{V}$ a todas las flas de D y a la fla $\neg A$ al mismo tiempo.

En consecuencia, en virtud del lema anterior, se sigue que el árbol para D y $\neg A$ tiene que terminar cerrando. Y de ello, se sigue a su vez $D \vdash_{\text{AP}} A$, como queríamos demostrar.

§ 23.8. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr. Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el tema.

1. Inspirándote en **§ 23.2**, explica por qué las reglas $\boxed{\neg\vee}$ y $\boxed{\neg \rightarrow}$ cumplen el lema de corrección de las reglas de arprop.
2. Haz lo mismo que en el punto anterior, pero respecto de las reglas $\boxed{\vee}$ y $\boxed{\rightarrow}$.
3. Inspirándote en **§ 23.5**, explica por qué las reglas $\boxed{\neg\vee}$ y $\boxed{\neg \rightarrow}$ cumplen el lema de completitud de las reglas de arprop.
4. Haz lo mismo que en el punto anterior, pero respecto de las reglas $\boxed{\vee}$ y $\boxed{\rightarrow}$.

5. Siguiendo las instrucciones de **§ 23.5** , especifica la interpretación I que hace $\mathbb{V}$ a la rama abierta del segundo ejemplo de **§ 22.14** .

6. Explica con tus propias palabras las consecuencias que se siguen de **§ 23.1** , **§ 23.4** y **§ 23.7** , sobre el trasfondo de lo indicado en **§ 18.6** .

7. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Haz un resumen sinóptico de este tema, con tus propias palabras.

   b) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

   c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.

Tema 24

Lógicas no clásicas e inteligencia artificial

§ 24.1. ¿POR DÓNDE SEGUIR?

Estamos llegando al final de nuestro viaje, y es el momento de preguntarnos qué hay más allá: ¿por dónde podemos seguir avanzando, en nuestro estudio del razonamiento deductivo?

Una primera ruta que podemos tomar consiste en ahondar en los mismos contenidos que hemos visto aquí (es decir, la lógica proposicional clásica), pero a un nivel más profundo, riguroso y sofisticado. Para ello, podemos consultar un manual de lógica avanzada, como por ejemplo el capítulo 7 de:

Moshé Machover, *Set theory, logic and their limitations*

(libro que circula en pdf por internet).

Un segundo camino para ampliar los conocimientos adquiridos en este curso es el que nos espera en el 2º cuatrimestre: la asignatura logfor2, que nos introducirá en la llamada *"lógica de predicados"* (o más exactamente, en la *"lógica de predicados de primer orden clásica"*).

De hecho, la lógica proposicional no es más que una fracción — la parte más básica — de la lógica de predicados. Y la lógica de predicados clásica (incluyendo a la lógica proposicional como una parte suya) constituye una teoría unitaria, que viene siendo la principal referencia en lógica formal desde hace más de un siglo.

Pero de esta teoría hablaremos más por extenso en logfor2, así que no adelantemos acontecimientos.

En este último tema del curso vamos a explorar otras dos vías destacadas, distintas a las anteriores, mediante las que podemos avanzar en nuestro estudio del razonamiento deductivo. Se trata de *las lógicas no clásicas* y *la inteligencia artificial*.

§ 24.2. LAS LÓGICAS NO CLÁSICAS: LÓGICAS EXTENDIDAS Y LÓGICAS ALTERNATIVAS

Las **lógicas no clásicas** son propuestas de reforma sobre la lógica clásica.

Algunas de estas lógicas pretenden *ampliar* la lógica clásica con nuevos símbolos lógicos, sustancialmente diferentes a los de la lógica clásica, y *extender* las interpretaciones semánticas y los cálculos deductivos, en atención a esos nuevos símbolos. Tales sistemas se conocen como **"extensiones de la lógica clásica"** (o **"lógicas extendidas"**).

Además, hay otros sistemas que proponen **modificar** (o **"reformar"**) aspectos esenciales de la lógica clásica. Ello obliga a reestructurar las interpretaciones semánticas y los cálculos deductivos, de tal forma que algunas fórmulas que son *leyes lógicas* de la lógica clásica, dejan de serlo en estos otros sistemas.

A los sistemas de lógica no clásica que proponen revisiones de este tipo, se les llama **"lógicas alternativas"** (o **"lógicas divergentes"**).

En breve, vamos a comentar brevemente un ejemplo destacado de cada uno de estos grupos: un ejemplo de lógica extendida (concretamente, la *lógica modal*), y un ejemplo de lógica alternativa (concretamente, la *lógica intuicionista*). Una introducción asequible a estos dos sistemas se encuentra en las páginas 151–194 de:

Manuel Garrido (ed.), *Lógica y lenguajes.*

Una introducción mucho más exhaustiva y rigurosa a todos los sistemas de lógica no clásica dignos de atención es:

Graham Priest, *An Introduction to Non-Classical Logic*

(ambos libros circulan también en pdf por internet).

§ 24.3. LAS LÓGICAS NO CLÁSICAS FRENTE AL PARADIGMA PRINCIPAL

Aunque muchas de las lógicas no clásicas son valorables, y se han estudiado en profundidad, ninguna de ellas ha conseguido — ni de lejos — desbancar a la lógica clásica como paradigma principal.

Las razones para ello son variadas: a veces, la motivación del nuevo sistema se considera insuficiente; a veces, sus consecuencias se consideran inaceptables; a veces, no hay consenso sobre cómo se debe axiomatizar; a veces, hay dificultades técnicas en cuanto a su desarrollo. Con frecuencia, se combinan varias de estas razones.

En definitiva, aunque la comunidad académica de la lógica (tanto en su vertiente matemática como en su vertiente filosófica) considera importante explorar los sistemas no clásicos, **ninguno de ellos se ha impuesto sobre la lógica clásica**: ninguno de ellos ha reemplazado a la lógica clásica, como en su día se impuso la lógica formal sobre la silogística aristotélica.

Por todo ello, la lógica clásica sigue siendo **el sistema estándar** o **paradigma dominante**, es decir: la principal teoría de referencia en el campo de la lógica formal.

§ 24.4. LA LÓGICA MODAL: PRESENTACIÓN

La **lógica modal** es una ampliación de la lógica clásica que incorpora dos nuevos símbolos lógicos:

1. El operador de **necesidad**, que aquí representaremos por: $\Box$
2. El operador de **posibilidad**, que aquí representaremos por: $\Diamond$

En este contexto, si A es una fórmula de lenprop, entonces:

$\Box A$ se lee *"es necesario que* A *"*.

Mientras que:

$\Diamond A$ se lee *"es posible que* A *"*.

§ 24.5. LA LÓGICA MODAL: DIFICULTADES

Una de las aparentes "leyes" de la lógica modal es la siguiente:

$$\Box A \models_{\text{MODAL}} A$$

Esto viene a decir que si una proposición es necesaria, entonces podemos concluir que es verdadera.

Otra aparente "ley" (equivalente, de hecho, a la anterior), es la siguiente:

$$A \models_{\text{MODAL}} \Diamond A$$

Esto viene a decir que si una proposición es verdadera, entonces podemos concluir que es posible.

Pues bien, estas dos leyes lógicas, aparentemente inocuas, no han sido aceptadas por todo el mundo (hay interpretaciones de lógica modal en las que no son válidas).

Otra "candidata" a ley lógica de la lógica modal es la siguiente:

$$\Box A \models_{\text{MODAL}} \Box\Box A$$

Esto viene a decir que si una proposición es necesaria, entonces es necesario que lo sea.

Esta última candidata ha sido todavía más contestada que las dos anteriores. Y así ha ocurrido en muchos otros casos, dando lugar a una verdadera multitud de sistemas modales distintos, compitiendo entre sí.

Por si esto fuera poco, las propias nociones de *necesidad* y *posibilidad* (así como la llamada **"semántica de mundos posibles"**, que se usa para interpretar estas nociones) han sido fuertemente criticadas, por carecer de una base conceptual clara.

Todo ello explica que la lógica modal, aun siendo el principal sistema de lógica no clásica, esté muy lejos de poder reemplazarla como paradigma dominante.

Ahora hablaremos de la lógica intuicionista, y para ello haremos un breve excursus previo.

§ 24.6. LA CONJETURA DE LOS PRIMOS GEMELOS

El número 10 es divisible por 2 y por 5, mientras que el número 11 solo es divisible por 1 y por sí mismo. Por eso, se dice que el 11 es un *"número primo"*.

Lo mismo le pasa al número 13, que está situado solo dos unidades por encima del 11.

A las parejas como 11 y 13 se les llama *"primos gemelos"*: números primos situados a dos unidades, uno del otro.

A fecha de hoy, nadie ha podido demostrar que existan infinitas parejas de primos gemelos. Pero tampoco se ha podido demostrar que no existan, es decir, que a partir de un determinado número natural, ya no aparezcan más parejas de números de este tipo.

Por consiguiente, la **"conjetura de los primos gemelos"** — que así se llama este problema matemático — continúa siendo a fecha de hoy un misterio.

Sin embargo, si aplicamos el principio de bivalencia, se sigue que esta conjetura tiene un valor predeterminado (verdadero o falso), aunque la comunidad matemática no lo conozca.

De igual manera, si aplicamos el principio de tercio excluso, entonces podemos afirmar que:

O existen infinitos primos gemelos,
o no existen infinitos primos gemelos.

aunque nunca lleguemos a saber cuál de los dos disyuntos es cierto.

§ 24.7. LA LÓGICA INTUICIONISTA

Pues bien, supongamos por un momento que las entidades matemáticas no tienen una **existencia platónica**, sino que son **construcciones** de la propia comunidad matemática.

En ese caso, sería razonable pensar que la conjetura de los primos gemelos no es $\mathbb{V}$ ni $\mathbb{F}$ por sí misma. Y por lo tanto, sería razonable pensar que esta conjetura solo se convertirá en $\mathbb{V}$ o $\mathbb{F}$, en el momento en que encontremos una *demostración* o una *refutación* constructiva de la misma.

Pues bien, la lógica intuicionista es lo que resulta de adoptar coherentemente ese punto de vista.

Ello obliga, sin embargo, a muchas renuncias. En efecto, la adopción del prisma de visión que acabamos de describir, y de la lógica subyacente al mismo, nos obliga a renunciar al **principio de bivalencia**, nos obliga a renunciar al **principio de tercio excluso**, y nos obliga a renunciar a la **semántica veritativo-funcional**. Y también nos obliga a renunciar a grandes porciones de la **matemática clásica** (la matemática *"estándar"*), que está basada en esos principios de razonamiento.

Por esta y otras razones, la lógica intuicionista se considera un sistema interesante y digno de atención, pero muy poca gente está dispuesta a adoptarla como paradigma principal.

§ 24.8. NOCIONES DE INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Finalmente, llega el momento de abordar la perspectiva de la **inteligencia artificial** (abreviadamente, **"ia"**) respecto al razonamiento deductivo humano. De hecho, la ia es hoy en día referencia obligada, a la hora de abordar cualquiera de nuestras habilidades cognitivas superiores.

Aquí haremos una reflexión muy breve al respecto. Una visión más completa se puede consultar en:

Carlos Madrid, *Filosofía de la inteligencia artificial*

(libro que también circula en pdf por internet).

Vamos a empezar con un ejemplo que no tiene nada que ver con el lenguaje, pero que nos ayudará a entender el mecanismo que está detrás de *Chat GPT*, *Gemini* y plataformas similares.

Las **redes neuronales** están inspiradas en el funcionamiento de las neuronas (de ahí les viene su nombre).

En efecto, las neuronas reciben y transmiten señales unas a otras, de diferente naturaleza e intensidad. Y de un modo aproximadamente análogo, los **nodos** de una red neuronal intercambian *valores numéricos*, de acuerdo con ciertas variables estadísticas llamadas **"pesos"**.

Pues bien, supongamos que queremos diseñar una **red neuronal** que examine imágenes (codificadas como cuadrículas de píxeles de diferentes colores), e identifique los *gatos* que pueda haber en ellas.

Dicha red estará organizada en **capas**. Por ejemplo, puede haber una primera capa que examine los píxeles de la imagen y detecte *bordes* (es decir, líneas de píxeles cuyo color destaca del resto). A continuación, puede haber una capa posterior que detecte *ángulos* (es decir, cambios bruscos en los bordes). Después, puede haber otra capa que detecte *formas reconocibles* (como por ejemplo, un ojo). Y por último, la capa final se aventurará a dictaminar si hay o no algún gato en la imagen.

A continuación, la red está preparada para que le digamos si su dictamen ha sido correcto o incorrecto. Y en función de ello, reajustará sus pesos mediante unos **algoritmos de aprendizaje**, destinados a mejorar progresivamente sus respuestas.

§ 24.9. PERSPECTIVA DEL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO HUMANO DESDE LA IA

De un modo similar (pero con inputs lingüísticos, y contando con más de 100 capas dierenciadas, cuyo número va cambiando durante el entrenamiento), es como procesa la ia el lenguaje natural. Así es como logra responder a nuestras preguntas, chatear, escribir ensayos y poemas, etc.

Y como parte de esas habilidades, la ia puede reconocer y producir razonamiento deductivo (y de forma correcta, la mayor parte de las veces).

Sin embargo, no parece que eso pueda reemplazar el análisis del razonamiento que llevamos a cabo en lógica formal (es decir, mediante formalización, lenguajes formales y cálculos lógicos, como hemos hecho en este curso). Y ello es así por las razones siguientes.

En primer lugar, aunque el diseño matemático de las redes neuronales está inspirado en el cerebro humano, lo cierto es que para que este mecanismo funcione bien, necesita ser entrenado con cantidades masivas de datos (millones de veces más que lo que una persona puede procesar en toda su vida).

Además, la ia consume muchísima más energía que el cerebro humano (cientos de miles de vatios, frente a los 20 vatios con que funciona el cerebro).

Por ello, aunque la ia modela muy bien el razonamiento humano al nivel input-output que describimos en **§ 18.2** , es altamente improbable que su modo de procesamiento tenga realidad psicológica.

Pero el problema mayor, es que a pesar de que la ia proporciona un algoritmo tecnológico eficaz, no está basado en una **comprensión previa** de cómo funciona el lenguaje, ni el razonamiento deductivo. Y **tampoco sirve para proporcionar dicha comprensión**.

Así por ejemplo, la lingüística divide su explicación del lenguaje natural en varios frentes: la morfología (que analiza la composición de las palabras), la sintaxis (que analiza la composición de las frases), la semántica (que analiza el significado) y la pragmática (que analiza la intervención del contexto).

Sin embargo, la estructura de capas de los programas de ia (que equivaldría, salvando las distancias, a esos niveles de análisis en la lingüística tradicional) varía de unos programas a otros, es cambiante conforme estos programas avanzan en su entrenamiento, y ni siquiera es transparente a quienes han diseñado el programa.

En definitiva, la ia es una **tecnología** muy potente para **emular** el razonamiento humano, **pero no nos dice cómo funciona**.

De un modo similar, la humanidad ha utilizado embarcaciones de madera (como tecnología eficaz para viajar por agua de un sitio a otro), miles de años antes de conocer el principio de Arquímedes, que es la explicación científica de por qué flotan tales embarcaciones.

Por todo ello, cabe concluir que el análisis del razonamiento deductivo sigue necesitando hoy en día de la lógica formal, a pesar de las muchas limitaciones de esta herramienta.

§ 24.10. CUESTIONES

Contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.

1. Indica brevemente los cuatro caminos apuntados en **§ 24.1** para profundizar en los contenidos estudiados en este curso.
2. Explica en pocas palabras qué diferencia hay entre las lógicas extendidas y las lógicas alternativas.
3. Explica, a tu mejor entender, en qué consiste que una teoría científica sea el *"paradigma dominante"*.

4. Indica brevemente las cuatro capas de la red neuronal que se describe en § **24.8** .

5. Indica brevemente las tres razones que se dan en § **24.8** para descartar que la ia reemplace a la lógica formal.

6. Si te sobra tiempo, responde a alguna/s de las siguientes cuestiones, a tu elección:

   a) Intenta definir la *posibilidad* en términos de *necesidad*. Para ello, completa las siguientes expresiones, a tu mejor entender:

$$\neg \Diamond A \quad \equiv_{\text{MODAL}} \quad \Box \_\_ A$$

$$\Diamond A \quad \equiv_{\text{MODAL}} \quad \_\_ \Box \_\_ A$$

   b) Expresa brevemente una opinión razonada sobre si las entidades matemáticas existen de forma independiente de la humanidad.

   c) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier otro aspecto de este tema que haya llamado tu atención.

   d) Escribe tu opinión razonada sobre cualquier aspecto de la filosofía que consideres importante resaltar, o sobre cualquier otra cosa que quieras expresar.