Manual del curso

LÓGICA FORMAL 2

Lógica de primer orden

GUSTAVO PICAZO

DISPONIBLE EN:
webs.um.es/picazo

Univ. de Murcia – Curso 25.26
1ª ed., Versión 1 (19.01.2026)

Índice de temas

Agradecimiento: Agradezco a José Ángel Gascón Salvador su lectura atenta de este manual y sus sugerencias de mejora.

Tema 1

Organización de la asignatura – Argumentos deductivos no proposicionales

§ 1.1. LOGFOR1 Y LOGFOR2

La asignatura **Lógica formal 2** (abreviadamente, **“logfor2”**) es continuación de la asignatura **Lógica formal 1** (abreviadamente, **“logfor1”**), cuyos conocimientos presupone.

Asimismo, este manual es continuación del manual de logfor1. Y para leer con aprovechamiento este manual, **es necesario haber estudiado previamente el manual de logfor1, y es necesario tenerlo a mano, para volver a consultarlo cuantas veces se necesite**.

Ambos manuales están disponibles para su libre descarga en la web:

`webs.um.es/picazo`

§ 1.2. CUESTIONES

Explica con tus propias palabras la relación que existe entre las asignaturas logfor1 y logfor2, y sus respectivos manuales.

A lo largo del tema, en la realización de todas las cuestiones planteadas:

- Intenta prestar atención a los pequeños detalles.
- Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el manual.
- **Si estás trabajando en el aula, contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.** (Lo que no te dé tiempo a entregar en el aula, puedes trabajarlo en tus horas de estudio individual.)

§ 1.3. ORGANIZACIÓN DOCENTE

La organización docente de esta asignatura es también básicamente similar a la de logfor2, y se debe consultar en el Tema 1 de su correspondiente manual. Ahora bien, hay que tener en cuenta los siguientes cambios:

1. Las fechas del Cronograma son distintas.
2. La calificación de esta asignatura se calcula sobre 100 puntos. Por consiguiente, para aprobar hace falta obtener 50 puntos, y la máxima nota posible es 100.
3. En esta asignatura, la realización de tutorías no se valora en la puntuación, aunque siguen siendo recomendables para apoyar el estudio de la materia.

4. En esta asignatura habrá **30** temas, valorados sobre 1 punto cada uno, y **10** controles, valorados sobre 3 puntos cada uno. Por consiguiente, mediante el **"bloque de curso"** (temas y controles) se puede llegar a obtener una calificación de 60 puntos.
5. El examen final se valora sobre 40 puntos, pero contiene una primera parte opcional (valorada en 60 puntos), para mejorar la puntuación obtenida por temas y controles.
6. De inicio, se proporcionan los temas 1–21. El manual completo se subirá al aula virtual a lo largo del cuatrimestre.
7. A la hora de realizar los temas de esta asignatura en el aula, **debes traer contigo el manual logfor1**, además del tema correspondiente (ya sea en papel o en un dispositivo).
8. En la realización de los temas en el aula, el tiempo mínimo de permanencia es de 15 minutos, antes de poder entregar las cuestiones. Si terminas antes, puedes usar el tiempo restante para repasar y memorizar el tema de cara al control correspondiente.
9. Si todo el mundo entrega un tema antes de la hora, se usará el tiempo restante para hacer una "mini-junta", a demanda del alumnado que permanezca en el aula.
10. En los controles, no hay tiempo mínimo de permanencia en el aula.
11. El último día de clase se ha programado un "Examen final anticipado opcional", el cual no corre convocatoria (pero tendrá validez en el acta para quien lo realice, a falta de la convocatoria oficial).
12. Se ha habilitado un "Foro de detección de erratas y sugerencias de mejora". El valor de las contribuciones al mismo, así como las sugerencias en las cuestiones finales de los temas, se usarán como

criterio para otorgar las Matrículas de Honor, en caso de empate en la nota numérica.

§ 1.4. CUESTIONES

1. Indica sobre cuántos puntos se califica la asignatura.
2. Indica cuántos puntos son necesarios para aprobar.
3. En esta asignatura, ¿puntúa la asistencia a tutorías para la evaluación?
4. Indica cuántos temas habrá.
5. Indica sobre cuántos puntos se evalúa cada tema.
6. Indica cuántos controles habrá.
7. Indica sobre cuántos puntos se evalúa cada control.
8. Indica sobre cuántos puntos se valora el examen final.
9. Indica qué temas se proporcionan en el inicio del cuatrimestre.
10. Indica qué ocurrirá con el resto de temas.
11. Indica qué material debes traer contigo al aula para realizar los temas de esta asignatura.
12. Indica el tiempo mínimo de permanencia en el aula en los temas.
13. ¿Hay tiempo mínimo de permanencia en el aula en los controles?

§ 1.5. ADVERTENCIAS PRELIMINARES

Todas las *Advertencias preliminares* que aparecen al inicio de los temas 2 –5 del manual de logfor1, se aplican igualmente al presente manual.

§ 1.6. OBJETOS

En lo sucesivo, y a lo largo de todo el manual, entenderemos que un **"objeto"** es cualquier persona, animal o cosa, concreta o abstracta.

Así por ejemplo, según este uso, el Edificio Luis Vives, la violoncelista Natalia Gutman y el número π, son objetos.

En particular, el Edificio Luis Vives y Natalia Gutman son cosas concretas (es decir, materiales, espacio-temporales), mientras que el número π es una cosa abstracta (es decir, una construcción de la comunidad cognitiva humana).

§ 1.7. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de objeto.
2. Especifica si se trata de una persona, animal o cosa.
3. Especifica si es concreta o abstracta.

§ 1.8. ARGUMENTOS DEDUCTIVOS DE CARÁCTER NO PROPOSICIONAL

En los temas 2 y 3 de logfor1, trazamos un panorama sobre el estudio de la argumentación humana, con especial hincapié en la argumentación deductiva y la lógica formal.

Además, a lo largo de dicha asignatura, presentamos:

- Un lenguaje formal: el lenguaje de la lógica proposicional clásica, *lenprop*.
- Una forma de interpretar ese lenguaje: la *semántica vf*.
- Tres sistemas deductivos (*dednatprop*, *tv* y *arprop*), para verificar la validez de argumentos formales en dicho lenguaje.

Pues bien, ahora ha llegado el momento de señalar que *esas herramientas, aun siendo eficaces, se quedan cortas.*

Ello es así porque **existen muchos argumentos deductivos que no se pueden formalizar en lenprop**. Por consiguiente, esos argumentos **no se pueden interpretar mediante la semántica vf, ni se puede comprobar su validez mediante dendatprop, tv o arprop**.

A tales argumentos – que, aun siendo deductivos, no se dejan tratar mediante la lógica proposicional — se les denomina **"argumentos deductivos de carácter no proposicional"** (o más abreviadamente, **"argumentos deductivos no proposicionales"**). A continuación vamos a ver algunos ejemplos.

§ 1.9. CUESTIONES

Basándote en lo que acabas de leer, indica brevemente en qué consiste un argumento deductivo no proposicional.

§ 1.10. UN EJEMPLO DE ARGUMENTO DEDUCTIVO NO PROPOSICIONAL

Un ejemplo clásico de argumento deductivo que no se puede formalizar adecuadamente en el lenguaje de la lógica proposicional es el siguiente:

Todos los seres humanos son mortales.
Sócrates es un ser humano. (1)
Por tanto, Sócrates es mortal.

Es fácil ver que (1) es un argumento deductivo, porque resulta del todo imposible que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa. En efecto, si todos los seres humanos son mortales, y Sócrates es uno de ellos, entonces Sócrates tiene que ser también mortal, sin más remedio.

Sin embargo, si probamos a formalizar (1) en lenprop, mediante la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, obtendremos algo así como lo siguiente:

p : *Todos los seres humanos son mortales.*

r : *Sócrates es un ser humano.*

s : *Sócrates es mortal.*

Y resulta obvio que s **no es una consecuencia lógica** de p y r. En efecto:

$$p\,,\; r \;\not\models_{\text{PROP}}\; s$$

Por consiguiente, tampoco se podrá validar este argumento formal mediante ninguno de los cálculos deductivos que estudiamos en logfor1. En efecto, ninguno de estos cálculos contiene la derivación formal correspondiente a dicho argumento:

$$\boxed{p}\ ,\ \boxed{r}\quad \nvdash_{\text{DNP}}\quad \boxed{s}$$

$$\boxed{p}\ ,\ \boxed{r}\quad \nvdash_{\text{TV}}\quad \boxed{s}$$

$$\boxed{p}\ ,\ \boxed{r}\quad \nvdash_{\text{AP}}\quad \boxed{s}$$

En resumen, (1) **está totalmente fuera** del alcance de la teoría lógica que estudiamos en logfor1: aun siendo un argumento deductivo, no permite ser analizado por la lógica proposicional (se trata de un *argumento deductivo no proposicional*).

§ 1.11. PROPOSICIONES UNIVERSALES

Un aspecto llamativo de la primera premisa del argumento (1) es que predica una propiedad de *todos* los objetos de una cierta clase (en concreto, los seres humanos).

A este tipo de afirmaciones les llamamos **proposiciones universales** (o **"generalizaciones universales"**). Si lo que afirma la generalización es verdad, entonces todos los objetos de esa clase cumplirán con la condición que se les atribuye — como ocurre con los seres humanos, que todos ellos son (somos) mortales.

Pues bien, este tipo de expresiones tendrán un gran protagonismo en el presente curso, como iremos viendo en los temas sucesivos.

§ 1.12. CUESTIONES

1. Inspirándote en el argumento (1), pon un ejemplo de argumento deductivo no proposicional en el que aparezca una proposición universal.

2. Formaliza dicho argumento mediante simprops, de modo análogo a como se hace en **§ 1.10** .

3. Indica si el argumento formal que acabas de dar es válido o inválido.

4. Indica si crees que dicho argumento formal es derivable en DNP, TV o AP.

§ 1.13. OTRO EJEMPLO DE ARGUMENTO DEDUCTIVO NO PROPOSICIONAL

Un segundo ejemplo de argumento deductivo no proposicional es el siguiente:

Mulhacén y Veleta son picos de Granada de más de 3.000 m.
Por tanto, en Granada hay picos de más de 3.000 m. (2)

En este caso, al igual que antes, es claro que estamos ante un argumento deductivo. En efecto, si la premisa es verdadera, entonces la conclusión también tiene que ser necesariamente verdadera: sería absurdo sostener al mismo tiempo que Mulhacén y Veleta son picos de Granada de más de 3.000 m, y que en Granada no hay picos de más de 3.000 m.

Sin embargo, aquí también sucede que, si intentamos formalizar (2) en lenprop, obtenemos algo que no es un argumento formalmente válido. En efecto, la tabla de convenciones simbólicas, en este caso, vendría a ser algo así como:

p : *Mulhacén y Veleta son picos de Granada de más de 3.000 me.*

r : *En Granada hay picos de más de 3.000 m.*

Pero aquí también observamos que r no es consecuencia lógica de p:

$$p \quad \not\models_{\text{PROP}} \quad r$$

Por consiguiente, r no es derivable de p en ninguno de los cálculos deductivos que estudiamos en logfor1:

$$p \not\vdash_{\text{DNP}} r \qquad\qquad p \not\vdash_{\text{TV}} r \qquad\qquad p \not\vdash_{\text{AP}} r$$

Y en definitiva, podemos concluir que estamos ante otro argumento deductivo no proposicional.

§ 1.14. PROPOSICIONES EXISTENCIALES

Un aspecto llamativo de la conclusión del argumento (2) es que afirma que *hay* objetos de una cierta clase (en concreto, picos de más de 3.000 metros en Granada).

Pues bien, cuando afirmamos que *"hay"* objetos de una cierta clase, entonces estamos haciendo una **proposición existencial**.

También estamos haciendo una proposición existencial cuando decimos que *"existen"* objetos de una cierta clase. Por ejemplo, cuando decimos que:

"En Granada *existen* picos de más de 3.000 m"

Y también estamos haciendo una proposición existencial cuando decimos que *"algunos"* objetos son de cierta clase. Por ejempo, cuando decimos que:

"*Algunos* picos de Granada tienen más de 3.000 m

En cualquiera de estos casos estamos diciendo lo mismo, y estamos haciendo una proposición existencial.

Naturalmente, si lo que se afirma mediante una proposición existencial es cierto, entonces es que existe uno o más objetos que cumplen con la condición en cuestión (como ocurre con los picos granadinos de más de 3.000 m).

Pues bien, este tipo de expresiones tendrán también un gran protagonismo en el presente curso, como iremos viendo en los temas sucesivos.

§ 1.15. CUESTIONES

1. Inspirándote en el argumento (2) de **§ 1.13**, pon un ejemplo de argumento deductivo no proposicional en el que aparezca una proposición existencial.
2. Formaliza este otro argumento, e indica si es válido y si crees que es derivable en DNP, TV o AP.
3. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
   b) Qué es lo que más te ha costado entender.
   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 2

Panorama de contenidos – El alfabeto de lenpred – Constantes

§ 2.1. LA LÓGICA DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN CLÁSICA

El objetivo de la presente asignatura es presentar una teoría lógica que es mucho más sofisticada que la lógica proposicional clásica, pero constituye una **extensión** suya.

Por consiguiente, nuestra teoría va a ser una ampliación o continuación de la que vimos en logfor1: utiliza prácticamente todo lo que vimos allí, pero incorpora cosas nuevas, y extiende el tratamiento de lo que ya teníamos, para dar acomodo a estas nuevas incorporaciones de la manera más provechosa posible.

A dicha teoría la llamaremos **"lógica de predicados de primer orden clásica"** (abreviadamente, **"logpred"**). Y nos servirá para analizar argumentos como los de § **1.10** , § **1.13** , y otros muchos que están en su misma situación.

§ 2.2. CUESTIONES

Explica brevemente, con tus propias palabras, la relación que existe entre logpred y logprop.

A lo largo del tema, en la realización de todas las cuestiones planteadas:

- Intenta prestar atención a los pequeños detalles.
- Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el manual.
- **Si estás trabajando en el aula, contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.** (Lo que no te dé tiempo a entregar en el aula, puedes trabajarlo en tus horas de estudio individual.)

§ 2.3. PANORAMA DE LA ASIGNATURA

Empezaremos la asignatura presentando la sintaxis del lenguaje formal, que es el **lenguaje de la lógica de primer orden clásica** (abreviadamente, **"lenpred"**). Al hacerlo, intercalaremos explicaciones sobre el modo en que los símbolos y fórmulas del lenguaje formal se correlacionan con determinadas proposiciones del lenguaje natural, cuya estructura lógica representan.

A continuación, presentaremos la semántica formal para lenpred, la cual incorpora elementos de la semántica veritativo-funcional, pero exige un nivel de complejidad sustancialmente mayor.

Tras hacer todo eso, abordaremos dos de los cálculos deductivos que ya conocemos: el cálculo de deducción natural y el método de árboles.

Ampliaremos estos dos cálculos, para que puedan lidiar con el nuevo lenguaje y las nuevas inferencias. Y estudiaremos también sus propiedades metateóricas, como hicimos en logfor1 con las versiones proposicionales de los mismos.

En cuanto al método de tablas de verdad, aquí no tendrá ningún protagonismo, sencillamente porque no hay forma de adaptarlo al nuevo lenguaje y a las nuevas inferencias.

Por último, abordaremos cuestiones en la frontera de este manual, como hicimos en su momento al final de logfor1. Así, hablaremos de cuestiones que pertenecen al ámbito de la lógica de primer orden clásica, pero que deben estudiarse en textos más avanzados. En particular, los *símbolos funcionales* y los llamados *"resultados limitativos"*.

Y también abordaremos brevemente una teoría lógica que se sale del ámbito de la lógica de primer orden clásica, pero que está directamente relacionadas con ella: la llamada *"lógica de orden superior"*.

§ 2.4. CUESTIONES

1. Indica cuál de los puntos indicados en el panorama te interesa más conocer, y explica sucintamente por qué.
2. Indica qué metodo deductivo de los estudiados en logfor1 no tendrá aquí ningún protagonismo, y por qué.

§ 2.5. EL LENGUAJE DE LA LÓGICA DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN CLÁSICA CON IDENTIDAD

A continuación, vamos a presentar el lenguaje formal con el que trabajaremos en el presente curso, que es el **lenguaje de la lógica de predicados de primer orden clásica con identidad** (abreviadamente, **"lenpred"**).

De forma análoga a como explicamos en logfor1, este lenguaje formal será nuestro **lenguaje objeto** durante el presente curso. Y el castellano, enriquecido con diversos conceptos y símbolos técnicos, será nuestro **metalenguaje**.

En otras palabras: nuestro objeto de estudio será el lenguaje formal lenpred. Y utilizaremos un castellano "técnico" (es decir, una jerga del castellano, enriquecida con conceptos y símbolos técnicos) para llevar a cabo dicho estudio.

Tampoco aquí vamos a ver a los símbolos de lenpred, sino que nos limitaremos a nombrarlos mediante símbolos metalingüísticos. Todas las consideraciones que hicimos en logfor1 respecto a la invisibilidad de los símbolos de lenprop, se aplican exactamente igual a los símbolos de lenpred.

§ 2.6. CUESTIONES

1. ¿Cual será nuestro lenguaje objeto en el presente curso?
2. ¿Y nuestro metalenguaje?
3. ¿Cómo son los símbolos de lenped?

§ 2.7. EL ALFABETO DE LENPRED

El alfabeto de lenpred tiene seis tipos de símbolos, que iremos introduciendo paulatinamente:

1. *Constantes*
2. *Variables*
3. *Símbolos predicativos*
4. *Conectivas*
5. *Cuantificadores*
6. *Paréntesis*

Llamaremos **"operadores lógicos"** a las conectivas y a los cuantificadores.

Y llamaremos **"símbolos lógicos"** a los operadores lógicos y a un símbolo predicativo especial, llamado **"símbolo de igualdad"**. Al resto de símbolos del alfabeto les llamaremos **"símbolos no lógicos"** o **"símbolos extralógicos"**.

Por consiguiente, los símbolos extralógicos de lenpred serán: las constantes, las variables, los símbolos predicativos (salvo el símbolo de igualdad) y los paréntesis.

§ 2.8. CUESTIONES

1. Indica cuáles son los operadores lógicos de lenpred.
2. Indica cuáles son los símbolos lógicos.
3. Indica cuáles son los símbolos no lógicos.

§ 2.9. CONSTANTES

Las **constantes** de lenpred (abreviadamente, **"ctes"**) son:

$a \quad b \quad c$

$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \ldots$ (y así hasta el infinito)

En c_1, decimos que el 1 es un **"subíndice"**, y lo leemos así: *"ce sub uno"* (o más abreviadamente, *"ce uno"*).

§ 2.10. CUESTIONES

Especifica las ctes de lenpred, tal y como aparecen recuadradas en la sección anterior. Debes memorizarlas para el control correspondiente a este tema.

§ 2.11. LAS CONSTANTES DE LENPRED Y SU CORRELATO EN EL LENGUAJE NATURAL

Las constantes de lenpred vienen a corresponder, salvando las distancias, a los nombres propios del lenguaje natural.

Los nombres propios son aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que denotamos objetos de forma directa, sin describirlos. Un ejemplo de nombre propio es "Sócrates". Otro ejemplo es "Mulhacén". Otro ejemplo es "π".

Estas expresiones no deben confundirse con las llamadas *"descripciones definidas"*, que refieren a un objeto mediante una descripción que lo identifica unívocamente. Así por ejemplo, podemos referirnos al Mulhacén como *"el pico más alto de Granada"*, pero esto último no es un nombre propio, sino una descripción definida de dicho objeto.

Del mismo modo, podemos referirnos al número π como *"la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro"*; pero esto último no es un nombre propio, sino una descripción definida (es decir, específica, unívoca) de dicho número.

Pues bien, las constantes de nuestro lenguaje formal harán las veces, salvando las distancias, de los nombres propios del lenguaje natural, como los que acabamos de ver.

§ 2.12. CUESTIONES

1. Da un ejemplo de nombre propio.
2. Da una descripción que identifique unívocamente el objeto que acabas de nombrar.

3. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.

   b) Qué es lo que más te ha costado entender.

   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.

   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 3

Variables – Símbolos predicativos

§ 3.1. VARIABLES

Nos ocupamos ahora de las **variables** de lenpred (abreviadamente, **“vbles”**), que son:

$\boxed{x}$ $\boxed{y}$ $\boxed{z}$

$\boxed{x_1}$ $\boxed{x_2}$ $\boxed{x_3}$ $\ldots$ (y así hasta el infinito)

§ 3.2. CUESTIONES

Especifica las vbles de lenpred, tal y como aparecen recuadradas en la sección anterior. Debes memorizarlas para el control correspondiente a este tema.

A lo largo del tema, en la realización de todas las cuestiones planteadas:

- Intenta prestar atención a los pequeños detalles.
- Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el manual.
- **Si estás trabajando en el aula, contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.** (Lo que no te dé tiempo a entregar en el aula, puedes trabajarlo en tus horas de estudio individual.)

§ 3.3. LAS VARIABLES DE LENPRED Y SU CORRELATO EN EL LENGUAJE NATURAL

Las variables de lenpred vienen a corresponder, salvando las distancias, a aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que nos referimos a un objeto de forma indeterminada, sin identificarlo específicamente.

Por ejemplo, supongamos que yo digo:

Siempre que voy al cine, hay una persona ruidosa que me fastidia

En ese caso, la "persona ruidosa" no es nadie en particular, e incluso puede ser una persona distinta cada vez.

Ahora supongamos que digo:

Tengo una enfermedad equis, que aún no han sabido diagnosticar

En ese caso, no se sabe es cuál será esa "enfermedad equis", por lo que no se le puede poner nombre.

Pues bien, las variables de nuestro lenguaje formal harán las veces, salvando las distancias, de este tipo de expresiones del lenguaje natural.

§ 3.4. CUESTIONES

Pon un ejemplo de proposición en castellano, en la que se mencione un objeto de forma indeterminada, al estilo de los casos que se acaban de proponer.

§ 3.5. SÍMBOLOS PREDICATIVOS

A continuación, el alfabeto de lenpred tiene un gran arsenal de lo que llamaremos **"símbolos predicativos"** (abreviadamente, **"simpreds"**).

Los simpred vienen ordenados por categorías, parecidas a las plantas de un edificio. Sin embargo, en este caso se trata de un "edificio" con infinitas plantas, y en cada planta hay infinitos simpred distintos.

1. **Símbolos predicativos 1-arios** (o **monarios**, abreviadamente, **"simpred mon"**):

$F \quad G \quad H$

$F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad \ldots$ (y así hasta el infinito)

2. **Símbolos predicativos 2-arios** (o **binarios**, abreviadamente, **"simpred bin"**):

$=$

K L

K_1 K_2 K_3 $\dots$ (y así hasta el infinito)

3. **Símbolos predicativos 3-arios** (o **ternarios**, abreviadamente, **"simpred ter"**):

M N

M_1 M_2 M_3 $\dots$ (y así hasta el infinito)

4. **Símbolos predicativos 4-arios** (o **cuaternarios**, abreviadamente, **"simpred 4-ar"**):

O^4 O^4_1 O^4_2 $\dots$ (y así hasta el infinito)

5. **Símbolos predicativos 5-arios** (o **quinarios**, abreviadamente, **"simpred 5-ar"**):

O^5 O^5_1 O^5_2 ... (y así hasta el infinito)

Y así sucesivamente, con **símbolos predicativos 6-arios** (es decir, O^6, O^6_1, O^6_2, ...), **7-arios** (O^7, O^7_1, O^7_2, ...), y así hasta el infinito.

En un simpred como O^4_1, decimos que el 4 es un **"superíndice"**, y lo leemos así: *"o súper cuatro sub uno"* (o más abreviadamente, *"o cuatro uno"*).

A cada categoría esta tabla, la llamaremos **"valencia"**, o **"número de lugares"**. Así, de los simpred monarios diremos que tienen "valencia 1" (o que son "símbolos predicativos de un lugar"); de los simpred binarios diremos que tienen "valencia 2" (o que son "símbolos predicativos de dos lugares"). Y análogamente con las categorías restantes.

El símbolo predicativo binario $=$ lo leemos *"igual"*, y le llamamos **"símbolo de igualdad"** (o **"símbolo de identidad"**). Como ya dijimos, este el único simpred que constituye un símbolo lógico, por lo que recibirá una atención especial.

§ 3.6. CUESTIONES

1. Especifica los simpred monarios y binarios recuadrados en la sección anterior. Debes memorizarlos para el control correspondiente a este tema (solo los monarios y binarios, no los demás).
2. Indica un simpred de valencia 3 (el que tú quieras, dentro de esa categoría).
3. Indica un simpred de 7 lugares (el que tú quieras, dentro de esa categoría).

§ 3.7. LOS SIMPRED MON Y SU CORRELATO EN EL LENGUAJE NATURAL

Los símbolos predicativos monarios vienen a corresponder, salvando las distancias, a las expresiones predicativas del lenguaje natural, mediante las cuales atribuimos una propiedad a un objeto.

Eso sucede, por ejemplo, cuando decimos

“Natalia Gutman es violoncelista”

O cuando decimos:

“Ese coche es *rojo*”

O cuando decimos:

“27 es un *número primo*”

En cualquiera de estos casos, estamos **atribuyendo** una propiedad a un objeto. O dicho de otro modo, estamos **“predicando”** una propiedad de un objeto.

En efecto, en el primero de los enunciados anteriores se predica de Natalia Gutman que es violoncelista. En el siguiente enunciado, se predica de “ese coche” que es rojo. Y en el tercer enunciado, se predica del número 27 que es un número primo.

Pues bien, los simpred monarios son los correlatos, en nuestro lenguaje formal, de este tipo de expresiones.

§ 3.8. CUESTIONES

Pon un ejemplo de proposición en castellano, en la que se atribuya una propiedad a un objeto.

§ 3.9. LOS SIMPRED BIN Y SU CORRELATO EN EL LENGUAJE NATURAL

Por su parte, los símbolos predicativos binarios vienen a corresponder, salvando las distancias, a las expresiones del lenguaje natural mediante las que enunciamos una relación entre dos objetos.

Por ejemplo, cuando decimos que:

“Natalia Gutman fue estudiante de Rostropóvich”

estamos *atribuyendo* la relación *ser estudiante de* a Natalia Gutman y Mstislav Rostropóvich, en ese orden. O dicho de otro modo: estamos *“predicando”* esta relación de Gutman y Rostropóvich, en ese orden.

El orden es importante, obviamente, porque no es lo mismo afirmar que Gutman fue estudiante de Rostropóvich, que afirmar que Rostropóvich fue estudiante de Gutman.

Del mismo modo, cuando decimos que:

"El número π es mayor que 3"

estamos atribuyendo la relación *ser mayor que* a los números π y 3, tomados en ese orden. Es decir, estamos predicando dicha relación de esos dos números, tomados en ese orden.

Y aquí, el orden es también importante: π es mayor que 3, pero no al contrario.

El símbolo de igualdad ($=$) también corresponde, salvando las distancias, a la expresión de una relación entre objetos. Pero este caso lo comentaremos de forma separada, en **§ 4.1** .

§ 3.10. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición en castellano, en la que se atribuya una relación a dos objetos.
2. Completa la siguiente frase: "En el ejemplo que acabo de poner, la relación ... se atribuye a los objetos ... y ..., en ese orden".

§ 3.11. LOS SIMPRED TER Y SU CORRELATO EN EL LENGUAJE NATURAL

A su vez, los símbolos predicativos ternarios vienen a corresponder, salvando las distancias, a las expresiones del lenguaje natural mediante las que enunciamos una relación entre tres objetos.

Por ejemplo, cuando decimos que:

"Madrid está entre Murcia y La Coruña"

estamos involucrando tres ciudades, para decir que una se encuentra a medio camino entre las otras dos. Dicho de otro modo, estamos predicando la relación *estar entre* de las ciudades Murcia, Madrid y La Coruña, tomadas en ese orden.

El orden también es importante aquí, porque Murcia no está entre Madrid y La Coruña, ni La Coruña está entre Murcia y Madrid.

Del mismo modo, cuando decimos:

"Javier ha cogido <u>El Quijote</u> de la Biblioteca de Bullas

estamos involucrando tres objetos (Javier, *El Quijote* y la Biblioteca de Bullas), para predicar que están en una determinada relación. En este caso, la relación consiste en que el primer objeto (Javier) ha cogido el segundo (*El Quijote*) del tercero (la Biblioteca de Bullas).

Una vez más, el orden importa: no es cierto que "la Biblioteca de Bullas ha cogido a Javier de *El Quijote*", por ejemplo.

§ 3.12. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición en castellano, en la que se atribuya una relación a tres objetos.
2. Completa la siguiente frase: "En el ejemplo que acabo de poner, la relación ..., se atribuye a los objetos ..., ... y ..., en ese orden".

§ 3.13. CORRELATO EN EL LENGUAJE NATURAL DE LOS SIMPRED 4-ARIOS, 5-ARIOS, ETC

También hay veces en que enunciamos una relación entre cuatro o más objetos. Por ejemplo, cuando decimos:

> *"Javier ha cogido El Quijote de la Biblioteca de Bullas el 7 de enero, y tendrá que devolverlo el 5 de febrero".*

estamos involucrando cinco objetos: Javier, el libro, la biblioteca, la fecha de préstamo y la fecha de devolución.

En matemáticas, y en la ciencia en general, este tipo de atribuciones son habituales. Y por eso necesitamos que nuestro lenguaje formal esté preparado para dar correlato a cualquiera de ellas, por compleja que sea.

§ 3.14. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición en castellano, en la que se atribuya una relación a cuatro objetos.
2. Completa la siguiente frase, en relación a dicho ejemplo: "En el ejemplo que acabo de poner, la relación ... se atribuye a los objetos ..., ..., ... y ..., en ese orden".
3. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
   b) Qué es lo que más te ha costado entender.
   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 4

Igualdad – Conectivas – Cuantificadores – Paréntesis

§ 4.1. CORRELATO DEL SÍMBOLO DE IGUALDAD EN EL LENGUAJE NATURAL

En **§ 3.9** dijimos que los simpred bin corresponden, salvando las distancias, a aquellas expresiones del lenguaje natural en las que se atribuye una relación a dos objetos.

Pues bien, el símbolo de igualdad corresponde a un caso especialmente importante de relación entre dos objetos: la de **ser el mismo objeto que** (o **ser idéntico a**).

En efecto, hay expresiones en el lenguaje natural mediante las que identificamos un objeto con otro, afirmando que son idénticos (esto es, que se trata de uno y el mismo objeto).

Así por ejemplo, cuando decimos:

"La capital de Turquía es Ankara"

estamos afirmando que la ciudad de Ankara y la capital de Turquía son la misma ciudad.

De modo similar, cuando decimos:

"Bizancio es Constantinopla"

estamos afirmando que la ciudad de Bizancio y la ciudad de Constantinopla son la misma ciudad (otra ciudad de Turquía, actualmente llamada "Estambul").

Análogamente, cuando decimos:

"Lucila Godoy es Gabriela Mistral"

estamos afirmando que la mujer nacida en Chile con el nombre de Luila Godoy, y la escritora Gabriela Mistral, son la misma persona. (En efecto, la escritora se puso ese apodo como alias literario.)

Pues bien, salvando las distancias, el símbolo de igualdad hará las veces, en nuestro lenguaje formal, de ese tipo de expresiones del lenguaje natural.

§ 4.2. CUESTIONES

Inspirándote en la sección precedente, pon un ejemplo de enunciado del lenguaje natural que exprese la identidad entre dos objetos.

A lo largo del tema, en la realización de todas las cuestiones planteadas:

- Intenta prestar atención a los pequeños detalles.
- Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el manual.

- **Si estás trabajando en el aula, contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.** (Lo que no te dé tiempo a entregar en el aula, puedes trabajarlo en tus horas de estudio individual.)

§ 4.3. LAS CONECTIVAS

También son símbolos lógicos de lenpred las cinco conectivas que ya conocemos de logfor1:

1. **El símbolo de negación**: $\neg$ (leído *"no"*).
2. **El símbolo de conjunción**: $\wedge$ (leído *"y"*).
3. **El símbolo de disyunción**: $\vee$ (leído *"o"*).
4. **El símbolo condicional**: $\rightarrow$ (leído *"si ... entonces"*).
5. **El símbolo bicondicional**: $\leftrightarrow$ (leído *"si y solo si"*).

§ 4.4. CORRELATO DE LAS CONECTIVAS EN EL LENGUAJE NATURAL

En la lógica de predicados, estas conectivas funcionan de un modo enteramente análogo a como lo hacen en la lógica proposicional. Por consiguiente, todo lo que dijimos sobre ellas en los temas 9 y 10 del manual de logfor1, se aplica también aquí. Y por ello, se recomienda repasar esos temas ahora, con la mayor atención.

En particular, en nuestro lenguaje formal — y salvando las distancias, como siempre decimos — el símbolo de negación ($\neg$) hace las veces de aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que negamos o desmentimos algo.

Por ejemplo, al decir:

"No está lloviendo"

estamos negando (rechazando, desmintiendo) que llueva. Y al decir

"Madrid no tiene costa"

estamos negando (rechazando, desmintiendo) que Madrid sea una ciudad costera.

Del mismo modo, en nuestro lenguaje formal, el símbolo de conjunción hará las veces — salvando las distancias — de aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que expresamos que dos cosas son ciertas al mismo tiempo. Como por ejemplo, cuando afirmamos que

"Llueve y hace frío"

O cuando afirmamos que

"Revolcadores está en Murcia y La Sagra está en Granada

Por su parte, el símbolo de disyunción hará las veces de aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que expresamos disyuntivas entre dos opciones, de las cuales al menos una es verdadera, pero podrían ser las dos. Así por ejemplo, cuando afirmamos:

"Voy a comer fruta o verduras"

O cuando afirmamos:

"El polen lo transporta el viento o las abejas"

Tales disyunciones (o disyuntivas) se denominan *"inclusivas"*, como vimos en el Tema 10 de logfor1.

En cuanto al símbolo condicional, desempeña el rol de las expresiones condicionales del lenguaje natural, aunque con muchos desajustes, como también indicamos en ese mismo tema. Un ejemplo de condicional del lenguaje natural es el siguiente:

"Si yo soy más alta que tú, y tú que ella, entonces yo soy más alta que ella"

Y otro tanto cabe decir del símbolo bicondicional, de cuyo correlato en el lenguaje natural podemos poner este ejemplo:

"Recibirás el título si y solo si has aprobado todas las asignaturas y pagas la tasa"

§ 4.5. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se niegue algo.
2. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se afirmen dos cosas al mismo tiempo.
3. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se presente una disyuntiva entre dos posibilidades, de las cuales al menos una sea verdadera, pero pudieran serlo las dos (es decir, una disyuntiva inclusiva).
4. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural de la forma *"Si . . . , entonces . . . "*, en la que se exprese que una cosa es condición para que suceda otra.

5. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural de la forma *"... si y solo si ..."*, en la que se exprese que dos cosas están correlacionadas (es decir, que hay una doble condición, de la una a la otra y viceversa).

§ 4.6. LOS CUANTIFICADORES

Finalmente, los dos últimos símbolos lógicos de lenpred son los cuantificadores:

1. **El cuantificador universal**: $\forall$ (leído *"para todo"*).
2. **El cuantificador existencial**: $\exists$ (leído *"existe"*).

El correlato de los cuantificadores en el lenguaje natural son las *proposiciones universales y existenciales*, de las que hablamos en **§ 1.11** y **§ 1.14**, y a las que volveremos en **§ 7.12**.

§ 4.7. CUESTIONES

Especifica los cuantificadores de lenpred, con sus nombres, tal y como están recuadrados en la sección anterior. Debes memorizarlos para el control correspondiente a este tema.

§ 4.8. LOS PARÉNTESIS

Finalmente, lenpred posee una pareja de paréntesis, exactamente igual que lenprop:

- **El paréntesis izquierdo**: (

- **El paréntesis derecho**:)

Al igual que en logfor1, los paréntesis nos servirár para indicar cómo se deben leer fórmulas complejas, agrupando los símbolos de una manera u otra.

En el lenguaje natural, el correlato de esto es el uso de las comas y otros signos de puntuación, que utilizamos para desambiguar expresiones complejas.

Así por ejemplo, cuando decimos:

"Añade pimienta o pimentón, y sal"

estamos ordenando que añadas sal, por una parte, y además, o bien pimienta o bien pimentón.

Mientras que cuando decimos:

"Añade pimienta, o pimentón y sal"

estamos ordenando que añadas, o bien pimienta sola, o bien sal junto con pimentón.

§ 4.9. CUESTIONES

1. Inspirándote en el ejemplo que acabas de leer, pon un ejemplo de oración en el lenguaje natural, en la cual el cambio de una coma suponga una modificación tangible en el significado de la misma, y explícalo.
2. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.

b) Qué es lo que más te ha costado entender.

c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.

d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 5

La definición de fórmula atómica – Explicaciones complementarias

§ 5.1. LA DEFINICIÓN DE FÓRMULA DE LENPRED

Una vez introducido el alfabeto de lenpred, vamos a definir lo que son las **fórmulas** (abrevidamente, **flas**) de este lenguaje formal.

Esta definición es bastante más compleja que la definición de fórmula de lenprop, por lo que la desglosaremos en dos fases.

En una primera fase, definiremos las fórmulas más básicas, a las que denominaremos **"fórmulas atómicas"** (abreviadamente, **"flatoms"**). Y en una segunda fase, sobre la base de este concepto inicial, daremos la definición general de fórmula.

§ 5.2. DEFINICIÓN DE FÓRMULA ATÓMICA

Abordamos pues la definición de fórmula atómica, que a su vez consta de diferentes cláusulas, a partir de los tipos de símbolos predicativos definidos en **§ 3.5** :

1. Si W es un símbolo predicativo monario de lenpred y k es una constante de lenpred, entonces

$$Wk$$

es una fórmula atómica de lenpred.

2. Si k_1, k_2 son constantes de lenpred, entonces

$$k_1 = k_2$$

es una fórmula atómica de lenpred.

3. Si W^2 es un símbolo predicativo binario no lógico, y k_1, k_2 son constantes de lenpred, entonces

$$W^2 k_1 k_2$$

es una fórmula atómica de lenpred.

4. Si W^3 es un símbolo predicativo ternario de lenpred y k_1, k_2, k_3 son constantes de lenpred, entonces

$$W^3 k_1 k_2 k_3$$

es una fórmula atómica de lenpred.

Y así sucesivamente, para los símbolos predicativos 4-arios, 5-arios, etc.

§ 5.3. EJEMPLOS DE FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED MON

Por la cláusula (1) de la definición anterior, puesto que a es una constante y F es un símbolo predicativo monario, podemos concluir inmediatamente que Fa es una fórmula atómica.

Y dado que b, c, c_1, c_2 y c_3 son también constantes, pues también serán fórmulas atómicas las siguientes:

Fb $\quad$ Fc $\quad$ Fc_1 $\quad$ Fc_2 $\quad$ Fc_3

Por otra parte, como G es otro símbolo predicativo monario, pues también serán fórmulas atómicas, a su vez:

Ga $\quad$ Gb $\quad$ Gc $\quad$ Gc_1 $\quad$ $\ldots$

Y lo mismo ocurre con cualquier otra constante (como c_4, c_5, etc), y con cualquier otro símbolo predicativo monario (como por ejemplo H, F_1, F_2, etc). Por consiguiente, también serán fórmulas atómicas:

Ha $\quad$ Hc_2 $\quad$ F^1a $\quad$ F^1c_{25} $\quad$ $\ldots$

Ahora podemos entender por qué a estos símbolos predicativos se les llama **"monarios"**: porque **para formar una fórmula, necesitan ir seguidos de una sola constante**.

§ 5.4. CUESTIONES

Pon tres ejemplos de fórmulas atómicas de lenpred, con símbolos predicativos monarios.

§ 5.5. FORMALIZACIÓN DE PROPOSICIONES DEL LENGUAJE NATURAL MEDIANTE FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED MON

En **§ 2.11** indicamos que las constantes de lenpred hacen las veces, salvando las distancias, de los nombres propios del lenguaje natural. Y en **§ 3.7** explicamos que los simpred mon vienen a corresponder a expresiones predicativas.

Pues bien, las fórmulas atómicas que están compuestas de un simpred mon y una constante nos permiten formalizar, salvando las distancias, aquellas proposiciones del lenguaje natural en las que atribuimos una propiedad a un objeto.

Para ello, solo tenemos que indicar a qué objeto corresponde la constante, y a qué predicado corresponde el simpred mon, mediante una **tabla de convenciones simbólicas** similar a las que utilizábamos en logfor1.

§ 5.6. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM CON SIMPRED MON

Por ejemplo, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Natalia Gutman es violoncelista". (1)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer una tabla de convenciones simbólicas como la siguiente:

a : Natalia Gutman

F : *ser violoncelista*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, procedemos a formalizar (1), obteniendo como resultado:

$$\boxed{Fa}$$

§ 5.7. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM CON SIMPRED MON

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

$$\text{“\textit{17 es un número primo}”.} \tag{2}$$

Pues bien, en este otro caso, utilizaremos la siguiente tabla de convenciones simbólicas:

$\boxed{b}$: número 17

$\boxed{G}$: *ser un número primo.*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, procedemos a formalizar (1), obteniendo como resultado:

$$\boxed{Gb}$$

§ 5.8. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se atribuya una propiedad a un objeto.

2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 5.9. EJEMPLOS DE FÓRMULAS ATÓMICAS CON EL SÍMBOLO DE IGUALDAD

A continuación, nos ocuparemos de las fórmulas formadas mediante la cláusula (2) de **§ 5.2** .

Para empezar, puesto que a y b son constantes, es obvio que:

$$a = b$$

será una fórmula atómica.

Además, como la definición no especifica que las constantes en cuestión tengan que ser distintas, también

$$a = a$$

será una fórmula atómica.

Por lo mismo, también serán fórmulas atómicas de lenpred:

$b = a$ $\quad$ $b = b$ $\quad$ $a = c_2$ $\quad$ $c_{27} = c_{27}$ $\quad$ $c_{27} = b$ $\quad$ ...

Ahora se entiende por qué el símbolo de igualdad está incluido entre los **"símbolos predicativos binarios"**: porque **necesita ir flanqueado por dos apariciones de constantes, una a cada lado del mismo, para formar una fórmula.**

§ 5.10. CUESTIONES

Pon tres ejemplos de fórmulas atómicas de lenpred, con el símbolo de igualdad.

§ 5.11. FORMALIZACIÓN DE PROPOSICIONES DEL LENGUAJE NATURAL MEDIANTE FLATOM CON $=$

En **§ 2.11** indicamos que las constantes hacen las veces de los nombres propios, y en **§ 4.1** explicamos que el símbolo de igualdad hace las veces de aquellas expresiones del lenguaje natural en las que afirmamos la identidad entre dos objetos.

Pues bien, las fórmulas atómicas en las que solo aparece el símbolo de igualdad flanqueado por dos constantes, nos permiten formalizar aquellas proposiciones del lenguaje natural en las que predicamos la identidad entre dos objetos nombrados por nombres propios.

Para ello, bastará con indicar previamente a qué objeto corresponde cada constante, mediante la correspondiente tabla de convenciones simbólicas.

Nótese que esto no cubre el caso de las proposiciones de identidad que involucran descripciones definidas, como *“La capital de Turquía es Ankara”*. Estas proposiciones requieren un tratamiento especial, del que nos ocuparemos en **§ 14.1** .

§ 5.12. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM CON EL SÍMBOLO DE IGUALDAD

Supongamos que queremos formalizar la proposición:

"Bizancio es Constantinopla". (3)

Pues bien, en este caso podemos utilizar la siguiente tabla de convenciones simbólicas:

c_1 : *Bizancio*

c_2 : *Constantinopla*

Y entonces, aplicando dicha tabla, formalizaríamos (3) mediante:

$$c_1 = c_2$$

§ 5.13. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM CON EL SÍMBOLO DE IGUALDAD

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Lucila Godoy es Gabriela Mistral". (4)

Pues bien, en este otro caso, podemos utilizar la siguiente tabla de convenciones simbólicas:

c_3 : *Lucila Godoy*

c_4 : *Gabriela mistral*

Y entonces, aplicando dicha tabla, formalizaríamos (2) mediante:

$$c_3 = c_4$$

§ 5.14. CUESTIONES

1. Inspirándote en **§ 5.13** y **§ 5.12**,

    a) Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se predique la identidad entre dos objetos, cada uno nombrado con un nombre propio distinto. (Si no se te ocurre ninguno, puedes recurrir al caso del cantaor flamenco José Monje Cruz, apodado "Camarón".)

    b) Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.

    c) Indica cómo formalizar dicha proposición a partir de la tabla señalada.

2. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

    a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.

    b) Qué es lo que más te ha costado entender.

    c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.

    d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 6

Más explicaciones sobre las fórmulas atómicas

§ 6.1. EJEMPLOS DE FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED BIN NO LÓGICOS

A continuación, vamos a poner ejemplos de las fórmulas atómicas que se forman mediante la cláusula (3) de la definición **§ 5.2** .

Dicha cláusula afecta a los símbolos predicativos binarios no lógicos, es decir, a los simpred bin distintos del símbolo de igualdad.

Pues bien, tales símbolos también necesitan de **dos** apariciones de constantes para formar una fómula. Sin embargo, a diferencia del símbolo de igualdad, en este caso las constantes se colocan a continuación del simpred bin, una detrás de la otra (así lo indica la cláusula (3) que estamos comentando).

Por ejemplo, tomemos el simpred bin K , y a continuación del mismo pongamos dos constantes, a y b . El resultado que obtenemos será:

$$Kab$$

lo cual constituye una fórmula atómica.

También obtenemos una fórmula atómica si a continuación del símbolo predicativo binario colocamos una misma constante, dos veces (es decir, una constante repetida, con dos apariciones sucesivas). Por ejemplo:

$$Kbb$$

Y de un modo similar, podemos formar otras fórmulas atómicas mediante diversos símbolos predicativos binarios, como por ejemplo:

$$Kba \qquad Lbc \qquad Lcc \qquad K_1cc_7 \qquad K_2c_7a \qquad \ldots$$

Ahora podemos entender por qué a estos símbolos predicativos se les llama **"binarios"**: porque **para formar una fórmula, necesitan ir seguidos de dos constantes**.

§ 6.2. CUESTIONES

Pon tres ejemplos de fórmulas atómicas de lenpred, con símbolos predicativos binarios no lógicos.

§ 6.3. FORMALIZACIÓN MEDIANTE FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED BIN NO LÓGICOS

En **§ 3.9** explicamos que los simpred bin vienen a corresponder, salvando las distancias, a aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que enunciamos una relación entre dos objetos.

Pues bien, las fórmulas atómicas que están compuestas de un simpred bin y dos constantes, nos permiten formalizar — salvando las distancias — aquellas proposiciones del lenguaje natural en las que atribuimos una relación a dos objetos, nombrados por nombres propios, y tomados en un orden determinado.

Si dicha relación resulta ser la relación de igualdad (o identidad), ya hemos puesto ejemplos (en **§ 5.12** y **§ 5.13**) sobre cómo formalizar las proposiciones correspondientes. A continuación, veremos ejemplos de formalización de otras relaciones entre dos objetos, distintas a la igualdad.

§ 6.4. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM COM SIMPRED BIN NO LÓGICOS

Por ejemplo, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Natalia Gutman fue discípula de Rostropóvich". (1)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer una tabla de convenciones simbólicas como la siguiente:

a : Natalia Gutman

b : Rostropóvich

K : *ser discípula de*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, procedemos a formalizar (1), obteniendo como resultado:

$$Kab$$

§ 6.5. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM COM SIMPRED BIN NO LÓGICOS

Ahora, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"El número π es mayor que 3". (2)

Pues bien, en este caso, utilizaremos la siguiente tabla de convenciones simbólicas:

c : número π

$c3$: número 3

L : *ser mayor que*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, procedemos a formalizar (1), obteniendo como resultado:

$$Lcc_3$$

§ 6.6. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se atribuya una relación (distinta de la igualdad) a dos objetos nombrados con nombres propios.

2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.

3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 6.7. EJEMPLOS DE FÓRMULAS ATÓMICAS CON SÍMBOLOS PREDICATIVOS TERNARIOS, 4-ARIOS, ETC

En virtud de la cláusula (4) de **§ 5.2** , un símbolo predicativo **ternario** tendrá que ir seguido de **tres** apariciones de constantes, para formar una fórmula atómica. De ahí viene el nombre de *"ternario"* (o *"de tres lugares"*).

Así por ejemplo, como M es un simpred ter, pues serán fórmulas atómicas de lenpred:

$Mabc$ $Mcba$ $Mabb$ $Maaa$ $Mc_1c_2c_3$ ...

Y otro tanto se aplica a cualquier otro símbolo predicativo ternario de lenpred. Por consiguiente, serán también fórmulas atómicas, por ejemplo:

$Nabc$ $Ncab$ M_1cba M_2bbb $M_{25}2c_{14}bc_{27}$ ...

Por otra parte, aplicando la cláusula (5) de **§ 5.2** , un símbolo predicativo **4-ario** (o **cuaternario**), como por ejemplo O^4 , tendrá que ir seguido de **cuatro** apariciones de constantes, para formar una fórmula. Así por ejemplo, serán fórmulas atómicas de lenpred:

$$O^4abcc_1 \qquad O^4aaaa \qquad O^4cbac_2 \qquad O^4c_1c_4c_9b \qquad \ldots$$

Y por el mismo procedimiento, es fácil encontrar ejemplos de fórmulas atómicas con símbolos predicativos 5-arios, 6-arios, 7-arios, etc.

§ 6.8. CUESTIONES

1. Pon dos ejemplos de fórmula atómica de lenpred, con símbolos predicativos ternarios.
2. Pon dos ejemplos de fórmula atómica de lenpred, con símbolos predicativos cuaternarios.

§ 6.9. FORMALIZACIÓN MEDIANTE FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED TERNARIOS, 4-ARIOS, ETC

En **§ 3.11** y **§ 3.13** explicamos que los símbolos predicativos ternarios, 4-arios, etc, vienen a corresponder — salvando las distancias — a aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que atribuimos relaciones a tres o más objetos, nombrados con nombres propios, y tomados en un orden determinado.

Pues bien, las fórmulas atómicas que estén compuestas de un símbolo predicativo ternario y vayan seguidas de tres constantes, nos permitirán formalizar — salvando las distancias — aquellas proposiciones del lenguaje natural en las que atribuimos una relación a tres objetos, tomados en un orden.

Para ello, solo tendremos que establecer previamente la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, tal y como hemos venido haciendo en los casos anteriores.

Y lo mismo haremos, análogamente, para aquellas fórmulas atómicas que estén compuestas de un simpred 4-ario y vayan seguidas de cuatro constantes, o las que estén compuestas de un simpred 5-ario y vayan seguidas de cinco constantes, etc.

§ 6.10. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM CON SIMPRED TER

Por ejemplo, supongamos que queremos formalizar la proposición :

“Madrid está entre Murcia y La Coruña”. (3)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer una tabla de convenciones simbólicas como la siguiente:

c_1 : Madrid

c_2 : Murcia

c_4 : La Coruña

M : *estar una cosa entre una segunda y una tercera*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, procedemos a formalizar (1), obteniendo como resultado:

$$Mc_1c_2c_4$$

§ 6.11. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se atribuya una relación a tres o más objetos.
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición con la tabla señalada.
4. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
    a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
    b) Qué es lo que más te ha costado entender.
    c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
    d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 7

La definición de general de fórmula de lenpred – Cuantificaciones existenciales

§ 7.1. LA DEFINICIÓN GENERAL DE FÓRMULA DE LENPRED

Una vez definidas y explicadas las fórmulas atómicas de todos los tipos posibles, estamos en condiciones de dar la definición general de **fórmula** de lenpred.

Dicha definición consta de ocho **"cláusulas recursivas"**, así llamadas porque están imbricadas unas con otras, y su uso combinado da lugar a fórmulas más y más complejas.

1. Las fórmulas definidas conforme a lo indicado en § **5.2** constituyen **fórmulas atómicas**.

2. Si A es cualquier fórmula, entonces $\neg A$ es otra fórmula, llamada **“negación”**.

   A continuación, si A y B son cualesquiera fórmulas, entonces:

3. $(A \wedge B)$ es otra fórmula, llamada **“conjunción”**.

4. $(A \vee B)$ es otra fórmula, llamada **“disyunción”**.

5. $(A \rightarrow B)$ es otra fórmula, llamada **“condicional”**.

6. $(A \leftrightarrow B)$ es otra fórmula, llamada **“bicondicional”**.

   Por último, sea k una constante cualquiera y v una variable. A continuación, sea $A(k)$ cualquier fórmula en la que aparezca k pero no v. Y finalmente, sea $A(v)$ el resultado de reemplazar k por v en al menos una de sus apariciones.

   Pues bien, en estas condiciones,

7. $\exists v A(v)$ es una fórmula, llamada **“cuantificación existencial en la variable v”** (o **“sobre la variable v”**).

8. $\forall v A(v)$ es una fórmula, llamada **“cuantificación universal en la variable v”** (o **“sobre la variable v”**).

Las cláusulas (2)–(6) son similares a las que vimos en logfor1, con la diferencia de que allí las fórmulas atómicas eran símbolos proposicionales, y aquí son algo más complejas. Pero por lo demás, el funcionamiento de estas cláusulas es análogo al de logfor1.

Sin embargo, las cláusulas (7) y (8) sí requieren de una explicación más detenida, y es lo que haremos a continuación, a través de varios ejemplos.

Pero antes, vamos a introducir una abreviatura especial.

§ 7.2. ABREVIATURA ESPECIAL PARA LA IGUALDAD NEGADA

En algunos casos, utilizaremos la cláusula (2) para anteponer el símbolo de negación a una fórmula atómica de igualdad. En esos casos, tendremos dos constantes, k_1 y k_2, y la fórmula resultante será:

$$\neg\,(k_1 = k_2)$$

Pues bien, para tales fórmulas adoptaremos la siguiente abreviatura:

$$k_1 \neq k_2$$

Así por ejemplo, abreviaremos la fórmula

$$\neg\,(a = b)$$

poniendo

$$a \neq b$$

§ 7.3. CUESTIONES

Abrevia la fórmula $\neg(b = c)$, aplicando lo que se acaba de indicar.

§ 7.4. UN EJEMPLO DE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

A continuación, vamos a considerar la fórmula Fa, compuesta por el simpred monario F y la constante a.

Y vamos a empezar por reemplazar esa constante por la variable x. El resultado será Fx.

Aquí conviene prestar atención, porque **la expresión Fx no es una fórmula**, sino un paso intermedio que estamos dando, en el proceso de construcción de una cuantificación existencial.

A continuación, procedemos a anteponer el cuantificador existencial a dicha expresión, junto con la variable x, obteniendo:

$$\exists x Fx$$

Pues bien, esto sí es un ejemplo de cuantificación existencial de lenpred.

§ 7.5. CUESTIONES

Siguiendo el ejemplo que acabamos de ver:

1. Construye una fórmula de cuantificacion existencial, a partir de la fórmula atómica Gb y la variable y.

2. Construye una fórmula de cuantificacion existencial, a partir de la fórmula atómica Hc y la variable z.

§ 7.6. OTRO EJEMPLO DE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

Ahora vamos a hacer la misma operación, pero partiendo de la fórmula Kbb.

Dicha fórmula está compuesta por el simpred binario K y la constante b, que aparece dos veces.

Pues bien, en este ejemplo, elegiremos reemplazar *solamente la primera* de las apariciones de la constante b, y la sustituiremos por la variable y.

El resultado será:

$$Kyb$$

Nuevamente, nótese que Kyb *no* es una fórmula, sino solo un paso intermedio en la construcción de una fórmula de cuantificación existencial.

Una vez hecho eso, procedemos a anteponer el cuantificador existencial, junto con la variable y, obteniendo como resultado:

$$\exists yKyb$$

Pues bien, esta última expresión sí es una fórmula de lenpred, y en concreto, una cuantificación existencial.

§ 7.7. CUESTIONES

Siguiendo el ejemplo que acabamos de ver:

1. Construye otra fórmula de cuantificacion existencial, a partir de la fórmula atómica Lcc y la variable y.
2. Construye otra fórmula de cuantificacion existencial, a partir de la fórmula atómica Maa y la variable z.

§ 7.8. TERCER EJEMPLO DE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

Ahora volveremos a partir de la fórmula Kbb, pero en esta ocasión reemplazaremos *las dos* apariciones de la constante b por la variable y.

El resultado de dicho reemplazo será la expresión Kyy (la cual no constituye una fórmula).

Y anteponiendo a dicha expresión el cuantificador existencial, junto con la variable y, obtenemos como resultado:

$$\exists y Kyy$$

Pues bien, esta última expresión es también, obviamente, una cuantificación existencial de lenpred.

§ 7.9. CUESTIONES

Construye otra fórmula de cuantificacion existencial a partir de la fórmula atómica Lcc y la variable y, siguiendo el ejemplo que acabamos de ver.

§ 7.10. CUARTO EJEMPLO DE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

En nuestro siguiente ejemplo, vamos a partir de la fórmula

$$(Fc \wedge Kcb)$$

Aquí no podemos suprimir los paréntesis exteriores, porque no nos vamos a limitar a nombrar esta fórmula sola, sino que la vamos a modificar, y luego le vamos a anteponer un cuantificador.

En concreto, vamos a reemplazar la constante c por la variable z. El resultado será $(Fz \wedge Kzb)$ (que, nuevamente, no es una fórmula, sino solo un paso intermedio en la construcción).

Y hecho esto, procedemos a anteponer el cuantificador existencial, junto con la variable z. El resultado que obtenemos es:

$$\exists z(Fz \wedge Kzb)$$

Y una vez más, esta sí es una fórmula de lenpred, y en concreto, una cuantificación existencial.

§ 7.11. CUESTIONES

Siguiendo el ejemplo que acabamos de ver:

1. Construye otra fórmula de cuantificacion existencial, a partir de la fórmula atómica $(Gc \vee Lbb)$ y la variable y.
2. Construye otra fórmula de cuantificacion existencial, a partir de la fórmula atómica $(\neg Hc \rightarrow Laa)$ y la variable x.

§ 7.12. CONVENCIÓN PREVIA RESPECTO A LAS PROPOSICIONES EXISTENCIALES

Las fórmulas de cuantificación existencial de lenpred hacen las veces, salvando las distancias, de las proposiciones existenciales del lenguaje natural, de las que hablamos en **§ 1.14** . Por consiguiente, podemos utilizar tales fórmulas de lenpred para formalizar ese tipo de proposiciones.

Sin embargo, antes de proceder a ello, conviene adoptar la siguiente convención. Siempre que digamos genéricamente que **"hay objetos"** de una determinada clase, entenderemos que **hay al menos uno, pero podrían ser más**. Y lo mismo se aplica a expresiones similares, como *"existen objetos"* de una determinada clase, *"se dan objetos"* que cumplen una determinada condición, etc.

Este tipo de proposiciones existenciales genéricas son las más fáciles de formalizar (veremos cómo a partir de **§ 7.14**).

Sin embargo, habrá ocasiones en que queramos afirmar **"hay un solo objeto"** de una determinada clase. Pues bien, en ese caso tendremos que decirlo así, expresamente (o por medio de expresiones similares, como *"hay exactamente un objeto"* que cumple tal cosa, etc). Estas proposiciones existenciales también se pueden formalizar, pero cuestan un poco más que las anteriores (veremos un ejemplo en **§ 13.1**).

Por último, también habrá ocasiones en que queramos afirmar que **"hay más de un objeto"** de una determinada clase. Pues bien, en ese caso tendremos que decirlo así, expresamente (o por medio de expresiones similares, como *"hay varios objetos"* que cumplen tal cosa, etc). También este tipo de proposiciones existenciales se pueden formalizar, pero también requieren de una maniobra especial para llegar a buen puerto (veremos un ejemplo de ello en **§ 13.6**).

§ 7.13. CUESTIONES

Explica brevemente, con tus propias palabras, la convención que se acaba de adoptar.

§ 7.14. FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIONES EXISTENCIALES

En todo caso, para formalizar cualquier proposición existencial (sea esta del tipo que sea), siempre empezaremos por especificar la correspondiente *tabla de convenciones simbólicas*, al igual que hemos venido haciendo hasta ahora.

En dicha tabla, indicaremos a qué objetos del universo corresponden las constantes de la fórmula, si las hay; e indicaremos a qué predicados corresponden los símbolos predicativos (excepto el símbolo de igualdad, para el cual no hay que especificar ningún significado).

Una vez terminada la tabla de convenciones, procederemos a indicar la fórmula que corresponde a la proposición en cuestión.

A continuación, vamos a comenzar viendo ejemplos del caso más sencillo, la formalización de proposiciones existenciales genéricas.

§ 7.15. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

Supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay violoncelistas". (1)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser sencillamente la siguiente:

F : *ser violoncelista*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (1) por medio de:

$$\exists x F x$$

Alternativamente, también podemos usar cualquier otra variable, en puesto de x, y tendríamos una formalización igualmente correcta. Así por ejemplo, cualquiera de las fórmulas:

$\exists y F y$ $\exists z F z$ $\exists x_1 F x_1$

constituye una formalización correcta de (1), bajo la tabla de convenciones simbólicas que acabamos de dar.

§ 7.16. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición existencial genérica sencilla, similar a (1).

2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 7.17. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Rostropóvich tuvo estudiantes". (2)

Ello es equivalente a decir que *"Hubo estudiantes de Rostropóvich"*, o que *"Existieron estudiantes de Rostropóvich"*. Por lo tanto, se trata de una proposición existencial genérica.

Pues bien, en este caso necesitaríamos una tabla de convenciones simbólicas como la siguiente:

b : Rostropóvich

K : *ser estudiante de*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (2) por medio de:

$$\exists y K y b$$

Aquí también podríamos haber usado cualquier otra variable en puesto de y, de modo análogo a lo que acabamos de comentar para el caso anterior.

§ 7.18. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición existencial cuya estructura sea más o menos similar a (2).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 7.19. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay violoncelistas que fueron estudiantes de Rostropóvich". (3)

Pues bien, en este caso podemos aplicar la siguiente tabla:

b : Rostropóvich

F : *ser violoncelista*

K : *ser estudiante de*

Y aplicando dicha tabla, podemos formalizar (3) por medio de:

$$\exists z(Fz \wedge Kzb)$$

Obviamente aquí también podríamos usar cualquier otra variable en puesto de z, como hemos comentado en los casos anteriores.

§ 7.20. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición existencial cuya estructura sea más o menos similar a (3).

2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.

3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

4. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.

   b) Qué es lo que más te ha costado entender.

   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.

   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 8

Cuantificaciones universales – Fórmulas complejas

§ 8.1. EJEMPLOS DE CUANTIFICACIONES UNIVERSALES

La construcción de cuantificaciones universales, siguiendo la cláusula (8) de **§ 7.1** , es enteramente análoga a la construcción de cuantificaciones existenciales, siguiendo la cláusula (7).

Por lo tanto, dando pasos similares a los que hemos visto en **§ 7.4** , **§ 7.6** , **§ 7.8** y **§ 7.10** , podemos concluir que también:

$\forall xFx$ $\quad$ $\forall yKyb$ $\quad$ $\forall yKyy$ $\quad$ $\forall z(Fz \wedge Kzb)$

son fórmulas de lenpred, y en particular, cuantificaciones universales.

§ 8.2. CUESTIONES

Construye cuatro ejemplos de cuantificaciones universales, inspirándote en las que acabamos de ver.

§ 8.3. FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIONES UNIVERSALES

Las fórmulas de cuantificación universal de lenpred hacen las veces, salvando las distancias, de las proposiciones universales del lenguaje natural, de las que hablamos en **§ 1.11** . Por consiguiente, podemos utilizar tales fórmulas de lenpred para formalizar ese tipo de proposiciones.

A este respecto, es importante señalar que hay proposiciones universales que usan la locución "cualquier" en lugar de "todos", o "cualquiera" en lugar de "todas". En la mayoría de los casos, esta variante estilística no afecta al significado, ni a la estructura lógica. Y por consiguiente, no afecta al modo en que hay que formalizar la proposición en cuestión.

Así por ejemplo, la proposición

"Cualquier cosa es digna de estudio"

dice lo mismo que

"Todo es digno de estudio"

Se trata de dos expresiones de una misma proposición, y por lo tanto se formalizarán de la misma manera (inmediatamente veremos cómo).

Y lo mismo se aplica a casos similares.

Pues bien, dicho esto, para formalizar una prosición universal empezaremos por establecer la habitual *tabla de convenciones simbólicas.* En esa tabla especificaremos a qué corresponde cada constante y cada simpred que aparezca en la fórmula.

Y sobre la base de dicha tabla, una vez terminada, procederemos a indicar la fórmula que representa la proposición en cuestión.

§ 8.4. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIÓN UNIVERSAL

Por ejemplo, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Todo es digno de estudio". (1)

Vamos a ver cómo formalizar esta proposición, independientemente de que nos parezca verdadera o falsa.

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser sencillamente la siguiente:

F : *ser digno de estudio*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (1) por medio de:

$$\forall x F x$$

Naturalmente, aquí también vale cualquier otra variable, análogamente a lo que dijimos en § **7.15** , § **7.17** y § **7.19** :

$\forall y F y$ $\quad$ $\forall z F z$ $\quad$ $\forall x_1 F x_1$ $\quad$ ...

§ 8.5. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición universal análoga a (1) (es decir, que solo requiera un simpred), aunque sea falsa.
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 8.6. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIÓN UNIVERSAL

Como segundo ejemplo de formalización mediante una fórmula sencilla de cuantificación universal, nos proponemos formalizar:

"Todo es igual a sí mismo". (2)

Este es un caso peculiar, porque no precisa de la intervención de símbolo extralógico alguno. Y por consiguiente, no hay tabla de convenciones simbólicas que establecer previamente a la formalización.

En efecto, usando el símbolo de igualdad y el cuantificador existencial, junto con una variable, obtenemos:

$$\forall x\,(x = x)$$

Dicha fórmula es una formalización correcta de (2). Y lo mismo ocurrirá con cualquier otra similar, que use otra variable (esta coletilla se da por sentada a partir de ahora, ya no la repetiremos más).

§ 8.7. FÓRMULAS COMPLEJAS

Como dijimos en **§ 7.1** , la definición general de fórmula de lenpred permite que sus cláusulas se combinen unas con otras, dando lugar a fórmulas más y más complejas.

Para ilustrar esto, vamos a partir de las siguientes fórmulas atómicas:

$a = b$ $\quad$ $a = a$ $\quad$ Fa $\quad$ Gb $\quad$ Kab $\quad$ $Mcba$

Pues bien, partiendo de estas fórmulas atómicas, y aplicando la definición **§ 7.1** y la abreviatura **§ 7.2** , podemos formar fórmulas complejas como las siguientes:

$a = b \to a = a$ $\quad$ $a \neq b \land Fa$ $\quad$ $Gb \lor Kab \leftrightarrow Mcba$

$\exists x(x = b \to x = x)$ $\quad$ $\forall y(y \neq b \land Fy)$ $\quad$ $Gb \lor Kab \leftrightarrow \exists xMcxa$

Aplicando lo que vimos en logfor1 respecto a las conectivas, y extendiéndolo a los cuantificadores, es sencillo indicar el operador lógico principal de cada una de estas fórmulas:

$a = b \boxed{\to} a = a$ $\quad$ $a \neq b \boxed{\land} Fa$ $\quad$ $Gb \lor Kab \boxed{\leftrightarrow} Mcba$

$\boxed{\exists} x(x = b \to x = x)$ $\quad$ $\boxed{\forall} y(y \neq b \land Fy)$ $\quad$ $Gb \lor Kab \boxed{\leftrightarrow} \exists xMcxa$

§ 8.8. MÁS EJEMPLOS DE FÓRMULAS COMPLEJAS

También podemos combinar los propios cuantificadores, como por ejemplo en las fórmulas:

$\exists x \exists y Kxy$ $\qquad$ $\neg \forall x \exists y Kxy$ $\qquad$ $\forall x(\neg Kax \rightarrow \exists y Kyx)$

cuyos operadores principales son:

$\boxed{\exists} x \exists y Kxy$ $\qquad$ $\boxed{\neg} \forall x \exists y Kxy$ $\qquad$ $\boxed{\forall} x(\neg Kax \rightarrow \exists y Kyx)$

§ 8.9. CUESTIONES

Pon tres ejemplos de fórmulas complejas e indica el operador lógico principal de cada una.

§ 8.10. FORMALIZACIÓN MEDIANTE FÓRMULAS COMPLEJAS

Las fórmulas complejas de lenpred nos servirán para encontrar correlato formal a proposiciones del lenguaje natural muy variadas (salvando las distancias, como siempre decimos).

A continuación vamos a ver algunos de los ejemplos y patrones de formalización más relevantes.

§ 8.11. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA FLATOM

Supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Gabriela Mistral no es Natalia Gutman". (3)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : Gabriela Mistral

b : Natalia Gutman

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (3) por medio de:

$$a \neq b$$

§ 8.12. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 8.13. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA FLATOM

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

“Gabriela Mistral no es violoncelista”. (4)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : Gabriela Mistral

F : *ser violoncelista*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (4) por medio de:

$$\neg Fa$$

§ 8.14. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (4).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 8.15. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA FLATOM

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Gabriela Mistral no fue estudiante de Rostropóvich". (5)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : Gabriela Mistral

b : Rostropóvich

K : *ser estudiante de*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (5) por medio de:

$$\neg Kab$$

§ 8.16. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (5).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 8.17. CUARTO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA FLATOM

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Rostropóvich no fue estudiante de sí mismo". (6)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

$$b \quad : \quad \text{Rostropóvich}$$

$$K \quad : \quad \textit{ser estudiante de}$$

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (6) por medio de:

$$\neg Kbb$$

§ 8.18. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (6).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.
4. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
   b) Qué es lo que más te ha costado entender.
   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 9

Ampliación sobre la formalización mediante fórmulas complejas

§ 9.1. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNA CONJUNCIÓN ENTRE FLATOMS

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Gabriela Mistral y Alfonsina Storni eran poetas". (1)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : Gabriela Mistral

b : Alfonsina Storni

F : *era poeta*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (1) por medio de:

$$Fa \wedge Fb$$

§ 9.2. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (1).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.3. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UN CONDICIONAL ENTRE FLATOMS

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Si Gabriela Mistral era poeta, también lo era Alfonsina Storni". (2)

En este caso, nos valdría la misma tabla de convenciones que en **§ 9.1** . Y aplicando dicha tabla, podemos formalizar (2) por medio de:

$$Fa \rightarrow Fb$$

§ 9.4. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (2).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.5. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNA DISYUNCIÓN ENTRE FLATOMS

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"O Gabriela Mistral era poeta, o lo era Alfonsina Storni". (3)

Aquí también nos valdría la misma tabla de convenciones que en **§ 9.1** . Y aplicando dicha tabla, podemos formalizar (3) por medio de:

$$Fa \vee Fb$$

§ 9.6. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.7. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"No hay unicornios". (4)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser unicornio*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (4) por medio de:

$$\neg \exists x F x$$

§ 9.8. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (4).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.9. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Nada es distinto de sí mismo". (5)

Al igual que sucedía en **§ 8.6** , en esta proposición no hay nombres propios, y la única relación que interviene es la de igualdad. Por consiguiente, aquí tampoco harán falta símbolos extralógicos, por lo que no hay tabla de convenciones que especificar.

Por otra parte, es obvio que decir (5) es lo mismo que decir:

"No hay nada que sea distinto de sí mismo"

o bien:

"No existe algo que sea distinto de sí mismo"

Las tres son variantes estilísticas de la misma proposición.

Por consiguiente, la formalización de (5) quedaría:

$$\neg \exists x\,(x \neq x)$$

§ 9.10. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Venus no tiene satélites". (6)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : Venus

F : *ser satélite de*

Naturalmente, decir (6) es como decir

"No existe algo que sea un satélite de Venus"

Ambas son variantes estilísticas de la misma proposición, con una misma estructura lógica.

Por consiguiente, podemos formalizar dicha proposición por medio de:

$$\neg\exists x\,(Fxa)$$

§ 9.11. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (6).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.12. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN UNIVERSAL

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"No todo es digno de estudio". (7)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser digno de estudio*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (7) por medio de:

$$\neg\forall x Fx$$

§ 9.13. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN UNIVERSAL

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

$$\text{“\textit{No todo es saludable}”.} \tag{8}$$

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser saludable*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (8) por medio de:

$$\neg\forall x Fx$$

§ 9.14. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (7) y (8).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.15. COMBINACIONES COMPLEJAS DE CUANTIFICACIÓN Y NEGACION

A veces, manejamos combinaciones complejas de existencial y negación, o de universal y negación. Y entre algunas de esas combinaciones se dan interesantes correlaciones.

En **§ 9.18** **§ 9.20** veremos dos ejemplos de ello, en casos sencillos.

En **§ 11.13** y **§ 11.15**, veremos otros dos ejemplos, un poco más complicados.

Y a partir de esos ejemplos, aplicando el sentido común, podemos encontrar correspondencias análogas, en otros casos similares.

§ 9.16. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIÓN COMPLEJA DE EXISTENCIAL Y NEGACIÓN

Supongamos que queremos formalizar la proposición :

"No hay nada que no sea digno de estudio". (9)

Naturalmente, decir (9) es como decir

"No existe algo que no sea digno de estudio"

Ambas son variantes estilísticas de la misma proposición, con una misma estructura lógica.

Pues bien, para formalizar esta proposición, comenzaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

$$F \quad : \quad \textit{ser digno de estudio}$$

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (9) por medio de:

$$\neg\exists x\, \neg Fx$$

§ 9.17. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (9).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.18. UN EJEMPLO DE CORRELACIÓN ENTRE COMBINACIONES COMPLEJAS DE CUANTIFICACIÓN Y NEGACION

Nótese la correlación entre (9) y :

“Todo es digno de estudio”. (10)

Sin embargo, la formalización de (10) es distinta:

$$\forall x Fx$$

Así lo vimos en **§ 8.4** (con otro número de orden, pero bajo la misma tabla de convenciones simbólicas).

Por consiguiente, (9) y (10) son *proposiciones distintas*. No se puede decir que una sea una mera variante estilística de la otra. De hecho, su estructura lógica es distinta, como se aprecia en las distintas formalizaciones de cada una.

En este sentido, es importante enfatizar que $\neg\exists x\neg Fx$ y $\forall xFx$ **no son** la misma fórmula. De hecho, salta a la vista que son secuencias distintas de símbolos de lenpred.

Sin embargo, las fórmulas $\neg\exists x\neg Fx$ y $\forall xFx$ son **lógicamente equivalentes**, como veremos en **§ ??** . (Las referencias marcadas con doble interrogación se concretarán en la versión completa de este manual, en relación a los temas 22–30.)

Y ello concuerda con el hecho de que (9) y (10) son, a su vez, **proposiciones lógicamente equivalentes** (esto es, que no puede ser verdadera una sin la otra).

§ 9.19. CUESTIONES

1. Inspirándote en la correlación entre (9) y (10), indica una proposición que tenga el mismo tipo de correlación con el ejemplo que has puesto en **§ 9.17** .
2. Formaliza la proposición que acabas de indicar.

§ 9.20. OTRO EJEMPLO DE CORRELACIÓN ENTRE COMBINACIONES COMPLEJAS DE CUANTIFICACIÓN Y NEGACION

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay cosas no saludables". (11)

Obviamente, podríamos usar la misma tabla de convenciones que en **§ 9.13** :

F : *ser saludable*

Y aplicando dicha tabla, formalizaremos (11) por medio de:

$$\exists x \neg Fx$$

Ahora bien, aquí también se da una correlación entre (11) y la proposición (8) que vimos en **§ 9.13** :

"No todo es saludable"

cuya formalización era:

$$\neg \forall x Fx$$

Una vez más, debemos enfatizar que $\exists x \neg Fx$ y $\neg \forall x Fx$ son fórmulas distintas, aunque también sean fórmulas lógicamente equivalentes, como demostraremos en su momento.

Y por su parte, también es obvio que (8) y (11) son proposiciones lógicamente equivalentes (esto es, que no puede ser verdadera la una sin la otra).

§ 9.21. CUESTIONES

1. Inspirándote en la correlación entre (11) y (8), indica una proposición que tenga el mismo tipo de correlación con el ejemplo que pusiste en **§ 9.14** .
2. Formaliza la proposición que acabas de indicar.
3. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
   b) Qué es lo que más te ha costado entender.
   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 10

El existencial conjuntivo

§ 10.1. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay coches blancos". (1)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser un coche*

G : *ser blanco*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (1) por medio de:

$$\exists x\,(Fx \wedge Gx)$$

§ 10.2. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (1).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 10.3. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

$$\text{“}\textit{Hay quien es pianista y ajedrecista}\text{”}. \tag{2}$$

(Un ejemplo excepcional de ello fue Taimánov.)

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

$$F \;:\; \textit{ser pianista}$$

$$G \;:\; \textit{ser ajedrecista}$$

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (2) por medio de:

$$\exists x\,(Fx \wedge Gx)$$

§ 10.4. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (2).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 10.5. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

$$\text{“\textit{Hay quien es violoncelista pero no pianista}”.} \tag{3}$$

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

$$F \;:\; \textit{ser violoncelista}$$

$$G \;:\; \textit{ser pianista}$$

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (3) por medio de:

$$\exists x\,(Fx \wedge \neg Gx)$$

§ 10.6. CUARTO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay coches que no son blancos". (4)

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser un coche*

G : *ser blanco*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (4) por medio de:

$$\exists x\,(Fx \land \neg Gx)$$

§ 10.7. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3) y (4).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 10.8. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE NEGACIÓN DE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

“No hay planetas cuadrados”. (5)

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser un planeta*

G : *ser cuadrado*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (5) por medio de:

$$\neg \exists x\,(Fx \wedge Gx)$$

§ 10.9. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (5).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 10.10. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE NEGACIÓN DE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición:

"No hay violoncelistas que fueran estudiantes de Gabriela Mistral". (6)

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : Gabriela Mistral

F : *ser violoncelista*

K : *ser estudiante de*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (6) por medio de:

$$\neg \exists x \, (Fx \wedge Kxa)$$

§ 10.11. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (6).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 10.12. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE NEGACIÓN DE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"No hay cuervos que no sean negros". (7)

Nótese que (7) es otra forma de decir:

"No hay ninguna cosa que sea un cuervo y no sea negra"

Ambas son variantes estilísticas de la misma proposición.

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser un cuervo*

G : *ser negro*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (6) por medio de:

$$\neg \exists x \, (Fx \wedge \neg Gx)$$

(Volveremos a los ejemplos de cuervos en **§ 11.15** y **§ 11.17**.)

§ 10.13. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (7).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.

3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

4. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.

   b) Qué es lo que más te ha costado entender.

   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.

   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 11

El universal condicional y otras variantes

§ 11.1. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNIVERSAL CONJUNTIVO

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Todo es sorprendente y digno de estudio". (1)

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser sorprendente*

G : *ser digno de estudio*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (1) por medio de:

$$\forall x\,(Fx \land Gx)$$

§ 11.2. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (1).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 11.3. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNIVERSAL CONDICIONAL

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Si algo es sorprendente, entonces es digno de estudio". (2)

Nótese que (2) es otra forma de decir:

"Dada cualquier cosa, si es sorprendente, entonces es digna de estudio"

"Todo lo que es sorprendente, es digno de estudio"

"Todo lo sorprendente es digno de estudio"

Las cuatro son variantes estilísticas de la misma proposición.

Sin embargo, esta proposición es netamente distinta a (1).

En efecto, decir que **"si algo es sorprendente, es digno de estudio"** — que es lo que dice (2) — deja hueco a la posibilidad de que haya cosas no sorprendentes y no dignas de estudio.

Mientras que decir que **"todo es, a la vez, sorprendente y digno de estudio"** — que es lo que dice (1) — excluye esa posibilidad.

Por consiguiente, utilizaremos la misma tabla de convenciones simbólicas que antes, pero formalizaremos (2) mediante:

$$\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$$

Nótese que, en esta ocasión, las fórmulas

$\forall x\,(Fx \wedge Gx)$ y $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$

no solo son **distintas**, sino que **tampoco son lógicamente equivalentes** (lo veremos en **§ ??**).

§ 11.4. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (2).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 11.5. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNIVERSAL CONDICIONAL

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Todos los planetas son esféricos". (3)

Aquí también tenemos que empezar por darnos cuenta de que no estamos diciendo que todas las cosas que existen sean a la vez planetas y esféricas. Tan solo estamos diciendo que **"si algo es un planeta, entonces ese algo es esférico"**.

Teniendo esto en cuenta, procedemos a establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser un planeta*

G : *ser esférico*

Y basándonos en esta tabla de convenciones, así como en el precedente anterior, formalizamos (3) mediante:

$$\forall x(Fx \to Gx)$$

§ 11.6. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 11.7. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNIVERSAL CONDICIONAL

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

“Todes les estudiantes de Rostropóvich fueron violoncelistas”. (4)

A tal efecto, procedemos a establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : Rostropóvich

F : *ser violoncelista*

K : *ser estudiante de*

Y por último, basándonos en esta tabla de convenciones, y sobre la experiencia de los precedentes anterirores, formalizamos (4) mediante:

$$\forall x(Kxa \rightarrow Fx)$$

§ 11.8. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (4).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 11.9. CUARTO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNIVERSAL CONDICIONAL

A continuación, nos proponemos formalizar la proposición :

$$\text{“\textit{Todos los planetas son esféricos y giran sobre su eje}”.} \tag{5}$$

En este caso, la tabla de convenciones podría ser:

F : *ser un planeta*

G : *ser esférico*

H : *girar sobre su eje*

Y basándonos en esta tabla de convenciones, formalizamos (5) mediante:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx \wedge Hx)$$

§ 11.10. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (5).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 11.11. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE NEGACIÓN DE UNIVERSAL CONDICIONAL

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"No todos los coches son blancos". (6)

Evidentemente, esta es la negación de la proposición:

"Todos los coches son blancos"

Ahora bien, en **§ 11.5** ya vimos cómo formalizar proposiciones de este tipo.

Por consiguiente, lo que tenemos que hacer ahora es anteponer una negación al tipo de fórmula que vimos en **§ 11.5** .

Así pues, procedemos a establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser un coche*

G : *ser blanco*

Y a continuación, aplicando dicha tabla y teniendo en cuenta que hay negar la fórmula que vimos en **§ 11.5** , es claro que la formalización correcta de (6) será:

$$\neg\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$$

§ 11.12. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (6).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 11.13. TERCER EJEMPLO DE CORRELACIÓN ENTRE COMBINACIONES COMPLEJAS DE CUANTIFICACIÓN Y NEGACION

Nótese la correlación entre (6) y :

"Hay coches que no son blancos". (7)

Evidentemente, ambas proposiciones son lógicamente equivalentes, porque no puede ser verdadera la una sin la otra.

Sin embargo, la formalización de (7) es distinta:

$$\exists x\,(Fx \wedge \neg Gx)$$

Así lo vimos en **§ 10.6** (con otro número de orden, pero bajo la misma tabla de convenciones simbólicas que acabamos de estipular para (6)).

Por consiguiente, (6) y (7) son *proposiciones distintas*, y no una mera variante estilística una de otra. De hecho, su estructura lógica es distinta, como se aprecia en las distintas formalizaciones de cada una.

Paralelamente,

$$\neg\forall x\,(Fx \wedge Gx) \qquad \text{y} \qquad \exists x\,(Fx \wedge \neg Gx)$$

son fórmulas distintas, aunque sean lógicamente equivalentes, como veremos en **§ ??** .

§ 11.14. CUESTIONES

1. Inspirándote en la correlación entre (6) y (7), indica una proposición que tenga el mismo tipo de correlación con el ejemplo que has puesto en **§ 11.12** .
2. Formaliza la proposición que acabas de indicar.

§ 11.15. CUARTO EJEMPLO DE CORRELACIÓN ENTRE COMBINACIONES COMPLEJAS DE CUANTIFICACIÓN Y NEGACION

También es interesante hacer notar la correlación entre:

"Todos los cuervos son negros". (8)

y:

"No hay ningún cuervo que no sea negro". (9)

Evidentemente, (8) y (9) son proposiciones distintas (no son meras variantes estilísticas). Pero son lógicamente equivalentes, porque no puede ser verdadera la una sin la otra.

Para la formalización de estas dos proposiciones, podemos utilizar la siguiente tabla:

$$F \;:\; \textit{ser un cuervo}$$

$$G \;:\; \textit{ser negro}$$

A continuación, la formalización de (8) está clara, porque hemos visto muchos ejemplos de ello (en **§ 11.5** , sin ir más lejos):

"Todos los cuervos son negros" : $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$

Y la formalización de (9), por su parte, la vimos en **§ 10.12** :

"No hay ningún cuervo que no sea negro" : $\neg\exists x\,(Fx \wedge \neg Gx)$

En **§ ??** demostraremos que también estas dos fórmulas son lógicamente equivalentes.

§ 11.16. CUESTIONES

1. Indica una proposición que sea similar a (8) y otra que sea similar a (9).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para las mismas.
3. Indica cómo formalizar dichas proposiciones, a partir de la tabla señalada.

§ 11.17. CORRELACIÓN DE HEMPEL

Para nuestra última correlación, vamos a abordar la formalización de:

"Todo lo que es no-negro es no-cuervo". (10)

Nótese que (10) es otra forma de decir::

"Dada cualquier cosa, si no es negra entonces no es un cuervo". (11)

En efecto, (10) y (11) son variantes estilísticas de la misma proposición.

Por consiguiente, aplicando la tabla de convenciones que acabamos de dar, estas dos proposiciones se han de formalizar de la misma manera:

$$\forall x\,(\neg Gx \to \neg Fx)$$

Por otra parte, (8) no es una variante estilística de (10), pero sí es lógicamente equivalente a ella.

Y lo mismo ocurre con sus formulaciones respectivas (es decir, con las fómrulas que corresponden a (8) y a (10), bajo la tabla de convenciones que estamos manejando):

$$\forall x\,(Fx \to Gx) \qquad\qquad \forall x\,(\neg Gx \to \neg Fx)$$

Estas dos fórmulas son lógicamente equivalentes, como demostraremos en § **??** .

La equivalencia lógica entre las proposiciones (8) y (10) da lugar a la llamada *"Paradoja de Hempel"*. Tal paradoja pertenece la teoría de la confirmación, y se estudia en Filosofía de la ciencia.

§ 11.18. CUESTIONES

1. Indica una proposición que sea similar a (8) y otra que sea similar a (10).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para las mismas.
3. Indica cómo formalizar dichas proposiciones, a partir de la tabla señalada.
4. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
   b) Qué es lo que más te ha costado entender.
   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 12

Combinaciones de existenciales y universales

§ 12.1. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE EXISTENCIALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

$$\text{“\textit{Hay una cosa que es causa de otra}”.} \tag{1}$$

En este caso, antes de establecer la tabla de convenciones simbólicas, tenemos que darnos cuenta de que la relación *ser causa de* conecta dos objetos: por un lado, la causa; y por otro lado, aquello que es causado (es decir, el efecto).

Por consiguiente, para formalizar dicha relación, necesitaremos un simpred binario, como por ejemplo K .

Por consiguiente, la tabla de convenciones para (1) sería sencillamente:

$$K \quad : \quad \textit{ser causa de}$$

A partir de aquí, es fácil darse cuenta de que (1) es una afirmación *doblemente existencial*. En efecto, (1) nos dice, por un lado, que existe una cosa que es la causa; pero también nos dice, por otro lado, que existe otra cosa que es causada por la primera (es decir, el efecto de la primera).

Por consiguiente, para formalizar (1) necesitaremos utilizar una combinación de dos cuantificadores existenciales, cada uno con su propia variable de cuantificación. Y si cogemos x e y como variables en ese orden, el resultado será:

$$\exists x\,\exists y\,Kxy$$

§ 12.2. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE EXISTENCIALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Algo se parece a algo". (2)

En este caso, la relación relevante (*ser parecido a*) también involucra dos objetos. Por consiguiente, para formalizar esta relación también necesitamos un simpred binario, como puede ser el mismo K.

Así pues, una tabla de convenciones para (2) sería:

K : *ser parecido a*

Por otra parte, también es claro que (2) afirma la existencia de dos cosas, tales que una se parece a la otra.

Por consiguiente, la formalización de (2) también exigirá una combinación de dos cuantificadores existenciales, como en el caso anterior. Y por lo tanto, el resultado podría ser:

$$\exists x\, \exists y\, Kxy$$

§ 12.3. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (1) y (2).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 12.4. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE UNIVERSALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Todo se parece a todo". (3)

Vamos a proceder a formalizar (3), independientemente de que la consideremos verdadera o falsa.

Para ello, es obvio que podemos usar la misma tabla de convenciones que acabamos de usar para (2).

Ahora bien, en este caso no afirmamos que *haya dos objetos* tales que uno se parezca al otro. En este caso, lo que afirmamos es que *cualesquiera dos objetos* se parecen entre sí.

Por lo tanto, lo que necesitamos aquí es una pareja de cuantificadores universales, cada uno con su propia variable de cuantificación. Y en definitiva, el resultado podría ser:

$$\forall x\,\forall y\,Kxy$$

§ 12.5. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE UNIVERSALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Todo está conectado con todo". (4)

Aquí también procederemos a la formalización, sin preocuparnos por si la proposición en cuestión es verdadera o falsa.

En este caso, necesitamos una nueva tabla de convenciones, como por ejemplo:

K : *está conectado con*

Y a partir de aquí, es claro que podemos formalizar (4) mediante:

$$\forall x\,\forall y\,Kxy$$

§ 12.6. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3) y (4).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 12.7. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE EXISTENCIALES Y UNIVERSALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Todo está conectado con algo". (5)

Obviamente, en este caso nos vale la misma tabla de convenciones del caso anterior. Pero la formalización será algo más complicada.

En efecto, lo que viene a decir (5) es que dada cualquier cosa, existe otra cosa con la que la primera cosa está conectada.

Por consiguiente, ello involucra una afirmación universal (*"para cualquier cosa, sucede que ..."*), conjuntamente con una afirmación existencial (*"... existe otra cosa, con la cual la primera cosa está conectada"*).

Esto sugiere que utilicemos un cuantificador universal, y a continuación un cuantificador existencial, cada uno con una variable distinta. Pues bien, cogiendo las variables x e y en ese orden, como venimos haciendo, el resultado será:

$$\forall x\, \exists y\, Kxy$$

§ 12.8. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (5).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.

3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 12.9. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE EXISTENCIALES Y UNIVERSALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay algo que está conectado con todo". (6)

Evidentemente, (5) y (6) son muy distintas. Lo que dice (6) es que existe una cosa que se encuentra conectada con cualquier otra cosa.

Por consiguiente, en (6) también tenemos una afirmación universal y una afirmación existencial, pero están combinadas en orden inverso.

En efecto, aquí aparece en primer lugar la afirmación existencial (*"existe una cosa tal que . . . "*), y a continuación aparece la afirmación universal (*". . . está conectada con cualquier otra cosa*).

Esto sugiere que coloquemos primero el cuantificador existencial, y a continuación el universal. Y el resultado sería:

$$\exists x\, \forall y\, Kxy$$

§ 12.10. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (6).

2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 12.11. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE EXISTENCIALES Y UNIVERSALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Cualquier violoncelista toca alguna pieza". (7)

Aquí también tenemos una combinación de universal y existencial, pero un poco más compleja que en los casos anteriores.

En particular, (7) viene a decir que, dada cualquier cosa, si esa cosa es violoncelista, entonces existe otra cosa que es una pieza musical, y que es interpretada por la primera cosa.

Por consiguiente, para formalizar (7) necesitaremos:

- un simpred monario que represente la propiedad de *ser violoncelista*;
- otro simpred monario, que represente la propiedad de *ser una pieza musical*;
- un simpred binario que represente la relación de *tocar* (es decir, *interpretar*, o *ejecutar musicalmente*):

En definitiva, nuestra tabla de convenciones simbólicas podría ser la siguiente:

$$F \; : \; \textit{ser violoncelista}$$

$$G \; : \; \textit{ser una pieza musical}$$

$$K \; : \; \textit{ejecutar musicalmente}$$

Y a partir de aquí, razonamos como sigue.

La primera afirmación contenida en (7) es una afirmación universal, que nos habla de *cualquier violoncelista.*

Por lo tanto, la formalización de (7) deberá empezar con un cuantificador universal, por ejemplo sobre la variable x. Mediante ese cuantificador, enunciaremos que *"si el objeto equis es violoncelista, entonces . . . "*:

$$\forall x\,(\,Fx \;\rightarrow\; \ldots$$

Nótese que esto **no es una fórmula**, sino un fragmento de fórmula, que tendremos que completar a continuación con alguna otra cosa.

Pues bien, a continuación tenemos que expresar que existe una pieza musical, la cual el objeto equis toca. Para ello, deberemos usar el cuantificador existencial sobre una nueva variable (por ejemplo, y). Y a continuación, expresaremos que ese segundo objeto es una pieza musical, y que el objeto equis la interpreta:

$$\ldots\; \exists y\,(\,Gy \;\wedge\; Kxy\,)$$

Por último, el resultado de juntar esos dos fragmentos, es justamente la fórmula que buscamos como formalización de (7):

$$\forall x\,(\,Fx \;\rightarrow\; \exists y\,(\,Gy \;\wedge\; Kxy\,)\,)$$

§ 12.12. CUARTO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE EXISTENCIALES Y UNIVERSALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay una pieza que cualquier violoncelista toca". (8)

Nótese la diferencia entre esta proposición y la anterior. Es obvio que cualquier violoncelista toca alguna pieza (si alguien no toca nada al violoncelo, entonces no se le puede llamar "violoncelista").

Sin embargo, es mucho menos obvio que exista una pieza musical de la que se pueda decir que cualquier violoncelista la toca. Quizá sea verdad del Preludio de la *1ª Suite para violoncelo solo* de Bach. (Yo diría que, actualmente, cualquier violoncelista profesional del mundo ha tocado esa pieza.)

Pero en cualquier caso, en esta asignatura no nos interesa si existe o no tal pieza — esto es, no nos interesa si (8) es verdad o no. Lo que nos interesa es la estructura lógica de (8), y su diferencia con (7).

Pues bien, vamos a partir de la misma tabla de convenciones anterior, y vamos a proceder a razonar cuál será la formalización correcta de (8), paso por paso.

Para empezar, aquí también tenemos una combinación de afirmación universal y afirmación existencial, al igual que en (7), pero en esta ocasión aparecen en el orden inverso: primero va la afirmación existencial, y luego la universal.

Por consiguiente, la fórmula que buscamos ahora comenzará con un cuantificador existencial, digamos sobre la variable x, y a continuación expresará que ese objeto *equis* es una pieza musical:

$$\exists x\,(\,Gx\ \ldots$$

Nuevamente enfatizamos que **la expresión precedente no es una fórmula**, sino un fragmento incompleto, que tendremos que continuar de alguna manera hasta formar una fórmula.

Pues bien, lo que necesitamos a continuación es enunciar que, además de que el objeto equis es una pieza musical, sucede que para cualquier otro objeto, si ese objeto es violoncelista, entonces interpreta la pieza equis.

Para conseguir esto, empezaremos por poner una conjunción, a fin de unir el fragmento anterior con lo que viene después.

Y a continuación de dicha conjunción, colocaremos un cuantificador universal, en una nueva variable (por ejemplo, la variable y), y expresaremos mediante un condicional, que si ese otro objeto es violoncelista, entonces interpreta la pieza equis.

El resultado de todo esto será el siguiente fragmento de fórmula:

$$\ldots\ \wedge\ \forall y\,(\,Fy\ \rightarrow\ Kyx\,)$$

Y por último, uniendo los dos fragmentos (y cerrando con un paréntesis final), tendremos la formalización correcta de (8), a saber:

$$\exists x\,(\,Gx\ \wedge\ \forall y\,(\,Fy\ \rightarrow\ Kyx\,)\,)$$

§ 12.13. COMPARACIÓN ENTRE EL TERCER Y CUARTO EJEMPLO DE COMBINACIONES ENTRE EXISTENCIALES Y UNIVERSALES

Nótese la diferencia, en conjunto, entre las formalizaciones de (7) y (8):

$$\forall x\,(\,Fx \rightarrow \exists y\,(\,Gy \wedge Kxy\,)\,)$$

$$\exists x\,(\,Gx \wedge \forall y\,(\,Fy \rightarrow Kyx\,)\,)$$

Como vemos, los cuantificadores ($\forall$ y $\exists$) aparecen en distinto orden en una fórmula y otra. Además, también las conectivas ($\rightarrow$ y $\wedge$) aparecen en orden distinto.

Y en cuanto a las variables, aparecen en el mismo orden (primero x y después y), pero su rol cambia en un caso y en otro. En efecto, en la formalización de (7), la variable x representa le violoncelista y la variable y representa la pieza musical. Mientras que en la formalización de (8), la variable x representa la pieza, e y representa le violoncelista.

También sería válido colocar las variables x e y en (8) en orden inverso, siempre que lo hiciéramos de manera coherente. El resultado sería el siguiente, que también vale como formalización correcta de (8):

$$\exists y\,(\,Gy \wedge \forall x(Fx \rightarrow Kxy)\,)$$

§ 12.14. CUESTIONES

1. Indica una proposición que sea similar a (7) y otra que sea similar a (8).

2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para las mismas.
3. Indica cómo formalizar dichas proposiciones, a partir de la tabla señalada.
4. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
   b) Qué es lo que más te ha costado entender.
   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 13

Existenciales numéricos

§ 13.1. ABREVIATURA DE UNICIDAD

En este momento, resulta conveniente introducir una nueva **abreviatura especial** para ciertas fórmulas de lenpred, al estilo de la abreviatura que introdujimos en **§ 7.2** .

Sea $\exists v A(v)$ una fórmula de cuantificación existencial, formada de acuerdo con la cláusula (7) de **§ 7.1** .

En **§ 7.12** explicamos que una fórmula de cuantificación existencial como

$$\exists v A(v)$$

se utiliza para formalizar proposiciones que afirman la existencia de **al menos un objeto** de ciertas características.

También prometimos que más adelante explicaríamos cómo formalizar aquellas proposiciones que afirman la existencia de **exactamente un objeto** de las características que sean.

Pues bien, ha llegado el momento de abordar esa tarea. Y para ello, vamos a introducir una nueva **abreviatura especial**, al estilo de la que introdujimos en **§ 7.2** , con la diferencia de aquella concernía la igualdad negada, y esta concierne cierto tipo de cuantificación existencial.

En efecto, sea $\exists v A(v)$ una fórmula de cuantificación existencial, formada de acuerdo con la cláusula (7) de **§ 7.1** .

Pues bien, vamos a abreviar como $\exists_1 v A(v)$ aquella fórmula que consiste en combinar la cuantificación existencial con una cuantificación universal que viene a decir que si A se puede aplicar a otra variable w , entonces esa variable tiene el mismo valor que v .

Por consiguiente:

$\exists_1 v A(v)$ se define como una abreviatura de:

$$\exists_1 v\,(\,A(v)\ \wedge\ \forall w\,(\,A(w)\ \rightarrow\ w = v\,)\,)$$

A esta abreviatura la llamaremos **"abreviatura de unicidad"**, y nos referiremos a $\exists_1$ como el **"primer cuantificador existencial numérico"**.

A continuación, vamos a ver cómo funciona esta abreviatura en la práctica, a través de varios ejemplos.

§ 13.2. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN DE EXISTENCIALES CON UNICIDAD

Para empezar, vamos a abordar la formalización de la proposición:

"Hay una cosa, y solo una, que es realmente interesante". (1)

Como en ocasiones anteriores, aquí solo vamos a atender a la formalización lógica de esta proposición. Por consiguiente, no discutiremos si (1) verdadera o falsa, ni tampoco elucubraremos sobre qué cosa podría ser la única "realmente interesante", si es que tal cosa existiera.

Tampoco investigaremos el significado de *"ser realmente interesante"*, por oposición a *"ser interesante"* a secas.

En cualquier caso, resulta obvio que para formalizar dicha propiedad, cualquiera que sea su significado, necesitamos un simpred monario. Con lo cual, la tabla de convenciones nos podría quedar sencillamente de la manera siguiente:

F : *ser realmente interesante*

A partir de aquí, tenemos que expresar que hay una cosa *equis* que tiene la propiedad de *ser realmente interesante*, y que para cualquier otra cosa, si también tiene esa propiedad, entonces es idéntica a *equis*.

Y de ese modo, estaremos diciendo que hay una cosa, y solo una, que es realmente interesante:

$$\exists x\,(\,Fx\;\wedge\;(\forall y\,(\,Fy\;\rightarrow\;y = x\,)\,) \tag{2}$$

Esta es, pues, una formalización correcta de (1).

Ahora bien, salta a la vista que la fórmula (2) encaja a la perfección en la abreviatura que acabamos de introducir, por lo que podemos acortar dicha fórmula poniendo sencillamente:

$$\exists_1 xFx$$

§ 13.3. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (1).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición a partir de la tabla señalada, sin utilizar la abreviatura de unicidad.
4. Indica cómo abreviar la fórmula que acabas de dar, mediante la abreviatura de unicidad.

§ 13.4. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN DE EXISTENCIALES CON UNICIDAD

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición:

"La Tierra tiene un único satélite natural". (3)

En este caso, necesitaremos una tabla de convenciones simbólicas como la siguiente:

a : la Tierra

K : *ser satélite natural de*

De manera análoga al caso anterior, aquí también queremos que existe un objeto *equis* que es satélite natural de la Tierra, y que cualquier otro objeto que sea satélite natural de la Tierra ha de ser idéntico a *equis*:

$$\exists x\,(\,Kxa \,\wedge\, \forall y\,(\,Kya \,\rightarrow\, y = x\,)\,)$$

Esta sería una formalización correcta de (3).

Ahora bien, esta fórmula también se puede acortar mediante la abreviatura de unicidad, obteniendo como resultado:

$$\exists_1 x Kxa$$

§ 13.5. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición a partir de la tabla señalada, sin utilizar la abreviatura de unicidad.
4. Indica cómo abreviar la fórmula que acabas de dar, mediante la abreviatura de unicidad.

§ 13.6. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIALES DE LA FORMA "AL MENOS DOS"

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición:

"Marte tiene al menos dos satélites naturales". (4)

Como venimos diciendo, no nos interesamos por explorar la verdad o falsedad de las proposiciones que nos proponemos formalizar. Lo único que queremos es analizar su estructura lógica, para asignarles la fórmula de lenpred que mejor las represente. No obstante, por curiosidad, diremos que Marte tiene exactamente dos satélites naturales.

Pues bien, el caso es que para formalizar (4), necesitaremos una tabla de convenciones simbólicas como la siguiente:

a : Marte

K : *ser satélite natural de*

Por otra parte, lo que (4) afirma es que existen al menos dos objetos distintos que son satélites de Marte.

Por consiguiente, para formalizar esta proposición, tendremos que utilizar una doble cuantificación existencial, con dos variables distintas, y a continuación añadir la condición de que cada variable corresponde a un objeto distinto, y ambas corresponden a un satélite de Marte.

El resultado sería, pues:

$$\exists x\, \exists y\, (\, Kxa \,\wedge\, Kya \,\wedge\, x \neq y\,) \tag{5}$$

§ 13.7. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (4).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 13.8. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIALES DE LA FORMA "COMO MUCHO DOS"

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición:

"Marte tiene como mucho dos satélites naturales". (6)

Lo que (6) afirma es que no existen tres objetos distintos que sean satélites naturales de Marte.

Por consiguiente, para formalizar esta proposición, podemos poner sencillamente:

$$\neg\,\exists x\;\exists y\,\exists z\,(\,Kxa\;\wedge\;Kya\;\wedge\;Kza\;\wedge\;x\neq y\;\wedge\;x\neq z\;\wedge\;y\neq z\,) \tag{7}$$

§ 13.9. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (6).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 13.10. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIALES DE LA FORMA "EXACTAMENTE DOS"

Por último, supongamos que queremos formalizar la proposición:

"Marte tiene exactamente dos satélites naturales". (8)

Pues bien, es obvio que (8) equivale a la afirmación conjunta de (4) y (6).

Por consiguiente, para formalizar (8) basta con poner en conjunción las fórmulas (5) y (7), o bien, de forma algo más elegante:

$$\exists x\, \exists y\, (\, Kxa \wedge Kya \wedge x \neq y \wedge \forall z (Kza \rightarrow z = x \vee z = y)\,) \tag{9}$$

La fórmula (9) se puede utilizar para introducir un segundo cuantificador existencial numérico ($\exists_2$), y se podría continuar la serie en otros similares ($\exists_3$, etc), pero aquí no vamos a hacer uso de ellos.

§ 13.11. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (8).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.
4. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
   b) Qué es lo que más te ha costado entender.
   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 14

Descripciones definidas y presuposición – Intensión y extensión

§ 14.1. LAS DESCRIPCIONES DEFINIDAS Y LA PRESUPOSICIÓN

A continuación, vamos a abordar la formalización de la proposición:

$$\text{“\textit{La catedral de Murcia es barroca}”.} \qquad (1)$$

Para ello tenemos que realizar otro *excursus* previo. En esta ocasión, trataremos acerca de las **descripciones definidas**, de las que ya hablamos brevemente en **§ 2.11** y **§ 5.11** .

En efecto, la expresión *“la catedral de Murcia”* es una *descripción definida.* Y el uso de este tipo de expresiones en el lenguaje natural **presupone** que la descripción en cuestión denota un único objeto (es decir, que existe un objeto denotado por dicha descripción, y que además es único).

A dicho requisito le llamamos **“condición de existencia y unicidad”**. La *condición de existencia* exige que haya un objeto que satisfaga la descripción en cuestión. Y la *condición de unicidad* exige que dicho objeto sea único (es decir, que solo haya un objeto que satisfaga dicha descripción).

La **presuposición** es un recurso perteneciente a la **pragmática** del lenguaje natural, y se estudia en *Filosofía del lenguaje*.

§ 14.2. DESCRIPCIONES DEFINIDAS VACÍAS O CON REFERENCIA MÚLTIPLE

La presuposición tiene la consecuencia de que, **en el caso en que una descripción definida no denote ningún objeto, o denote más de uno, el enunciado resultante carece de valor de verdad**.

Así por ejemplo, el enunciado

"La catedral de Alcantarilla es barroca"

carece de valor de verdad (no es verdadero ni falso) por la sencilla razón de que no hay catedral en Alcantarilla.

Del mismo modo, el enunciado

"La catedral de Londres es barroca"

también carece de valor de verdad, porque en Londres no hay una catedral, sino 18.

§ 14.3. CUESTIONES

1. Explica con tus propias palabras qué es la presuposición, en relación con las descripciones definidas.

2. Pon un ejemplo de enunciado similar a (1), que tenga sentido pleno, e indica si es verdadero o falso.
3. Pon un ejemplo de enunciado que contenga una descripción definida que no denote ningún objeto.
4. Indica si el enunciado precedente es verdadero o falso.
5. Pon un ejemplo de enunciado que contenga una descripción definida que denote más de un objeto.
6. Indica si el enunciado precedente es verdadero o falso.

§ 14.4. LA PRESUPOSICIÓN Y LA FORMALIZACIÓN DE ENUNCIADOS EN LENPRED

En logpred no hay nada parecido a la presuposición. De hecho, logpred carece totalmente de recursos pragmáticos.

Además, como veremos en **§ 16.8** y **§ ??**, logpred es bivalente, al igual que logprop, y ello significa que no puede haber una fórmula que no sea ni verdadera ni falsa bajo una interpretación.

Todo ello nos obliga a formalizar (1) mediante un artificio, que consiste en incorporar la condición de existencia y unicidad a la propia fórmula, como si la proposición incluyera la *afirmación* de la condición de existencia y unicidad, en lugar de simplemente *presuponerla*. Vamos a verlo.

§ 14.5. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN CON DESCRIPCIONES DEFINIDAS

El primer paso para abordar la formalización de (1) es establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas. Tal tabla podría ser, por ejemplo:

$$a \ : \ \text{Murcia}$$

$$F \ : \ \textit{ser barroca}$$

$$K \ : \ \textit{ser catedral de}$$

Pues bien, a partir de aquí, procedemos a formalizar que hay una catedral de Murcia y solo una, (es decir, la condición de existencia y unicidad). Y a continuación, añadimos la referencia a ser barroca.

El resultado sería, por ejemplo, la fórmula:

$$\exists x\,(\,Kxa \land \forall y(Kya \rightarrow y = x) \land Fx\,) \tag{2}$$

Lo que esta fórmula viene a decir, bajo la tabla de convenciones simbólica indicada, es que hay un objeto *equis* que es catedral de Murcia, que cualquier otro objeto que sea catedral de Murcia coincide con *equis*, y que además *equis* es barroco.

En consecuencia, la fórmula que acabamos de dar (interpretada bajo esa tabla de convenciones) sería falsa si la catedral de Murcia no fuera barroca, pero también sería falsa si Murcia no tuviera catedral, o si tuviera más de una.

§ 14.6. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (1).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 14.7. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN CON DESCRIPCIONES DEFINIDAS

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición:

$$\text{“\textit{La capital de España es Madrid}”.} \tag{3}$$

El primer paso consiste en establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

$$\begin{array}{rcl} a & : & \text{España} \\ b & : & \text{Madrid} \\ K & : & \textit{ser capital de} \end{array}$$

Aquí también tenemos una descripción definida: *“la capital de España”*. Pero en este caso, lo que decimos del objeto así descrito es que coincide con Madrid (esto es, que coincide con el objeto nombrado por ese nombre propio).

Por lo tanto, la fórmula que buscamos tendrá que expresar que hay una y solo una capital de España (es decir, la condición de existencia y unicidad); y a continuación, tendrá que expresar que dicho objeto es justamente Madrid.

El resultado sería, por ejemplo, la fórmula:

$$\exists x\,(\,Kxa\ \wedge\ \forall y(Kya \rightarrow y = x)\ \wedge x = b\,)$$

Lo que esta fórmula viene a decir, leída bajo la tabla de convenciones simbólica indicada, es que hay un objeto *equis* que es capital de España, que cualquier otro objeto que sea capital de España coincide con *equis*, y que además *equis* es idéntico a Madrid.

§ 14.8. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 14.9. LAS DESCRIPCIONES DEFINIDAS Y EL PRIMER CUANTIFICADOR NUMÉRICO

Sería un error aplicar la abreviatura de unicidad (es decir, el primer cuantificador numérico) a la formalización de descripciones definidas.

En efecto, la fórmula

$$\exists_1 x\,(\,Kxa\ \wedge\ Fx\,)$$

leída bajo la tabla de convenciones de **§ 14.5** , viene a decir que hay un único objeto que cumple con las dos condiciones de ser la catedral de Murcia y ser barroco. En otras palabras, tal fórmula viene a decir que:

Hay solo una catedral de Murcia que es barroca

Pero esto se aleja del enunciado (1) aún más que la fórmula (2).

Así por ejemplo, resulta que de las 18 catedrales de Londres, solo una es barroca (*Saint Paul*). Por tanto, podemos afirmar acertadamente que

"Hay solo una catedral de Londres que es barroca" (4)

Pero esa afirmación no equivale a decir:

"La catedral de Londres es barroca" (5)

En efecto, el enunciado (4) es verdadero, mientras que (5) es *carente de sentido*, al incumplirse la condición de unicidad.

§ 14.10. INTENSIÓN Y EXTENSIÓN

La **intensión** de un predicado lingüístico es su contenido semántico o cognitivo, es decir, la idea que expresa.

Por su parte, la **extensión** es el conjunto de objetos que satisface ese predicado en un momento dado.

Como eslogan a recordar, podemos poner:

**La intensión es una explicación,
la extensión es un listado.**

Así por ejemplo, la intensión del predicado *"océano"* es el concepto de *ser un océano*, es decir, una gran masa de agua salada que separa los continentes de la Tierra. Mientras que la extensión de dicho predicado, a fecha actual, es el conjunto de océanos que hay en este momento: Atlántico, Pacífico, Índico, Ártico y Antártico.

Obviamente, la extensión de un predicado puede cambiar con el tiempo. Así por ejemplo, hace 300 millones de años solo había un océano en la Tierra (*Panthalassa*), porque solo había un continente (*Pangea*).

La diferencia entre intensión y extensión también se estudia en *Filosofía del lenguaje*, pero no concierne a la pragmática sino a la **semántica** del lenguaje (es decir, al estudio del significado lingüístico).

§ 14.11. MÁS EJEMPLOS DE INTENSIÓN VERSUS EXTENSIÓN

Yo puedo intentar explicar

Las características de las películas que más me gustan. (6)

Pero también puedo dar, directamente un

Listado de mis películas favoritas. (7)

(6) es intensional, porque apela a un *contenido semántico* (es decir, a un *significado*, una *idea*); mientras que (7) es extensional, porque apela sencillamente a un *conjunto de objetos.*

Del mismo modo, alguien puede intentar explicar cómo diferenciamos en Murcia entre un *pueblo* y una *ciudad*. Pero también puede, alternativamente, dar un listado diferenciado de los pueblos y las ciudades de la Región de Murcia.

Pues bien, la primera explicación será intensional, porque apela a las ideas de *pueblo* y *ciudad*, que hay que tratar de entender o captar. Mientras que el listado de pueblos y ciudades es extensional, porque no hay nada que entender — simplemente identificar qué poblaciones aparecen clasificadas bajo una categoría u otra.

Por último, una explicación de lo que es la *admiración*, en abstracto, es un intento de caracterizar su *intensión*. Mientras que un listado de personas en el que se especifica quién admira a quién, es un intento de caracterizar la *extensión* de ese mismo predicado.

§ 14.12. CUESTIONES

1. Explica con tus propias palabras la distinción entre intensión y extensión.
2. Reproduce literalmente el eslogan recuadrado en **§ 14.10** (es conveniente que lo memorices para el control correspondiente a este tema).
3. Pon un ejemplo de intensión y extensión de un mismo predicado.
4. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
    a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
    b) Qué es lo que más te ha costado entender.
    c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.

d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 15

Semántica formal – Conjuntos y subconjuntos

§ 15.1. LA SEMÁNTICA FORMAL DE PRIMER ORDEN CLÁSICA

Como explicamos en logfor1, la formalización es útil para analizar la estructura lógica de las proposiciones del lenguaje natural, pero tiene importantes limitaciones: es una herramienta asistemática, presenta importantes desajustes con el lenguaje natural, y en definitiva, resulta demasiado imprevisible y resbaladiza.

Uno de los grandes problemas de la formalización es que utiliza categorías de carácter intensional, es decir, que refieren a una comprensión intuitiva de los conceptos utilizados.

Pues bien, la lógica nos ofrece una herramienta mucho más sencilla y pulida para interpretar las fórmulas de lenpred, que es puramente extensional — es decir, que refiere únicamente a objetos y conjuntos de objetos.

A dicha herramienta la llamaremos **"semántica formal de pri-**

mer orden clásica" (abreviadamente, **"semprim"**). Semprim es el correlato de la *semántica vf* que estudiamos en logofor1, pero adaptada a nuestro nuevo lenguaje.

De hecho, también la semántica vf era puramente extensional, dado que la interpretación de cada fórmula era un simple objeto (un valor de verdad: $\mathbb{V}$ o $\mathbb{F}$), en lugar de referir a una idea o significado cognitivo más complejo.

§ 15.2. CONJUNTOS DE OBJETOS

La noción de **conjunto de objetos** desempeña un papel muy importante en semprim. Tanto es así, que para estar en condiciones de definir esta semántica, vamos a necesitar instruirnos previamente en una herramienta auxiliar, cuyo nombre es, precisamente, **"teoría de conjuntos"**.

Cuando decimos **"conjunto"**, nos referimos a **cualquier colección de personas, animales o cosas, concretas o abstractas**. Y lo primero que hacemos, en este punto, es retomar lo que dijimos en la sección §8.4 de logfor1, que conviene releer ahora con atención, para tenerla bien fresca en la cabeza.

Pues bien, a lo que dijimos allí, empezamos por añadir ahora que un conjunto puede tener elementos heterogéneos.

Por ejemplo, podemos formar un conjunto de tres elementos, con *la violoncelista Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives* y *el número* π (este número se define como la proporción entre la longitud de la circunferencia y su diámetro). En principio, no parece haber ninguna característica que estos tres objetos tengan en común, pero eso no nos impide formar un conjunto con ellos.

§ 15.3. CUESTIONES

Pon un ejemplo de conjunto de objetos heterogénos, en el que haya objetos materiales y objetos abstractos, sin ninguna conexión aparente.

§ 15.4. EL CONJUNTO VACÍO

A continuación, supongamos que cogemos una caja de zapatos, sacamos los zapatos que contiene, y nos quedamos con la caja vacía. Lo que tenemos es una caja vacía, pero por ello no deja de ser una caja de zapatos.

Pues bien, los **conjuntos vacíos** son como cajas de zapatos vacías, en el sentido que vamos a explicar a continuación.

El planeta Marte tiene dos satélites, Fobos y Deimos. Por lo tanto, usando la notación que aprendimos en la sección §8.4 de logfor1, podemos poner:

$$\text{Conjunto de satélites de Marte: } \{\,\text{Fobos}\,,\,\text{Deimos}\,\}$$

Sin embargo, el planeta Venus no tiene satélites. Por consiguiente, el *conjunto de satélites de Venus* no tiene elementos (no hay ningún objeto que pertenezca a dicho conjunto). Y por esta razón decimos que el conjunto de satélites de Venus es un "conjunto vacío".

Otro tanto ocurre con el *conjunto de los caballos que vuelan.* Este conjunto no tiene elementos, porque no hay ningún caballo capaz de volar. Por consiguiente, el conjunto de caballos que vuelan está tan vacío como el conjunto de satélites de Venus.

Todos los conjuntos vacíos se parecen en algo fundamental: no tienen elementos. Y por ello vamos a tratar a todos los conjuntos vacíos como si fueran uno solo, e incluso les vamos a dar un mismo nombre: "$\varnothing$".

§ 15.5. CUESTIONES

Pon un ejemplo de conjunto vacío.

§ 15.6. CONJUNTOS Y SUBCONJUNTOS

Dados dos conjuntos D y E, decimos que "D **es un subconjunto de** E" (o que "D **está incluido en** E"), cuando sucede que todos los elementos de D son elementos de E. Esto lo abreviamos diciendo que "D **es un subcjto de** E, o poniendo:

$$D \subseteq E$$

Así por ejemplo, si D_1 es el conjunto de provincias de Andalucía, y D_2 es el conjunto de provincias de España, entonces es obvio que D_1 es un subconjunto de D_2. Y por lo tanto, ponemos:

$$D_1 \subseteq D_2$$

o lo que es lo mismo,

$$\{\text{provincias de Andalucía}\} \subseteq \{\text{provincias de España}\}$$

A continuación, sea $2\mathbb{N}$ el conjunto de los naturales pares, es decir:

$$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Pues bien, este conjunto está obviamente incluido en el conjunto de los números naturales (o dicho de otro modo, es un subconjunto suyo). Por lo tanto, ponemos:

$$2\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$$

Un último ejemplo nos lo proporciona el conjunto formado por Quijote y Sancho, los dos principales protagonistas de *El Quijote*. Obviamente, este conjunto está incluido en el conjunto de todos los personajes de *El Quijote* (es decir, es un subconjunto suyo). Por lo tanto, ponemos:

$$\{\,\text{Quijote}\,,\text{Sancho}\,\} \subseteq \{\,\text{personajes de } \textit{El Quijote}\,\}$$

§ 15.7. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de conjunto, al cual denominarás "E_2".
2. Pon un ejemplo de conjunto que esté incluido en E_2, y denomínalo "E_1".

§ 15.8. PERTENENCIA E INCLUSIÓN

Es importante advertir la diferencia que existe la noción de **inclusión** ($\subseteq$), que acabamos de definir, y la noción de **pertenencia** ($\in$), que introdujimos en el Tema 8 de logfor1.

La *pertenencia* es la conexión que existe entre un elemento y un conjunto al que pertenece.

Así por ejemplo, el conjunto de provincias de España (D_2) consta de 50 elementos: Albacete, Alicante, Almería, Asturias, etc. Y de cada una de estas provincias, decimos que **"pertenece"** al conjunto D_2, lo cual señalizamos mediante el símbolo "$\in$":

Albacete $\in D_2$ Alicante $\in D_2$ Almería $\in D_2$ ...

Por su parte, la *inclusión* es una relación entre que se da entre dos conjuntos, cuando el primero es un subconjunto del segundo (es decir, cuando ocurre que todos los elementos del primero son elementos del segundo). Esto es algo muy distinto a lo anterior.

Por ejemplo, el conjunto de provincias de Andalucía (D_1) está incluido en el conjunto de provincias de España, porque todas las provincias andaluzas son provincias españolas, obviamente. Y eso es lo que señalizamos poniendo:

$$D_1 \subseteq D_2$$

Sin embargo, el conjunto de provincias de Andalucía (D_1) *no es un elemento* del conjunto de provincias de España (D_2), porque D_1 no es él mismo no es una provincia, sino un conjunto de provincias, que es algo muy distinto. Por esa razón, debemos poner:

$$D_1 \notin D_2$$

Del mismo modo, el conjunto de provincias de Aragón (es decir, el conjunto formado por Zaragoza, Huesca y Teruel) también es un subconjunto del conjunto de provincias de España. Y sin embargo, este conjunto no es un *elemento* del conjunto de provincias de España, porque él mismo no es una provincia, sino un conjunto de provincias, que es algo muy distinto.

De igual manera, el conjunto de provincias españolas que empiezan por la letra "A" también está incluido en D_2, pero no es un elemento suyo. Y así podríamos seguir con infinidad de ejemplos, para subrayar la diferencia entre estas dos nociones, pertenencia ($\in$) e inclusión ($\subseteq$).

§ 15.9. CUESTIONES

En relación a tu ejemplos de **§ 15.7**, explica lo más claramente que puedas por qué es el caso que $E_2 \subseteq E_1$, pero sin embargo $E_2 \notin E_1$.

§ 15.10. SUBCONJUNTOS DE SÍ MISMOS Y SUBCONJUNTOS PROPIOS

Es importante advertir que, trivialmente, todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Esto es así porque, dado cualquier conjunto D, es trivialmente verdadero que todos los elementos de D son elementos de D. Por consiguiente, para cualquier conjunto D, siempre tenemos:

$$D \subseteq D$$

Esto se aplica, en particular, a todos los ejemplos de conjuntos que hemos visto aquí. Todos ellos son, trivialmente, subconjuntos de sí mismos:

$$\begin{aligned}
\{\,\text{provincias de Andalucía}\,\} \quad &\subseteq \quad \{\,\text{provincias de Andalucía}\,\} \\
2\mathbb{N} \quad &\subseteq \quad 2\mathbb{N} \\
\mathbb{N} \quad &\subseteq \quad \mathbb{N} \\
\{\,\text{Quijote, Sancho}\,\} \quad &\subseteq \quad \{\,\text{Quijote, Sancho}\,\} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

En función de esto, cuando queremos hablar de aquellos subconjuntos de un conjunto que no coinciden con el conjunto entero, utilizamos la denominación **"subconjuntos propios"**. Así pues, los subconjuntos propios de un conjunto son **aquellos subconjuntos distintos al conjunto entero**.

§ 15.11. EL CONJUNTO VACÍO COMO SUBCONJUNTO DE CUALQUIER CONJUNTO

De forma paralela a lo anterior, hay que advertir que el conjunto vacío ($\varnothing$) es también, trivialmente, subconjunto de cualquier conjunto.

En efecto, puesto que $\varnothing$ no tiene elementos, resulta trivialmente verdadero que todos sus elementos pertenecen a cualquier conjunto que digamos. En otras palabras, dado cualquier conjunto D, siempre tenemos, trivialmente:

$$\varnothing \subseteq D$$

Huelga decir que esto se aplica a todos los ejemplos de conjuntos que hemos visto aquí. Por consiguiente, tenemos:

$$\begin{aligned} \varnothing &\subseteq \{\text{provincias de Andalucía}\} \\ \varnothing &\subseteq 2\mathbb{N} \\ \varnothing &\subseteq \mathbb{N} \\ \varnothing &\subseteq \{\text{Quijote, Sancho}\} \\ &\ldots \end{aligned}$$

§ 15.12. CUESTIONES

1. Explica lo más claramente que puedas por qué es el caso que $D \subseteq D$ para cualquier conjunto D.
2. Explica lo más claramente que puedas por qué es el caso que $\varnothing \subseteq D$ para cualquier conjunto D.
3. Hemos dicho que $\varnothing$ es subconjunto de cualquier conjunto. Ahora bien, ¿habrá algún conjunto del cual $\varnothing$ no sea *subcojunto propio*? Si se te ocurre alguno, indícalo y razona tu respuesta.
4. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
   b) Qué es lo que más te ha costado entender.
   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 16

Secuencias ordenadas – El universo de semprim

§ 16.1. SECUENCIAS ORDENADAS DE OBJETOS

Una **secuencia ordenada de objetos** (abreviadamente, **secuencia**, o **sec**) es una fila en la que cada objeto ocupa una o varias posiciones.

Es importante percatarse de la diferencia entre las secuencias ordenadas y los simples conjuntos.

En un conjunto, los objetos pueden aparecer en cualquier orden: es indiferente el orden en el que los presentemos. Y además, cada objeto aparece una única vez (no se tienen en cuenta las repeticiones).

Por el contrario, en una secuencia de objetos, el orden es fundamental: no es lo mismo estar en 1ª posición en una cola, que estar en 2ª posición, o tener el número 27.

Además, un mismo objeto puede figurar varias veces en una secuencia, ocupando distintos lugares de la fila. Del mismo modo, en una cola con tickets, alguien puede coger varios números distintos, por si acaso se le pasa uno, tener otra opción más adelante.

Para representar secuencias ordenadas, utilizaremos los ángulos “<” y “>”, colocando a los objetos de la secuencia entre esos ángulos, en el orden que corresponda. Obviamente, esta notación es distinta de las llaves que utilizamos para los conjuntos, “{” y “}”.

Además, a los objetos que conforman las secuencias los llamaremos **“componentes”** (abreviadamente **“comp”**); y más en particular, **“1º componente”**, **“2º componente”**, etc. También aquí marcamos la diferencia respecto a los conjuntos, a cuyos objetos llamamos “elementos”.

§ 16.2. CUESTIONES

- Señala la diferencia que existe entre secuencias y conjuntos, en relación al orden de los objetos en cuestión.
- Señala la diferencia que existe entre secuencias y conjuntos, en relación a las repeticiones.

§ 16.3. UN EJEMPLO DE SECUENCIA ORDENADA DE OBJETOS

Nuestro primer ejemplo de secuencia ordenada de objetos consistirá en los campeones del mundo de ajedrez entre 1900 y 1946.

El primer campeón mundial de ajedrez en el siglo XX fue Lasker, que consiguió el título en 1894 y lo retuvo hasta 1921. El segundo fue Capablanca, que tuvo el título de 1921 a 1927. El tercero fue Alekhine, que tuvo el título de 1927 a 1935. El cuarto fue Max Ewe, quien fue campeón entre 1935 y 1937. Y el quinto fue otra vez Alekhine, que recuperó el título en 1937, y murió sin haberlo perdido, en 1946.

Por consiguiente, la secuencia de campeones mundiales de ajedrez entre 1900 y 1946 está formada por:

$$< \text{Lasker}\,,\ \text{Capablanca}\,,\ \text{Alekhine}\,,\ \text{Ewe}\,,\ \text{Alekhine} >$$

Como vemos, el orden de la secuencia refleja la sucesión temporal de campeones, y es importante.

En efecto, Lasker es el 1º componente de la secuencia y Capablanca el 2º, porque Lasker tuvo el título en un período anterior a Capablanca. Y cuando estos dos jugadores se enfrentaron por el título mundial, fue Capablanca quien arrebató el título a Lasker, no al revés.

Además, observamos que Alekhine aparece dos veces, en 3ª y 5ª posición, porque fue campeón en dos períodos distintos, con un breve interludio en el que Ewe ostentó el título. Por lo tanto, las repeticiones de los componentes también son importantes cuando hablamos de secuencias de objetos.

Sin embargo, si pensamos ahora en el **conjunto** de campeones mundiales de ajedrez entre 1900 y 1946, estaremos hablando de algo muy distinto.

En efecto, el conjunto de campeones mundiales de ajedrez en el período 1900–1946 está formado por *cuatro elementos*: Lasker, Capablanca, Alekhine y Ewe, independientemente del orden en que los mencionemos. Y Alekhine no figura dos veces en dicho conjunto, sino solamente una, a pesar de haber sido campeón en dos períodos distintos. La razón es que los conjuntos, a diferencia de las secuencias, no contemplan repeticiones de sus elementos (en un conjunto, cada elemento figura una única vez).

§ 16.4. OTRO EJEMPLO DE SECUENCIA ORDENADA

Otro ejemplo de secuencia ordenada de objetos, bastante más caprichoso que el que anterior, es el siguiente:

$$< \pi\,, \text{Dulcinea del Toboso}\,, \text{el pacifismo}\,, \pi\,, \text{el pacifismo} >$$

En este caso, tenemos también una secuencia de 5 componentes, pero no parece haber ningún criterio reconocible por el que se haya reunido a estos objetos, ni se les haya ordenado de esta manera. Simplemente, se trata de una secuencia de la cual el número π es su $1^{\underline{\text{o}}}$ y el $4^{\underline{\text{o}}}$ componente, el pacifismo es su $3^{\underline{\text{o}}}$ y el $5^{\underline{\text{o}}}$ componente, y su $2^{\underline{\text{o}}}$ componente es Dulcinea (el famoso personaje de *El Quijote* de quien que está enamorado su protagonista).

Sin embargo, esta secuencia es tan legítima como la anterior, porque en la definición de secuencia ordenada no se especifica que tenga que haber ninguna razón particular por la que se seleccionen unos objetos determinados, ni para que se les coloque en un orden u otro. Cualquier fila de objetos es igualmente válida.

Por último, al igual que sucedía con el ejemplo anterior, la secuencia que acabamos de formar es netamente distinta del conjunto formado por los componentes de la misma:

$$\{\, \text{pacifismo}\,, \pi\,, \text{Dulcinea} \,\}$$

En efecto, este conjunto tiene tres elementos, no cinco, y como tal conjunto, es indiferente el orden en que los mencionemos.

§ 16.5. CUESTIONES

Propón un ejemplo de secuencia compuesta por siete componentes, con alguna repetición, y compárala con el correspondiente conjunto formado por los componentes de la misma.

§ 16.6. PARES ORDENADOS, TERNAS Y CUATERNAS

Las secuencias de dos componentes tienen nombre propio, se llaman **“pares ordenados”** (abreviadamente, **“par ord”**, **“pares ord”**). Un ejemplo de par ordenado es la secuencia <Sol, Luna>, cuyo 1º componente es el Sol, y cuyo 2º componente es la Luna.

Otro ejemplo de par ordenado es la secuencia <Luna, Sol>, que es diferente a la anterior, porque aunque tiene los mismos componentes, estos aparecen en el orden inverso.

Otro ejemplo de par ordenado es la secuencia <Luna, Luna>, cuyo 1º y 2º componente es la Luna.

Por su parte, también las secuencias de tres componentes tienen nombre propio, las llamamos **“ternas ordenadas”** (abreviadamente, **“ternas ord”**). Un ejemplo de terna ordenada es la secuencia

<Sol, Luna, Luna>

en la que el Sol aparece como 1º componente, y la Luna aparece como 2º y 3º componente.

Por último, a las secuencias de cuatro componentes las llamamos **“cuaternas ordenadas”** (abreviadamente, **“cuaternas ord”**). Un ejemplo de cuaterna ordenada es la secuencia

< Mercurio, Venus , La Tierra , Marte >

compuesta por los cuatro planetas rocosos del sistema solar, por su orden de cercanía al Sol.

§ 16.7. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de par ordenado, otro de terna ordenada y otro de cuaterna.

§ 16.8. PRELIMINARES DE LA DEFINICIÓN DE SEMPRIM

Terminada nuestra incursión en la teoría de conjuntos, estamos en condiciones de abordar la *semántica de primer orden clásica* (*semprim*).

A su vez, esta semántica está basada en la nocion de **interpretación de primer orden** (abreviadamente, **"intpred"**), que es una forma de dar valores de verdad a cada una de las fórmulas de nuestro lenguaje formal.

Al igual que ocurría con la semántica veritativo-funcional, la semántica de primer orden clásica es también **bivalente**, porque cada fórmula resultará $\mathbb{V}$ o $\mathbb{F}$ bajo cada interpretación. Sin embargo, el concepto de interpretación de primer orden es mucho más complejo que el concepto de interpretación proposicional.

Por esta razón, desglosaremos la definición de intpred en diferentes secciones, para ir dedicando a cada uno de sus componentes la atención que merece.

§ 16.9. CUESTIONES

1. Explica en pocas palabras qué hace una interpretación de primer orden.

2. Indica qué similitud y qué diferencia señala el manual entre la semántica de primer orden y la semántica veritativo-funcional.

§ 16.10. EL UNIVERSO DE DISCURSO O DOMINIO DE INTERPRETACIÓN

El primer componente de una interpretación de primer orden I es **un conjunto no vacío**, al que llamaremos **"universo de discurso"** o **"dominio de interpretación"** (abreviadamente, **"dom"**, o $dom(I)$).

En este contexto, si I es una interpretación de primer orden, y tiene como dominio a un conjunto D, entonces decimos que I **"está basada"** en D.

El dominio recoge el conjunto de cosas sobre las cuales vamos a interpretar las fórmulas de lenpred, en cada caso. Por consiguiente, es una forma de delimitar previamente los objetos a los que nos estamos refiriendo, cuando leemos las fórmulas de lenpred bajo una determinada interpretación.

Esto se parece, salvando las distancias, a cuando en el lenguaje cotidiano decimos algo así como:

"*Estoy hablando de mis estudiantes, no me refiero a nadie más*"

Al hacer una afirmación de esas características, estamos cerrando, por así decirlo, el ámbito de referencia sobre el que cabe interpretar nuestras palabras.

Pues bien, la especificación del dominio (o universo de discurso) viene a hacer lo mismo respecto de nuestro lenguaje formal, pero de una manera más rigurosa y sistemática.

§ 16.11. RESTRICCIONES RESPECTO AL DOMINIO

La exigencia de que el dominio esté no vacío responde al sentido común: no es realista razonar (o comunicarse) bajo la hipótesis de que no exista nada.

Sin embargo, existe un sistema de lógica no clásica que explora esta posibilidad (la llamada *"lógica libre"*), aunque no lo abordaremos aquí.

§ 16.12. EJEMPLOS DE DOMINOS PARA LAS INTERPRETACIONES DE PRIMER ORDEN

Un ejemplo de universo de discurso es el conjunto de todos los personajes de *El Quijote*, al cual podríamos llamar "DQ".

Otro ejemplo es el conjunto formado la violoncelista Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives y el número π, al cual podríamos llamar "GVP".

Otro ejemplo es el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$.

Cualquiera de estos tres conjuntos vale como dominio de una interpretación de primer orden, por la sencilla razón de que ninguno de ellos está vacío (ninguno de ellos es $\varnothing$).

§ 16.13. CUESTIONES

1. Define la noción de universo de discurso de una interpretación de primer orden.
2. Da un ejemplo de conjunto que pueda ser dominio de una intpred. Denomina "E_1" a dicho conjunto.
3. Indica un conjunto que *no* pueda ser dominio de una intpred, y explica por qué.
4. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
   b) Qué es lo que más te ha costado entender.
   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 17

La interpretación de las constantes y de los simpred mon

§ 17.1. LA INTERPRETACIÓN DE LAS CONSTANTES

Una vez fijado su dominio, una interpretación de primer orden tiene que dar un valor a cada una de las constantes del lenguaje.

Pues bien, **el valor de una constante k de lenpred bajo una interpretación I, será sencillamente un elemento del dominio de I**. Es decir:

$$\boxed{\text{Para cada constante } k, \quad I(k) = \text{un objeto } d \text{ que pertenece a } dom(I)}$$

Puesto que las constantes vienen a ser como los nombres propios del lenguaje formal, lo que estamos haciendo al interpretarlas de esta manera, es algo así como indicar a qué objeto del dominio corresponde cada nombre propio.

Esto es algo parecido, salvando las distancias, a cuando nos presentan a una persona, diciéndonos su nombre. Al poner en relación ese nombre con la persona que tengo delante, estoy interpretando ese nombre, o dándole referencia, en ese contexto de uso particular.

Por último, debemos tener en cuenta que dos constantes distintas pueden tener el mismo valor bajo una interpretación (es decir, pueden corresponder al mismo objeto). Esto es similar a cuando una persona tiene dos nombres distintos, o un nombre y un *nickname*. Dos expresiones distintas pueden ser nombres propios de una misma persona, o de un mismo objeto en general.

§ 17.2. CUESTIONES

Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior — literalmente, tal y como aparece ahí. (Debes memorizarla para el control correspondiente a este tema.)

§ 17.3. EJEMPLOS DE INTERPRETACIONES DE LAS CONSTANTES

Una posible interpretación, I_1, con dominio DQ (el conjunto de los personajes de *El Quijote*), es aquella que asigna los siguientes valores a las constantes del lenguaje:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
I_1(a) & = & \text{Don Quijote} & I_1(c_1) & = & \text{Dulcinea} \\
I_1(b) & = & \text{Sancho Panza} & I_1(c_2) & = & \text{Dulcinea} \\
I_1(c) & = & \text{Dulcinea} & & \ldots &
\end{array}$$

Es decir, que la interpretación I_1 asigna Don Quijote a la constante a, asigna Sancho Panza a la constante b, y asigna Dulcinea a todas las demás constantes del lenguaje.

Naturalmente, la interpretación que acabamos de describir no es la única interpretación posible basada en el dominio DQ.

Otro ejemplo de interpretación basada en el dominio DQ es la siguiente, a la que llamaremos I_2:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} I_2(a) & = & \text{Don Quijote} & I_2(c_1) & = & \text{Don Quijote} \\ I_2(b) & = & \text{Don Quijote} & I_2(c_2) & = & \text{Don Quijote} \\ I_2(c) & = & \text{Don Quijote} & & \dots & \end{array}$$

En este caso, como vemos, la interpretación I_2 asigna Don Quijote a todas las constantes del lenguaje, sin excepción.

Y así podríamos definir otras muchas interpretaciones distintas, basadas en el dominio DQ, que asignen un personaje de *El Quijote* a cada una de las constantes del lenguaje.

§ 17.4. CUESTIONES

Pon otro ejemplo de interpretación basada en DQ, y denomínala “J_2”.

§ 17.5. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LAS CONSTANTES

A continuación, vamos a definir una nueva interpretación de primer orden, a la que denominaremos “I_3”, basada en el conjunto GVP (es decir, el conjunto formado por la violoncelista Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives y el número π). Pues bien, diremos que I_3 asigna los siguientes valores a las constantes del lenguaje:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
I_3(\boxed{a}) & = & \text{Natalia Gutman} & I_3(\boxed{c_1}) & = & \pi \\
I_3(\boxed{b}) & = & \text{Edif. Luis Vives} & I_3(\boxed{c_2}) & = & \pi \\
I_3(\boxed{c}) & = & \pi & & \ldots &
\end{array}
$$

Por tanto, la interpretación I_3 asigna Natalia Gutman a la constante $\boxed{a}$, asigna el Edificio Luis Vives a la constante $\boxed{b}$, y asigna el número π a todas las demás constantes del lenguaje.

§ 17.6. CUESTIONES

Pon otro ejemplo de interpretación basada en GVP, y denomínala “J_3”.

§ 17.7. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LAS CONSTANTES

Ahora vamos a definir una nueva interpretación de las constantes, pero esta vez basada en el conjunto de los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{\, 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots \}$$

Pues bien, una posible interpretación, digamos “I_4”, basada en este conjunto, es aquella que asigna los siguientes valores a las constantes del lenguaje:

$$
\begin{array}{rclcrcl}
I_4(\boxed{a}) & = & 0 & \qquad & I_4(\boxed{c_1}) & = & 1 \\
I_4(\boxed{b}) & = & 0 & \qquad & I_4(\boxed{c_2}) & = & 2 \\
I_4(\boxed{c}) & = & 0 & \qquad & I_4(\boxed{c_3}) & = & 3 \\
& & & \ldots & & &
\end{array}
$$

Como vemos, la interpretación I_4, que acabamos de definir, asigna el número 0 a las constantes $\boxed{a}$, $\boxed{b}$ y $\boxed{c}$, y a continuación, asigna el número 1 a la constante c_1, el número 2 a la constante c_2, el número 3 a la constante c_3, etc.

Naturalmente, I_4 no es la única interpretación posible basada en $\mathbb{N}$, hay muchas otras que cabría imaginar.

Y en general, queda claro que hay una inmensa variedad de conjuntos no vacíos que se pueden proponer como dominios de interpretación. Y a su vez, habrá aún más interpretaciones de las constantes, que se pueden proponer sobre la base de todos esos dominios. Por consiguiente, es patente que el abanico de interpretaciones distintas para nuestro lenguaje formal es verdaderamente gigantesco.

§ 17.8. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de interpretación de las constantes basada en $\mathbb{N}$, y denomínala "J_4".
2. Pon un ejemplo de interpretación de la constantes, cuyo dominio sea el conjunto E_1 que tú propusiste en **§ 16.13** (2). Denomina "J_1" a dicha interpretación.

§ 17.9. LA INTERPRETACIÓN DE LOS SÍMBOLOS PREDICATIVOS MONARIOS

Una vez fijado el dominio y el valor de las constantes, una interpretación de primer orden tiene que dar un valor a cada uno de los símbolos predicativos del lenguaje. Y de eso precisamente es de lo que nos vamos a ocupar a continuación.

Como sabemos, los símbolos predicativos del lenguaje están estructurados en bloques: monarios, binarios, ternarios, y así sucesivamente. Pues bien, siguiendo este orden de bloques, iremos desglosando el valor que reciben estos símbolos bajo una interpretación de primer orden, dependiendo del bloque al que pertenezcan.

En concreto, empezaremos con los símbolos predicativos monarios (simpred mon). Y una vez que los hayamos estudiado suficientemente, pasaremos al siguiente bloque.

Pues bien, dicho todo esto, **el valor de un símbolo predicativo monario U de lenpred, bajo una interpretación I, será sencillamente un subconjunto de su dominio**. Es decir:

$$\boxed{\text{Para cada simpred mon } U, \quad I(U) = \text{un cjto } D \quad \text{tal que} \quad D \subseteq dom(I)}$$

Es importante darse cuenta de que la estipulación precedente no excluye que el subconjunto asignado a un símbolo predicativo monario pueda ser vacío. En otras palabras: **el valor de un simpred mon bajo una interpretación puede ser el conjunto vacío**, $\varnothing$. En **§ 18.1** veremos un ejemplo de ello.

§ 17.10. CUESTIONES

1. ¿Qué bloque viene a continuación de los simpred mon?
2. Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior — literalmente, tal y como aparece ahí. (Debes memorizarla para el control correspondiente a este tema.)
3. ¿Es posible que una interpretación asigne a un simpred mon el conjunto vacío? (Contesta simplemente "Sí" o "No" a esta pregunta, sin razonar la respuesta.)
4. ¿Crees que es posible que una interpretación asigne a un simpred mon el conjunto entero de su dominio? Razona la respuesta.

§ 17.11. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LOS SÍMBOLOS PREDICATIVOS MONARIOS

A continuación, vamos a dar un ejemplo de interpretación de los símbolos predicativos monarios (simpred mon) de nuestro lenguaje formal.

Para ello, partiremos de la interpretación I_1 que definimos en **§ 17.3** . Y ahora procederemos a complementar esta interpretación, asignando valores a los simpred mon. Para ello, seguiremos la estipulación que acabamos de hacer en **§ 18.8** .

A tal efecto, conviene recordar que el dominio de I_1 es DQ, es decir, el conjunto de los personajes de *El Quijote*. Por consiguiente, I_1 tendrá que asignar a cada simpred mon un subconjunto de DQ, esto es, un conjunto de personajes de dicha novela.

Pues bien, en nuestro ejemplo, la forma en que I_1 asigna un subconjunto de DQ a cada simpred mon será la siguiente:

$$\begin{aligned}
I_1(\,F\,) &= \{\text{personajes femeninos de } \textit{El Quijote}\,\}\\
I_1(\,G\,) &= \{\text{personajes masculinos de} \quad\quad ” \quad\quad \}\\
I_1(\,H\,) &= \{\text{personajes de la aldea de Don Quijote}\,\}\\
I_1(\,F_1\,) &= \{\text{Dulcinea, Cardenio y el bachiller}\,\}\\
I_1(\,F_2\,) &= \{\text{Dulcinea, Cardenio y el bachiller}\,\}\\
I_1(\,F_3\,) &= \{\text{Dulcinea, Cardenio y el bachiller}\,\}\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Así pues, como vemos, I_1 asigna a la letra predicativa monaria F el conjunto de todos los personajes femeninos de *El Quijote* (es decir, Dulcinea, la sobrina, el ama, etc). Además, I_1 asigna a la letra predicativa G el conjunto de todos los personajes masculinos de *El Quijote* (es decir, Don Quijote, Sancho Panza, el barbero, el cura, etc).

Además, la interpretación I_1 asigna a la letra predicativa H el conjunto de todos los personajes de la aldea de Don Quijote; es decir, Don Quijote, Sancho, la sobrina, etc (pero no, por ejemplo, Dulcinea, que era de otra aldea, El Toboso).

Y finalmente, I_1 asigna a todas las demás letras predicativas del lenguaje (es decir, F_1, F_2, F_3, $\ldots$) el conjunto formado por Dulcinea, Cardenio y el bachiller Sansón Carrasco.

Como vemos, en todos los casos hemos asignado a cada símbolo predicativo monario un subconjunto del conjunto de personajes de *El Quijote* (es decir, un subconjunto de DQ). Por consiguiente, se cumple la condición estipulada, según la cual la interpretación ha de asignar a cada simpred mon del lenguaje un subconjunto del dominio de la interpretación.

Huelga decir, una vez más, que la interpretación I_1, que estamos describiendo como ejemplo, no tiene nada de particular. Hay muchas otras formas posibles de interpretar los simpred mon sobre el dominio DQ, en las que se asignan a los simpred mon otros subconjuntos de DQ, distintos a los que acabamos de señalar.

§ 17.12. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred mon de lenpred, basada en el dominio DQ. Denomina "J_2" a dicha interpretación. Para ello, basta con que indiques el valor bajo J_2 de cada simpred mon, tal y como acabamos de hacer con I_1.
2. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
   b) Qué es lo que más te ha costado entender.
   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 18

Más sobre la interpretación de los simpred mon y los simpred bin

§ 18.1. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LOS SÍMBOLOS PREDICATIVOS MONARIOS

No solo hay una enorme variedad de interpretaciones distintas de los simpred mon basadas en DQ, sino que también hay muchísimas otras interpretaciones basadas en dominios distintos. A continuación, vamos a ver un ejemplo de ello.

En efecto, para nuestro siguiente ejemplo partiremos de la interpretación I_3, la cual definimos en **§ 17.5** . Y ahora, vamos a complementar esa interpretación con una asignación de valores a los simpred mon. Lo haremos de manera similar a como hemos hecho en el caso de I_1, pero basándonos en el dominio de esta otra interpretación.

A tal efecto, hay que empezar por recordar que el dominio de I_3 es el conjunto formado por la violoncelista Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives y *e*l número π, y que a dicho conjunto lo denominamos en su momento *“GVP”*.

Por consiguiente, I_3 tendrá que asignar a cada simpred mon un subconjunto de GVP. Y en nuestro ejemplo, la forma en que I_3 hace esto será la siguiente:

$$
\begin{aligned}
I_3(\boxed{F}) &= \{\text{Natalia Gutman, Edif. Luis Vives}, \pi\} \\
I_3(\boxed{G}) &= \{\text{Natalia Gutman}, \pi\} \\
I_3(\boxed{H}) &= \{\pi\} \\
I_3(\boxed{F_1}) &= \varnothing \\
I_3(\boxed{F_2}) &= \varnothing \\
I_3(\boxed{F_3}) &= \varnothing \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Así pues, I_3 asigna a la letra predicativa monaria $\boxed{F}$ el conjunto formado por Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives y el número π. Por consiguiente, I_3 asigna a $\boxed{F}$ el dominio entero:

$$I(\boxed{F}) = dom(I)$$

Nótese que esto no supone ningún problema, dado que todo conjunto es trivialmente un subconjunto de sí mismo, tal y como explicamos en **§ 15.10** .

A continuación, la interpretación I_3 asigna a la letra predicativa $\boxed{G}$ el conjunto formado por Natalia Gutman y el número π. A continuación, I_3 asigna a la letra predicativa $\boxed{H}$ el conjunto formado por el número π solo.

Y finalmente, la interpretación I_3 asigna a todas las demás letras predicativas del lenguaje (es decir, F_1, F_2, F_3, ...) el conjunto vacío, $\varnothing$.

Como vemos, en todos los casos hemos asignado a cada símbolo predicativo monario un subconjunto del conjunto GVP. Por consiguiente, aquí también hemos cumplido la estipulación de que la interpretación asigne a cada simpred mon del lenguaje un subcjto de su dominio.

§ 18.2. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred mon, basada en el dominio GVP. Denomina "J_3" a dicha interpretación. Para ello, basta con que indiques el valor bajo J_3 de cada simpred mon, tal y como acabamos de hacer con I_3.
2. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred mon, basada en el conjunto E_1, tú propusiste en **§ 16.13** (2). Denomina "J_1" a dicha interpretación

§ 18.3. SIMPRED MON Y PROPIEDADES

Como explicamos en **§ 3.3** , los símbolos predicativos monarios son correlatos lejanos de los **predicados** del lenguaje natural, como "azul" o "múltiplo de 7".

Pues bien, al interpretar un símbolo predicativo monario mediante un subconjunto del dominio, estamos haciendo algo parecido, salvando las distancias, a cuando cuando interpretamos un predicado como expresando una **propiedad**. Esto es lo que hacemos, por ejemplo, cuando interpretamos el predicado "azul" como expresando la propiedad de *ser azul*; o bien, cuando interpretamos el predicado "múltiplo de 7" como expresando la propiedad de *ser un número múltiplo de 7*.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que el subconjunto del dominio asignado a un simpred mon no siempre corresponde a una característica común (homogénea), que permita identificar específicamente sus elementos. Así por ejemplo, no hay ninguna característica visible que singularice al conjunto formado por Dulcinea, Cardenio y el bachiller, dentro de los personajes de *El Quijote*.

Esta es una diferencia importante entre la interpretación de los simpred mon de nuestro lenguaje formal, y el modo en que entendemos los predicados del lenguaje natural. Detrás de los predicados del lenguaje natural siempre hay alguna condición unificadora, que nos permite *entender* (o *captar*) el significado de ese predicado. Mientras que en la interpretación de un símbolo predicativo monario, es posible atribuirle cualquier subconjunto del dominio, que queramos estipular, por caprichoso que sea.

§ 18.4. CUESTIONES

¿Se puede interpretar un simpred mon mediante un subconjunto de objetos del dominio elegidos a capricho (es decir, sin que compartan ninguna característica visible, más allá de ser elementos del dominio)? (Contesta simplemente "Sí" o "No" a esta pregunta, sin razonar la respuesta.)

§ 18.5. CONTINUACIÓN DEL ESTUDIO DE LAS INTERPRETACIONES DE PRIMER ORDEN

En el tema anterior, hicimos una primera introducción a las interpretaciones de primer orden. Empezamos estudiando el concepto de dominio de la interpretación, y a continuación explicamos cómo las interpretaciones dan valores a las constantes del lenguaje. Por último, explicamos también el modo en que las interpretaciones de primer orden dan valores a los símbolos predicativos monarios del lenguaje.

Pues bien, en este tema vamos a complementar ese estudio, explicando el modo en que las interpretaciones de primer orden dan valores al resto de símbolos predicativos de nuestro lenguaje formal, es decir, a los simpred binarios, ternarios, etc.

A tal fin, empezaremos por ocuparnos del bloque de los símbolos predicativos binarios (sinpred bin). Y a continuación, en secciones sucesivas, seguiremos con los simpred ternarios y con el resto de bloques.

§ 18.6. LA INTERPRETACIÓN DEL SÍMBOLO DE IGUALDAD

Ahora bien, antes de ocuparnos de la interpretación de los símbolos predicativos binarios, tenemos que hacer una advertencia previa: vamos a excluir de nuestra consideración al símbolo de igualdad ($=$). Y la razón es que se trata de un **símbolo lógico**, por lo que no está sujeto a variaciones entre una interpretación y otra.

Por consiguiente, el comportamiento de $=$ vendrá regulado directamente por las reglas de valoración de las fórmulas atómicas. En **§ 20.1** veremos cómo.

§ 18.7. CUESTIONES

A lo largo del tema, en la realización de todas las cuestiones planteadas:

- Intenta prestar atención a los pequeños detalles.
- Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el manual.
- **Si estás trabajando en el aula, contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.** (Lo que no te dé tiempo a entregar en el aula, puedes trabajarlo en tus horas de estudio individual.)

Indica escuetamente la razón por la que no se especifica la interpretación de $=$, junto con el resto de símbolos predicativos binarios del lenguaje.

§ 18.8. LA INTERPRETACIÓN DE LOS SIMPRED BINARIOS NO LÓGICOS

Hecha esa advertencia previa, ya podemos decir que **el valor de un simpred binario no lógico U^2 de lenpred, bajo una interpretación I, será un conjunto de pares ordenados de elementos del dominio**. Esto es:

Para cada simpred bin no lógico U^2, $I(U^2)$ es un conjunto de pares ordenados $< d_1, d_2 >$, donde d_1 y d_2 pertenecen a $dom(I)$

Nótese que — al igual que ocurría con los simpred mon — la estipulación precedente no excluye que el conjunto de pares asignado pueda ser el conjunto vacío. En **§ 19.1** veremos un ejemplo de ello.

§ 18.9. CUESTIONES

1. Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior — literalmente, tal y como aparece ahí. (Debes memorizarla para el control correspondiente a este tema.)

2. ¿Qué símbolo predicativo binario queda fuera de la misma?

3. ¿Es posible que una interpretación asigne a un simpred bin el conjunto vacío? (Contesta simplemente "Sí" o "No" a esta pregunta, sin razonar la respuesta.)

§ 18.10. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LOS SÍMBOLOS PREDICATIVOS BINARIOS

A continuación, vamos a dar un ejemplo de interpretación de los simpred bin de nuestro lenguaje formal.

Para ello, partiremos de la interpretación I_1, que definimos en **§ 17.3** . Y ahora procederemos a complementar esta interpretación, asignando valores a los simpred bin, de acuerdo con lo que acabamos de indicar.

A tal efecto, conviene volver a recordar que el dominio de I_1 es DQ, es decir, el conjunto de los personajes de *El Quijote*. Por consiguiente, I_1 tendrá que asignar a cada simpred bin un conjunto de pares ordenados, cuyos componentes sean personajes de dicha novela.

Pues bien, en nuestro ejemplo, la forma en que I_1 hace esto es la siguiente:

$$I_1(\,K\,) \quad = \quad \{\text{pares ord de } DQ\text{, cuyo } 1^{\underline{o}} \text{ componente ama al } 2^{\underline{o}}\}$$

$$I_1(\,L\,) \quad = \quad \{\text{pares ord de } DQ\text{, cuyo } 1^{\underline{o}} \text{ componente protege al } 2^{\underline{o}}\}$$

$$I_1(\,M\,) \quad = \quad \{\text{pares ord de } DQ\text{, cuyo } 1^{\underline{o}} \text{ componente alecciona al } 2^{\underline{o}}\}$$

$$I_1(\,K_1\,) \quad = \quad \{\ <\text{Dulcinea, Cardenio}>\ ,\quad <\text{Cardenio, bachiller}>\ \}$$

$$I_1(\,K_2\,) \quad = \quad \{\ <\text{Dulcinea, Cardenio}>\ ,\quad <\text{Cardenio, bachiller}>\ \}$$

$$I_1(\,K_3\,) \quad = \quad \{\ <\text{Dulcinea, Cardenio}>\ ,\quad <\text{Cardenio, bachiller}>\ \}$$

$$\ldots$$

Así pues, como vemos, la interpretación I_1 asigna al símbolo predicativo binario K el conjunto de pares ordenados de personajes de *El Quijote* cuyo $1^{\underline{o}}$ componente ama al $2^{\underline{o}}$.

Por consiguiente, el par <Quijote, Dulcinea> pertenecerá a la interpretación de K bajo I_1, ya que Quijote está enamorado de Dulcinea. Pero el par <Dulcinea, Quijote> no pertencerá a dicha interpretación, ya que Dulcinea no quiere saber nada del viejo hidalgo.

Además, la interpretación de K bajo I_1 también tendrá los pares <Cardenio, Luscinda> y <Luscinda, Cardenio>, puesto que en este caso se trata de un amor correspondido. Y así muchos otros pares ordenados: todos aquellos de cuyo primer componente se diga que ama al segundo, en algún momento de la novela.

Por otro lado, tenemos que el par <Quijote, mozo Andrés> pertenecerá a la interpretación de L bajo I_1, ya que Don Quijote protege al mozo Andrés, desatándolo de un árbol. Pero el par <mozo Andrés, Quijote> no pertenecerá a esta interpretación, porque el mozo Andrés no protege a Don Quijote de nada. Y así con el resto de personajes, según que aparezca uno protegiendo al otro, en algún pasaje de la novela.

En cuanto a la interpretación de M bajo I_1, los pares <Quijote, Sancho> y <Sancho, Quijote> pertenecerán a dicha interpretación, ya que ambos se aleccionan mutuamente en numerosas ocasiones durante la novela. E incluirá también todos los pares de personajes en los que el primer componente alecciona al segundo, en algún pasaje del libro.

Por último, la interpretación I_1 asigna al resto de simpred bin del lenguaje un mismo conjunto de pares ordenados, concretamente el formado por los pares <Dulcinea, Cardenio> y <Cardenio, bachiller>.

Así pues, como vemos, en todos los casos hemos asignado a cada símbolo predicativo binario un conjunto de pares ordenados de personajes de *El Quijote*. Por consiguiente, se cumple la condición estipulada, según la cual la interpretación ha de asignar a cada simpred bin del lenguaje un conjunto de pares ordenados de elementos del dominio.

Huelga decir, una vez más, que que esta forma de interpretar los simpred bin sobre el dominio DQ, no tiene nada de particular: hay muchas otras formas posibles de interpretar los simpred bin sobre el dominio DQ, siempre que se asigne a cada simpred bin un conjunto de pares ordenados de elementos de dicho dominio.

§ 18.11. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred bin de lenpred, basada en el dominio DQ. Denomina "j_2" a dicha interpretación. Para ello, debes indicar el valor bajo j_2 de cada simpred bin, tal y como acabamos de hacer con I_1.

2. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

    a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.

    b) Qué es lo que más te ha costado entender.

    c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.

    d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 19

La interpretación de los simpred bin, simpred ter, etc

§ 19.1. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LOS SÍMBOLOS PREDICATIVOS BINARIOS

Al igual que ocurría con los simpred mon, no solo hay una enorme variedad de interpretaciones distintas de los simpred bin basadas en DQ, sino que también hay muchísimas otras interpretaciones basadas en dominios distintos. A continuación, vamos a ver un ejemplo de ello.

En efecto, para nuestro siguiente ejemplo vamos a volver a apoyarnos en la interpretación I_3, la cual definimos en **§ 17.5**. Y ahora, complementaremos esa interpretación con una asignación de valores a los simpred bin. Lo haremos de manera enteramente similar a como hemos hecho en el caso de I_1, pero basándonos en el dominio de esta otra interpretación.

A tal efecto, empezamos por recordar que el dominio de I_3 es el conjunto GVP, formado Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives y *e*l número π.

Por consiguiente, I_3 tendrá que asignar a cada simpred bin un conjunto de pares ordenados de elementos de GVP. Y en nuestro ejemplo, la forma en que I_3 hace esto es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
I_1(K) &= \{<\text{Gutnam}, \text{Vives}>, <\text{Gutnam}, \pi>\} \\
I_1(L) &= \{<\text{Gutnam}, \text{Gutnam}>\} \\
I_1(M) &= \varnothing \\
I_1(K_1) &= \{\text{todos los pares ord formados por Gutnam, Vives, o } \pi\} \\
I_1(K_2) &= \{\text{todos los pares ord formados por Gutnam, Vives, o } \pi\} \\
I_1(K_3) &= \{\text{todos los pares ord formados por Gutnam, Vives, o } \pi\} \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

En definitiva, vemos que la interpretación I_3 asigna al símbolo predicativo binario K un conjunto de dos pares ordenados, concretamente el par $<\text{Gutnam}, \text{Vives}>$ y el par $<\text{Gutnam}, \pi>$.

A continuación, I_3 asigna al símbolo predicativo binario L un conjunto compuesto por un único par ordenado, concretamente el par $<\text{Gutnam}, \text{Gutnam}>$.

A continuación, I_3 asigna al símbolo predicativo binario M el conjunto vacío.

Y por último, I_3 asigna al resto de simpred bins del lenguaje, el conjunto de todos los pares ordenados que se pueden formar con los elementos de GVP, es decir: el par $<\mathrm{Gutnam}, \mathrm{Gutnam}>$, el par $<\mathrm{Vives}, \mathrm{Vives}>$, el par $<\pi, \pi>$, el par $<\mathrm{Gutnam}, \mathrm{Vives}>$, el par $<\mathrm{Vives}, \mathrm{Gutnam}>$, etc

En definitiva, vemos que en todos los casos hemos asignado a cada símbolo predicativo binario un conjunto de pares ordenados de elementos de GVP. Por consiguiente, se cumple la condición estipulada, según la cual la interpretación ha de asignar a cada simpred bin del lenguaje un conjunto de pares ordenados de elementos del dominio.

§ 19.2. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred bin, basada en el dominio GVP. Denomina "J_3" a dicha interpretación. Para ello, has de indicar el valor bajo J_3 de cada simpred bin, tal y como acabamos de hacer con I_3.

2. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred bin, basada en el conjunto E_1, tú propusiste en **§ 16.13** (2). Denomina "J_1" a dicha interpretación

§ 19.3. SIMPRED BIN Y RELACIONES

Como explicamos en **§ 3.9** , los símbolos predicativos binarios son correlatos lejanos de los **predicados relacionales** del lenguaje natural, como "madre de" o "múltiplo de".

Pues bien, al interpretar un símbolo predicativo binario mediante un conjunto de pares ordenados de elementos del dominio, estamos haciendo algo parecido, salvando las distancias, a cuando cuando interpretamos un predicado relacional como expresando una **relación entre dos cosas**.

Esto es lo que hacemos, por ejemplo, cuando interpretamos el predicado "madre de" como expresando la relación *ser madre de* (es decir, la relación que se da entre dos personas, cuando la primera es madre de la segunda). Y también es lo que hacemos cuando interpretamos el predicado relacional "múltiplo de" como expresando la relación de *ser un número múltiplo de otro* (es decir, la relación que se da entre dos números, n y m, cuando n es múltiplo de m).

Sin embargo, de forma paralela a lo que avisamos en **§ 18.3** , hay que tener en cuenta que el conjunto de pares ordenados del dominio que una interpretación asigna a un simpred bin, no siempre corresponde a una relación reconocible entre los componentes de esos pares.

Así por ejemplo, no hay ninguna relación tangible que singularice los pares $< \text{Dulcinea}, \text{Cardenio} >$ y $< \text{Cardenio}, \text{bachiller} >$, que la interpretación I_1 asigna a los simpred bin K_1 , K_2 , etc.

Y tampoco hay ninguna relación tangible que singularice los pares $< \text{Gutnam}, \text{Vives} >$ y $< \text{Gutnam}, \pi >$, que la interpretación I_3 asigna al simpred bin K

Por consiguiente, aquí tenemos también una diferencia importante entre la interpretación de los simpred bin de nuestro lenguaje formal, y el modo en que entendemos los predicados relacionales del lenguaje natural. Detrás de los predicados del lenguaje natural siempre hay alguna relación tangible, que nos permite *entender* (o *captar*) el significado de ese predicado. Mientras que en la interpretación de un símbolo predicativo binario, es posible atribuirle cualquier conjunto de pares ordenados del dominio que queramos estipular, por caprichoso que sea.

§ 19.4. CUESTIONES

¿Se puede interpretar un simpred bin mediante un conjunto de pares ordenados del dominio elegidos a capricho (es decir, sin que obedezcan a ninguna relación reconocible)? (Contesta simplemente "Sí" o "No" a esta pregunta, sin razonar la respuesta.)

§ 19.5. LA INTERPRETACIÓN DE LOS SIMPRED TERNARIOS

A la vista de la interpretación de los simpred binarios, no es difícil adivinar que **el valor de un simpred ternario U^3 de lenpred, bajo una interpretación I, será un conjunto de ternas ordenadas de elementos del dominio**. Esto es:

Para cada simpred ter U^3, $I(U^3)$ es un conjunto de ternas ordenadas $< d_1, d_2, d_3 >$, donde d_1, d_2 y d_3 pertenecen a $dom(I)$

Nótese que — al igual que ocurría con los simpred mon y con los simpred bin — la estipulación precedente no excluye que el conjunto de pares asignado pueda ser el conjunto vacío. Inmediatamente vamos a ver un ejemplo de ello.

§ 19.6. CUESTIONES

Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior — literalmente, tal y como aparece ahí. (Debes memorizarla para el control correspondiente a este tema.)

§ 19.7. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LOS SÍMBOLOS PREDICATIVOS TERNARIOS

A continuación, vamos a dar un ejemplo de interpretación de los simpred ter de nuestro lenguaje formal.

Para ello, partiremos una vez más de la interpretación I_1, que definimos en **§ 17.3** . Y ahora procederemos a complementar esta interpretación, asignando valores a los simpred ter, de acuerdo con lo que acabamos de indicar.

No es necesario recordar que el dominio de I_1 es DQ, por lo que I_1 tendrá que asignar a cada simpred ter un conjunto de ternas ordenadas, cuyos componentes sean personajes de dicha novela.

Pues bien, en nuestro ejemplo, la forma en que I_1 hace esto es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
I_1(\ P\ ) \quad &= \quad \{\,\text{ternas ord de } DQ\text{, por orden de aparición en la obra}\,\}\\
I_1(\ Q\ ) \quad &= \quad \{\,<\text{Cardenio, Cardenio, Cardenio}>\,\}\\
I_1(\ R\ ) \quad &= \quad \varnothing\\
I_1(\ P_1\ ) \quad &= \quad \varnothing\\
I_1(\ P_2\ ) \quad &= \quad \varnothing\\
I_1(\ P_3\ ) \quad &= \quad \varnothing\\
&\ \ \ldots
\end{aligned}
$$

Así pues, como vemos, la interpretación I_1 asigna al símbolo predicativo ternario P el conjunto de ternas ordenadas de personajes de *El Quijote* en las cuales el 1º componente aparece en la novela antes que el 2º, y el 2º antes que el 3º.

Por consiguiente, la terna <Quijote, ama, sobrina> pertenecerá a la interpretación de P bajo I_1, ya que, efectivamente, esos tres personajes se mencionan en ese orden (de hecho, Don Quijote es el primer personaje que se menciona en la novela, justo a continuación se menciona al ama, y justo después a la sobrina).

Sin embargo, la terna <Quijote, Sancho, mozo Andrés> no pertenecerá a dicha interpretación, ya que el mozo Andrés se menciona antes que Sancho en la obra. Concretamente, el mozo Andrés aparece por primera vez en el cap. 4 de la Parte I, mientras que Sancho debuta tres capítulos después, en el 7.

Además, la interpretación de Q bajo I_1 contiene únicamente la terna ordenada <Cardenio, Cardenio, Cardenio>. Y la interpretación de todos los demás simpred ter está sencillamente vacía.

De cualquier modo, salta a la vista que en todos los casos hemos asignado a cada símbolo predicativo ternario un conjunto de ternas ordenadas de personajes de *El Quijote*. Y por consiguiente, se cumple la condición estipulada, según la cual la interpretación ha de asignar a cada simpred ter del lenguaje un conjunto de ternas ordenadas de elementos del dominio.

§ 19.8. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred bin, basada en el dominio GVP. Denomina "J_2" a dicha interpretación. Para ello, has de indicar el valor bajo J_2 de cada simpred bin, tal y como acabamos de hacer con I_1.
2. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred ter, basada en el conjunto E_1, tú propusiste en **§ 16.13** (2). Denomina "J_1" a dicha interpretación

§ 19.9. SIMPRED TER Y RELACIONES

Como explicamos en **§ 3.3** , los símbolos predicativos ternarios son correlatos lejanos de los **predicados relacionales** del lenguaje natural que relacionan tres objetos, como "estar entre una cosa y otra" o "darle un recado a una persona de parte de otra".

Pues bien, al interpretar un símbolo predicativo ternario mediante un conjunto de ternas ordenadas de elementos del dominio, estamos haciendo algo parecido, salvando las distancias, a cuando cuando interpretamos un predicado relacional como expresando una **relación entre tres cosas**. Esto es lo que hacemos, por ejemplo, cuando interpretamos el predicado "estar entre una cosa y otra" como expresando la relación que se da entre tres personas, cuando la primera está entre la segunda y la tercera. Y algo similar, análogamente, respecto a la relación que hay entre tres personas, cuando la primera le da un recado a la segunda, de parte de la tercera.

Sin embargo, de forma paralela a lo que hemos venido avisando en **§ 18.3** y **§ 19.3** , hay que hacer constar que el conjunto de ternas ordenadas del dominio que una interpretación asigna a un simpred ter, no siempre corresponde a una relación reconocible entre los componentes de esos pares.

Y eso ocurre, en particular, con la terna

<Cardenio, Cardenio, Cardenio>

la cual no obedece a ninguna relación intuitivamente reconocible, más allá de ser la repetición de este personaje tres veces, como 1º, 2º y 3º componente de esa terna.

Por consiguiente, aquí tenemos también una diferencia importante entre la interpretación de los simpred ter de nuestro lenguaje formal, y el modo en que entendemos los predicados relacionales del lenguaje natural. Detrás de los predicados del lenguaje natural siempre hay alguna relación tangible, que nos permite *entender* (o *captar*) el significado de ese predicado. Mientras que en la interpretación de un símbolo predicativo ternario, es posible atribuirle cualquier conjunto de ternas ordenadas del dominio que queramos estipular, por caprichoso que sea.

§ 19.10. LA INTERPRETACIÓN DE LOS SIMPRED CUATERNARIOS, QUINARIOS, ETC

Llegados a este punto, se puede adivinar que la interpretación de los simpred cuaternarios, quinarios, 6-arios, etc, sigue exactamente el mismo patrón que los anteriores, pero referido a secuencias de 4 componentes, o bien de 5 componentes, o bien de 6 componentes, etc.

Además, conforme avanzamos en esta escala de complejidad, los ejemplos son más abstractos, y menos habituales.

Por todo ello, no vamos a dar más explicaciones al respecto de estos casos. Cualquiera las puede reconstruir, si quiere, a partir de los casos anteriores.

§ 19.11. CUESTIONES

1. Basándote en lo que acabas de leer, ¿qué crees que debe asignar una interpretación a un simpred cuaternario?
2. ¿Y a uno quinario (es decir, 5-ario)?
3. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.

b) Qué es lo que más te ha costado entender.

c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.

d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 20

La interpretación de las fórmulas atómicas de igualdad y con simpred mon

§ 20.1. LA INTERPRETACIÓN DE LAS FÓRMULAS ATÓMICAS DE IGUALDAD

Una vez que hemos definido la interpretación de las constantes y símbolos predicativos de nuestro lenguaje formal, ha llegado el momento de dar valores a las fórmulas.

Empezaremos con las fórmulas más sencillas, que son las fórmulas atómicas. Y en particular, vamos a empezar con las fórmulas de igualdad.

Pues bien, sea I una interpretación de lenpred, y sean k_1 y k_2 constantes cualesquiera de lenpred. En tal caso, el valor de la fórmula $k_1 = k_2$ bajo I será $\mathbb{V}$, si y solo si la interpretación I asigna a las constantes k_1 y k_2 exactamente el mismo objeto.

En resumidas cuentas:

$$I(\ k_1 = k_2\ ) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si el objeto } I(\ k_1\ ) \text{ es idéntico a } I(\ k_2\ ) \\ \\ \mathbb{F} & \text{si el objeto } I(\ k_1\ ) \text{ es distinto a } I(\ k_2\ ) \end{cases}$$

§ 20.2. CUESTIONES

Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior (literalmente, tal y como aparece ahí). Debes memorizarla para el control correspondiente a este tema.

A lo largo del tema, en la realización de todas las cuestiones planteadas:

- Intenta prestar atención a los pequeños detalles.
- Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el manual.
- **Si estás trabajando en el aula, contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.** (Lo que no te dé tiempo a entregar en el aula, puedes trabajarlo en tus horas de estudio individual.)

§ 20.3. CONEXIÓN ENTRE LA INTERPRETACIÓN DEL SÍMBOLO DE IGUALDAD DE LENPRED Y EL LENGUAJE NATURAL

Como ya sabíamos, el símbolo de igualdad ($=$) está llamado a representar la relación de igualdad (o *relación de identidad*) en nuestro razonamiento deductivo. De ahí la estipulación de **§ 20.1** .

En efecto, dicha estipulación nos viene a decir que una igualdad entre dos nombres de objetos es verdadera, bajo una determinada interpretación, si y solo si esos dos nombres corresponden al mismo objeto, bajo esa interpretación.

Salvando las distancias, esto es comparable a cuando decimos, en el lenguaje natural, que el enunciado

Lucila Godoy es Gabriela Mistral (1)

es verdadero, porque esos dos nombres propios (el nombre real de la escritora, "Lucía Godoy", y el apodo que ella misma se puso, "Gabriela Mistral") corresponden a la misma persona.

O bien, por poner otro ejemplo, como cuando decimos en el lenguaje natural que el enunciado

Bizancio es Constantinopla (2)

es verdadero, porque esos dos nombres propios corresponden a la misma ciudad.

§ 20.4. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de dos nombres propios que correspondan a la misma persona o a la misma cosa.
2. Escribe un enunciado similar a (1) y (2), pero usando los nombres propios que acabas de sugerir.

En tu respuesta, evita usar enunciados como "El autor de *Don Quijote* es Cervantes", o "La capital de España es Madrid". Esas respuestas no se ajustan a lo que se pide, porque "El autor de *Don Quijote*" y "La capital de España" no son nombres propios, sino *descripciones*, y más concretamente, lo que se llama *"descripciones definidas"*. En efecto, esas dos expresiones permiten identificar unívocamente un objeto (un escritor y una ciudad, respectivamente), pero no constituyen un *nombre propio* de dichos objetos.

§ 20.5. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE FÓRMULAS DE IGUALDAD

Vamos a retomar una vez más la interpretación I_1, tal y como la hemos definido en sucesivos estadios, en **§ 17.3** , **§ 17.11** , **§ 18.10** y **§ 19.7** .

Y vamos a empezar echando un vistazo a los objetos que dicha interpretación asigna a las constantes del lenguaje, y que están indicados en **§ 17.3** .

En concreto, dijimos que $I_1(a)$ = Don Quijote, mientras que $I_1(b)$ = Sancho Panza. Por consiguiente, tendremos:

$$I_1(a = b) = \mathbb{F}$$

Del mismo modo, como $I_1(b)$ = Sancho Panza, mientras que $I_1(c)$ = Dulcinea, también tendremos:

$$I_1(b = c) = \mathbb{F}$$

Sin embargo, como $I_1(c)$ = Dulcinea, y también $I_1(c_1)$ = Dulcinea (y lo mismo con c_2, c_3, etc) entonces podemos concluir que

$$I_1(c = c_1) = \mathbb{V} \qquad I_1(c = c_2) = \mathbb{V} \qquad I_1(c_3 = c_1) = \mathbb{V} \qquad \text{etc}$$

§ 20.6. CUESTIONES

1. Indica una fórmula de igualdad que sea $\mathbb{V}$ bajo I_1.
2. Indica una fórmula de igualdad que sea $\mathbb{F}$ bajo I_1.

§ 20.7. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE FÓRMULAS DE IGUALDAD

A continuación, como segundo ejemplo, retomaremos la interpretación I_3, tal y como la hemos definido en **§ 17.5** , **§ 18.1** y **§ 19.1** .

Pues bien, basta con echar un vistazo a los objetos que esta otra interpretación asignaba a las constantes del lenguaje, los cuales están indicados en **§ 17.5** .

En particular, dijimos que $I_3(\ a\ ) =$ Natalia Gutman, mientras que $I_3(\ b\ ) =$ Edificio Luis Vives y $I_3(\ c\ ) = \pi$, por lo que tendremos:

$$I_3(\ a = b\ ) = \mathbb{F} \qquad I_3(\ b = c\ ) = \mathbb{F} \qquad I_3(\ c = a\ ) = \mathbb{F} \qquad \text{etc}$$

Sin embargo, también dijimos que $I_3(\ c_1\ ) = \pi$, $I_3(\ c_2\ ) = \pi$, etc, por lo que tendremos:

$$I_3(\ c = c_1\ ) = \mathbb{V} \qquad I_3(\ c_2 = c\ ) = \mathbb{V} \qquad I_3(\ c_3 = c_5\ ) = \mathbb{V} \qquad \text{etc}$$

§ 20.8. CUESTIONES

1. Indica una fórmula de igualdad que sea $\mathbb{V}$ bajo I_3.

2. Indica una fórmula de igualdad que sea $\mathbb{F}$ bajo I_3.

3. Indica un dominio de interpretación y unos valores de dicho dominio para las constantes a, b, c y c_1. (Puede ser la misma interpretación J_1 que propusiste en **§ 17.8**, si la recuerdas, o cualquier otra que se te ocurra ahora mismo.)

4. Indica una fórmula de igualdad que sea $\mathbb{V}$ bajo la interpretación que acabas de dar, si la hay. (Si no existe dicha fórmula, explica por qué.)

5. Indica una fórmula de igualdad que sea $\mathbb{F}$ bajo esa misma interpretación, si la hay. (Si no existe dicha fórmula, explica por qué.)

§ 20.9. LA INTERPRETACIÓN DE LAS FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED MONARIOS

Naturalmente, las fórmulas de igualdad no son las únicas fórmulas atómicas (flatoms) de lenpred, sino que hay muchas otras. En efecto, hay flatoms que contienen un simpred monario, hay flatoms que contienen un simpred binario distinto de $=$ (es decir, un simpred binario no lógico), hay flatoms que contienen un simpred ternario, etc.

Pues bien, a continuación nos vamos a encargar de la interpretación de las flatoms con simpred monarios. Es decir, flas como Fa, Fb, Ga, Hc_3, etc

Dicho esto, sea I una interpretación de lenpred, y sea U un simpred monario y k una constante cualquiera. En tal caso, el valor de la fórmula Uk bajo I será $\mathbb{V}$ si y solo si el objeto que la interpretación I asigna a la constante k pertenece al subconjunto del dominio que I asigna al simpred U .

En resumidas cuentas:

$$I(\ Uk\ ) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si el objeto } I(\ k\ ) \text{ pertenece a } I(\ U\ ) \\ \\ \mathbb{F} & \text{si el objeto } I(\ k\ ) \text{ no pertenece a } I(\ U\ ) \end{cases}$$

§ 20.10. CUESTIONES

Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior (literalmente, tal y como aparece ahí). Debes memorizarla para el control correspondiente a este tema.

§ 20.11. CONEXIÓN ENTRE LA INTERPRETACIÓN DE LOS SIMPRED MON Y EL LENGUAJE NATURAL

Como ya sabíamos, los simpred mon están llamados a representar, en nuestro razonamiento deductivo, los predicados simples (es decir, los predicados que se aplican a un único objeto). De ahí la estipulación de **§ 20.1** .

En efecto, dicha estipulación nos viene a decir que la atribución de un predicado a un objeto es verdadera, si y solo si ese objeto tiene, efectivamente, la propiedad correspondiente a dicho predicado.

§ 20.12. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE FLATOMS CON SIMPRED MONARIOS

Vamos a retomar una vez más la interpretación I_1, y en esta ocasión nos fijaremos en los objetos que asigna a las constantes, así como los subconjuntos del dominio que asigna a los simpred mon del lenguaje.

En particular, recordamos, por un lado, que:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
I_1(\, a \,) & = & \text{Don Quijote} & I_1(\, c_1 \,) & = & \text{Dulcinea} \\[2ex]
I_1(\, b \,) & = & \text{Sancho Panza} & I_1(\, c_2 \,) & = & \text{Dulcinea} \\[2ex]
I_1(\, c \,) & = & \text{Dulcinea} & & \dots &
\end{array}$$

Y por otro lado, recordamos que:

$$\begin{array}{lcl}
I_1(\, F \,) & = & \{\text{personajes femeninos de } \textit{El Quijote}\,\} \\[2ex]
I_1(\, G \,) & = & \{\text{personajes masculinos de} \qquad \text{''} \qquad\} \\[2ex]
I_1(\, H \,) & = & \{\text{personajes de la aldea de Don Quijote}\} \\[2ex]
I_1(\, F_1 \,) & = & \{\text{Dulcinea, Cardenio y el bachiller}\} \\[2ex]
I_1(\, F_2 \,) & = & \{\text{Dulcinea, Cardenio y el bachiller}\} \\[2ex]
I_1(\, F_3 \,) & = & \{\text{Dulcinea, Cardenio y el bachiller}\} \\[2ex]
& \dots &
\end{array}$$

Por consiguiente, resulta claro que, por ejemplo, la fórmula Fa resultará $\mathbb{F}$ bajo I_1, ya que Don Quijote no es un personaje femenino. Mientras que la fórmula Fc resultará $\mathbb{V}$, ya que Dulcinea sí es un personaje femenino.

Por otro lado, resulta claro también que la fórmula Hb será $\mathbb{V}$ bajo I_1, ya que Sancho Panza es un personaje de la aldea de Don Quijote. Mientras que, por su parte, la fórmula Hc será $\mathbb{F}$ bajo I_1, ya que Dulcinea es de otra aldea distinta.

Y por poner algunos ejemplos más, podemos decir que la fórmula F_1a será $\mathbb{F}$ bajo I_1, ya que I_1 asigna Don Quijote a la constante a, pero Don Quijote no pertence al conjunto {Dulcinea, Cardenio, bachiller}, que es el conjunto que I_1 asigna al simpred F.

Y para terminar, podemos decir que la fórmula F_1c_3 será $\mathbb{V}$ bajo I_1, ya que I_1 asigna Dulcinea a la constante c_3, y Dulcinea sí pertenece al cjto que I_1 asigna al simpred F_1.

§ 20.13. CUESTIONES

1. Indica una flatom con simpred mon que sea $\mathbb{V}$ bajo I_1.
2. Indica una flatom con simpred mon que sea $\mathbb{F}$ bajo I_1.
3. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:
   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
   b) Qué es lo que más te ha costado entender.
   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.

d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 21

La interpretación de las fórmulas atómicas con simpred bin

§ 21.1. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE FLATOMS CON SIMPRED MONARIOS

Ahora vamos a retomar la interpretación I_3, fijándonos en los objetos que asigna a las constantes, y en los subconjuntos del dominio que asigna a los simpred mon del lenguaje:

$I_3(a)$	$=$	Natalia Gutman	$I_3(c_1)$	$=$	π
$I_3(b)$	$=$	Edif. Luis Vives	$I_3(c_2)$	$=$	π
$I_3(c)$	$=$	π		$\ldots$	

$$I_3(\boxed{F}) = \{\text{Natalia Gutman, Edif. Luis Vives}, \pi\}$$

$$I_3(\boxed{G}) = \{\text{Natalia Gutman}, \pi\}$$

$$I_3(\boxed{H}) = \{\pi\}$$

$$I_3(\boxed{F_1}) = \varnothing$$

$$I_3(\boxed{F_2}) = \varnothing$$

$$I_3(\boxed{F_3}) = \varnothing$$

$$\ldots$$

Pues bien, a la vista de estos valores, un ejemplo de flatom que resulta $\mathbb{V}$ bajo I_3 es, obviamente, $\boxed{Fa}$. Y un ejemplo de flatom que resulta $\mathbb{F}$ bajo I_3 es $\boxed{Gb}$.

§ 21.2. CUESTIONES

1. Indica una flatom con simpred mon que sea $\mathbb{V}$ bajo I_3.
2. Indica una flatom con simpred mon que sea $\mathbb{F}$ bajo I_3.
3. Indica un dominio de interpretación y unos valores de dicho dominio para las constantes $\boxed{a}$, $\boxed{b}$ y $\boxed{c}$, y los simpred monarios $\boxed{F}$, $\boxed{G}$ y $\boxed{H}$. (Puede ser la misma interpretación J_1 que propusiste en **§ 17.8**, si la recuerdas, o cualquier otra que se te ocurra ahora mismo.)

4. Indica una flatom con simpred monario que sea $\mathbb{V}$ bajo la interpretación que acabas de dar, si la hay. (Si no existe dicha fórmula, explica por qué.)

5. Indica una flatom con simpred monario que sea $\mathbb{F}$ bajo esa misma interpretación, si la hay. (Si no existe dicha fórmula, explica por qué.)

§ 21.3. LA INTERPRETACIÓN DE LAS FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED BIN NO LÓGICOS

Ha llegado el momento de encargarnos de la interpretación de las flatoms con simpred binarios, excluyendo a $=$, del que ya tratamos en su momento.

Pues bien, sea I una interpretación de lenpred, sea U^2 un simpred binario no lógico, y sean k_1 y k_2 constantes cualesquiera. En tal caso, el valor de la fórmula $U^2k_1k_2$ bajo I será $\mathbb{V}$ si y solo si el par ordenado de objetos que la interpretación I asigna a las constantes k_1 y k_2, por ese orden, pertenece al conjunto de pares ordenados que I asigna al simpred U^2.

En resumidas cuentas:

$$I(U^2k_1k_2) = \begin{cases} \mathbb{V} \quad \text{si} \quad < I(k_1), I(k_2) > \in I(U) \\ \\ \mathbb{F} \quad \text{si} \quad < I(k_1), I(k_2) > \notin I(U) \end{cases}$$

§ 21.4. CUESTIONES

Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior (literalmente, tal y como aparece ahí). Debes memorizarla para el control correspondiente a este tema.

§ 21.5. CONEXIÓN ENTRE LA INTERPRETACIÓN DE LOS SIMPRED BIN NO LÓGICOS Y EL LENGUAJE NATURAL

Como ya sabíamos, los simpred bin están llamados a representar, en nuestro razonamiento deductivo, los predicados relacionales entre dos objetos (es decir, los predicados que atribuyen una relación a dos objetos). De ahí la estipulación de **§ 20.1** .

En efecto, dicha estipulación nos viene a decir que la atribución de un predicado relacional a dos objetos es verdadera, si y solo si esos dos objetos, en el orden en el que se les menciona, están efectivamente en la relación correspondiente a dicho predicado.

§ 21.6. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE FLATOMS CON SIMPRED BINARIOS

Vamos a retomar una vez más la interpretación I_1, y en esta ocasión nos fijaremos en los objetos que asigna a las constantes, así como los conjuntos de pares ordenados que asigna a los simpred bin del lenguaje.

En particular, recordamos, por un lado, que:

$I_1(a)$ = Don Quijote $I_1(c_1)$ = Dulcinea

$I_1(b)$ = Sancho Panza $I_1(c_2)$ = Dulcinea

$I_1(c)$ = Dulcinea ...

Y por otro lado, recordamos que:

$I_1(K)$ = { pares ord de DQ, cuyo 1º componente ama al 2º }

$I_1(L)$ = { pares ord de DQ, cuyo 1º componente protege al 2º }

$I_1(M)$ = { pares ord de DQ, cuyo 1º componente alecciona al 2º }

$I_1(K_1)$ = { <Dulcinea, Cardenio> , <Cardenio, bachiller> }

$I_1(K_2)$ = { <Dulcinea, Cardenio> , <Cardenio, bachiller> }

$I_1(K_3)$ = { <Dulcinea, Cardenio> , <Cardenio, bachiller> }

...

Pues bien, a la vista de estos valores, un ejemplo de flatom con simpred bin que resulta $\mathbb{V}$ bajo I_1, es obviamente Kac, ya que el valor de a bajo I_1 es Don Quijote, el valor de c bajo I_1 es Dulcinea, y es notorio el amor que siente el viejo hidalgo por dicha labradora.

Mientras que, por su parte, la fórmula Kca resultará $\mathbb{F}$ bajo I_1, ya que Dulcinea no ama en absoluto a Don Quijote, como ya recordamos en su momento.

§ 21.7. CUESTIONES

1. Indica una flatom con simpred bin no lógico que sea $\mathbb{V}$ bajo I_1.

2. Indica una flatom con simpred bin no lógico que sea $\mathbb{F}$ bajo I_1.

§ 21.8. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE FLATOMS CON SIMPRED BINARIOS

Ahora vamos a retomar la interpretación I_3, fijándonos en los objetos que asigna a las constantes y en los conjuntos de pares ordenados que asigna a los simpred bin del lenguaje:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
I_3(a) & = & \text{Natalia Gutman} & I_3(c_1) & = & \pi \\
I_3(b) & = & \text{Edif. Luis Vives} & I_3(c_2) & = & \pi \\
I_3(c) & = & \pi & & \dots &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lcl}
I_1(K) & = & \{ < \text{Gutnam}, \text{Vives} > , < \text{Gutnam}, \pi > \} \\
I_1(L) & = & \{ < \text{Gutnam}, \text{Gutnam} > \} \\
I_1(M) & = & \varnothing \\
I_1(K_1) & = & \{ \text{todos los pares ord formados por Gutnam, Vives, o } \pi \} \\
I_1(K_2) & = & \{ \text{todos los pares ord formados por Gutnam, Vives, o } \pi \} \\
I_1(K_3) & = & \{ \text{todos los pares ord formados por Gutnam, Vives, o } \pi \} \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

Pues bien, a la vista de estos valores, un ejemplo de flatom con simpred mon no lógico que resulta $\mathbb{V}$ bajo I_1, es obviamente Laa, ya que el valor de a bajo I_1 es Natalia Gutman, y el par ordenado <Gutman, Gutman> pertenece al conjunto de pares ord que I_1 asigna a L.

Mientras que, por su parte, la fórmula Mca resultará $\mathbb{F}$ bajo I_1, ya que I_1 asigna al simpred bin M el conjunto vacío, con lo que no contiene ningún par ordenado (ni, en particular, el par $< \pi$,Gutnam$>$, que es el que se forma mediante las interpretaciones bajo I_1 de las constantes c y a).

§ 21.9. CUESTIONES

1. Indica una flatom con simpred bin no lógico que sea $\mathbb{V}$ bajo I_3.

2. Indica una flatom con simpred bin no lógico que sea $\mathbb{F}$ bajo I_3.

3. Indica un dominio de interpretación y unos valores de dicho dominio para las constantes a, b y c, y los simpred binarios K, L y M. (Puede ser la misma interpretación J_1 que propusiste en **§ 17.8**, si la recuerdas, o cualquier otra que se te ocurra ahora mismo.)

4. Indica una flatom con simpred binario no lógico que sea $\mathbb{V}$ bajo la interpretación que acabas de dar, si la hay. (Si no existe dicha fórmula, explica por qué.)

5. Indica una flatom con simpred binario no lógico que sea $\mathbb{F}$ bajo esa misma interpretación, si la hay. (Si no existe dicha fórmula, explica por qué.)

6. Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

   a) Qué es lo que más te ha interesado de este tema.

   b) Qué es lo que más te ha costado entender.

   c) Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.

   d) Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.