Manual del curso

LÓGICA FORMAL 2

Lógica de primer orden

Gustavo Picazo

DISPONIBLE EN:
webs.um.es/picazo

Univ. de Murcia – Curso 25.26

1ª ed., Versión 2 (06.04.2026)

Versión 2 de este manual, que incorpora los siguientes cambios sobre la versión anterior:

- Se han añadido los temas 22–30.

- Se han corregido pequeñas erratas y desajustes a lo largo de los temas 1–21, y se han recolocado como sección aparte las "Cuestiones finales" de cada uno de estos temas.

- Se ha modificado significativamente la sección **§ 2.3** .

Agradecimiento: Agradezco a José Ángel Gascón Salvador su atenta lectura de la Versión 1 este manual y sus sugerencias de mejora.

Índice de temas

Tema 1

Organización de la asignatura – Argumentos deductivos no proposicionales

§ 1.1. LOGFOR1 Y LOGFOR2

La asignatura **Lógica formal 2** (abreviadamente, **"logfor2"**) es continuación de la asignatura **Lógica formal 1** (abreviadamente, **"logfor1"**), cuyos conocimientos presupone.

Asimismo, este manual es continuación del manual de logfor1. Y para leer con aprovechamiento este manual, **es necesario haber estudiado previamente el manual de logfor1, y es necesario tenerlo a mano, para volver a consultarlo cuantas veces se necesite**.

Ambos manuales están disponibles para su libre descarga en la web:

`webs.um.es/picazo`

§ 1.2. CUESTIONES

Explica con tus propias palabras la relación que existe entre las asignaturas logfor1 y logfor2, y sus respectivos manuales.

A lo largo del tema, en la realización de todas las cuestiones planteadas:

- Intenta prestar atención a los pequeños detalles.
- Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el manual.
- **Si estás trabajando en el aula, contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.** (Lo que no te dé tiempo a entregar en el aula, puedes trabajarlo en tus horas de estudio individual.)

§ 1.3. ORGANIZACIÓN DOCENTE

La organización docente de esta asignatura es también básicamente similar a la de logfor1, y se debe consultar en el Tema 1 de su correspondiente manual. Ahora bien, hay que tener en cuenta los siguientes cambios:

1. Las fechas del Cronograma son distintas.
2. La calificación de esta asignatura se calcula sobre 100 puntos. Por consiguiente, para aprobar hace falta obtener 50 puntos, y la máxima nota posible es 100.
3. En esta asignatura, la realización de tutorías no se valora en la puntuación, aunque siguen siendo recomendables para apoyar el estudio de la materia.

4. En esta asignatura habrá **30** temas, valorados sobre 1 punto cada uno, y **10** controles, valorados sobre 3 puntos cada uno. Por consiguiente, mediante el **"bloque de curso"** (temas y controles) se puede llegar a obtener una calificación de 60 puntos.

5. El examen final se valora sobre 40 puntos, pero contiene una primera parte opcional (valorada en 60 puntos), para mejorar la puntuación obtenida por temas y controles.

6. De inicio, se proporcionan los temas 1–21. El manual completo se subirá al aula virtual a lo largo del cuatrimestre.

7. A la hora de realizar los temas de esta asignatura en el aula, **debes traer contigo el manual logfor1**, además del tema correspondiente de logfor2 (ya sea en papel o en un dispositivo).

8. En la realización de los temas en el aula, el tiempo mínimo de permanencia es de 15 minutos, antes de poder entregar las cuestiones. Si terminas antes, puedes usar el tiempo restante para repasar y memorizar el tema de cara al control correspondiente.

9. Si todo el mundo entrega un tema antes de la hora, se usará el tiempo restante para hacer una "mini-junta", a demanda del alumnado que permanezca en el aula.

10. En los controles, no hay tiempo mínimo de permanencia en el aula.

11. El último día de clase se ha programado un "Examen final anticipado opcional", el cual no corre convocatoria (pero tendrá validez en el acta para quien lo realice, a falta de la convocatoria oficial).

12. Se ha habilitado un "Foro de detección de erratas y sugerencias de mejora". El valor de las contribuciones al mismo, así como las sugerencias en las cuestiones finales de los temas, se usarán como

criterio para otorgar las Matrículas de Honor, en caso de empate en la nota numérica.

§ 1.4. CUESTIONES

1. Indica sobre cuántos puntos se califica la asignatura.
2. Indica cuántos puntos son necesarios para aprobar.
3. En esta asignatura, ¿puntúa la asistencia a tutorías para la evaluación?
4. Indica cuántos temas habrá.
5. Indica sobre cuántos puntos se evalúa cada tema.
6. Indica cuántos controles habrá.
7. Indica sobre cuántos puntos se evalúa cada control.
8. Indica sobre cuántos puntos se valora el examen final.
9. Indica qué temas se proporcionan en el inicio del cuatrimestre.
10. Indica qué ocurrirá con el resto de temas.
11. Indica qué material debes traer contigo al aula para realizar los temas de esta asignatura.
12. Indica el tiempo mínimo de permanencia en el aula en los temas.
13. ¿Hay tiempo mínimo de permanencia en el aula en los controles?

§ 1.5. ADVERTENCIAS PRELIMINARES

Todas las *Advertencias preliminares* que aparecen al inicio de los temas 2 –5 del manual de logfor1, se aplican igualmente al presente manual.

§ 1.6. OBJETOS

En lo sucesivo, y a lo largo de todo el manual, entenderemos que un **"objeto"** es cualquier persona, animal o cosa, concreta o abstracta.

Así por ejemplo, según este uso, el Edificio Luis Vives, la violoncelista Natalia Gutman y el número π, son objetos. El número π (leído *"pi"*) es el resultado de dividir la longitud de una circunferencia cualquiera por su diámetro, y vale un poco más de $3,14$.

En particular, el Edificio Luis Vives y Natalia Gutman son cosas concretas (es decir, materiales, espacio-temporales), mientras que el número π es una cosa abstracta (es decir, una construcción de la comunidad cognitiva humana).

§ 1.7. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de objeto.
2. Especifica si se trata de una persona, animal o cosa.
3. Especifica si es concreta o abstracta.

§ 1.8. ARGUMENTOS DEDUCTIVOS DE CARÁCTER NO PROPOSICIONAL

En los temas 2 y 3 de logfor1, trazamos un panorama sobre el estudio de la argumentación humana, con especial hincapié en la argumentación deductiva y la lógica formal.

Además, a lo largo de dicha asignatura, presentamos:

- Un lenguaje formal: el lenguaje de la lógica proposicional clásica, *lenprop*.
- Una forma de interpretar ese lenguaje: la *semántica vf*.
- Tres sistemas deductivos (*dednatprop*, *tv* y *arprop*), para verificar la validez de argumentos formales en dicho lenguaje.

Pues bien, ahora ha llegado el momento de señalar que *esas herramientas, aun siendo eficaces, se quedan cortas.*

Ello es así porque **existen muchos argumentos deductivos que no se pueden formalizar en lenprop**. Por consiguiente, esos argumentos **no se pueden interpretar mediante la semántica vf, ni se puede comprobar su validez mediante dednatprop, tv o arprop**.

A tales argumentos – que, aun siendo deductivos, no se dejan tratar mediante la lógica proposicional — se les denomina **"argumentos deductivos de carácter no proposicional"** (o más abreviadamente, **"argumentos deductivos no proposicionales"**). A continuación vamos a ver algunos ejemplos.

§ 1.9. CUESTIONES

Basándote en lo que acabas de leer, indica brevemente en qué consiste un argumento deductivo no proposicional.

§ 1.10. UN EJEMPLO DE ARGUMENTO DEDUCTIVO NO PROPOSICIONAL

Un ejemplo clásico de argumento deductivo que no se puede formalizar adecuadamente en el lenguaje de la lógica proposicional es el siguiente:

Todos los seres humanos son mortales.
Sócrates es un ser humano. (1)
Por tanto, Sócrates es mortal.

Es fácil ver que (1) es un argumento deductivo, porque resulta del todo imposible que sus premisas sean verdaderas y su conclusión falsa. En efecto, si todos los seres humanos son mortales, y Sócrates es uno de ellos, entonces Sócrates tiene que ser también mortal, sin más remedio.

Sin embargo, si probamos a formalizar (1) en lenprop, mediante la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, obtendremos algo así como lo siguiente:

p : *Todos los seres humanos son mortales.*

r : *Sócrates es un ser humano.*

s : *Sócrates es mortal.*

Pues bien, resulta obvio que s **no es una consecuencia lógica** de p y r. En efecto:

$$\boxed{p}\ ,\ \boxed{r}\quad \not\models_{\text{PROP}}\quad \boxed{s}$$

Por consiguiente, tampoco se podrá validar este argumento formal mediante ninguno de los cálculos deductivos que estudiamos en logfor1. En efecto, ninguno de estos cálculos contiene la derivación formal correspondiente a dicho argumento:

$$\boxed{p}\ ,\ \boxed{r}\quad \nvdash_{\text{DNP}}\quad \boxed{s}$$

$$\boxed{p}\ ,\ \boxed{r}\quad \nvdash_{\text{TV}}\quad \boxed{s}$$

$$\boxed{p}\ ,\ \boxed{r}\quad \nvdash_{\text{AP}}\quad \boxed{s}$$

En resumen, (1) **está totalmente fuera** del alcance de la teoría lógica que estudiamos en logfor1: aun siendo un argumento deductivo, no permite ser analizado por la lógica proposicional (se trata de un *argumento deductivo no proposicional*).

§ 1.11. PROPOSICIONES UNIVERSALES

Un aspecto llamativo de la primera premisa del argumento (1) es que predica una propiedad de *todos* los objetos de una cierta clase (en concreto, los seres humanos).

A este tipo de afirmaciones les llamamos **proposiciones universales** (o **"generalizaciones universales"**). Si lo que afirma la generalización es verdad, entonces todos los objetos de esa clase cumplirán con la condición que se les atribuye — como ocurre con los seres humanos, que todos ellos son (somos) mortales.

Pues bien, este tipo de expresiones tendrán un gran protagonismo en el presente curso, como iremos viendo en los temas sucesivos.

§ 1.12. CUESTIONES

1. Inspirándote en el argumento (1), pon un ejemplo de argumento deductivo no proposicional en el que aparezca una proposición universal.
2. Formaliza dicho argumento mediante simprops, de modo análogo a como se hace en **§ 1.10** .
3. Indica si el argumento formal que acabas de dar es válido o inválido.
4. Indica si crees que dicho argumento formal es derivable en DNP, TV o AP.

§ 1.13. OTRO EJEMPLO DE ARGUMENTO DEDUCTIVO NO PROPOSICIONAL

Un segundo ejemplo de argumento deductivo no proposicional es el siguiente:

Mulhacén y Veleta son picos de Granada de más de 3.000 m.
Por tanto, en Granada hay picos de más de 3.000 m. (2)

En este caso, al igual que antes, es claro que estamos ante un argumento deductivo. En efecto, si la premisa es verdadera, entonces la conclusión también tiene que ser necesariamente verdadera: sería absurdo sostener al mismo tiempo que Mulhacén y Veleta son picos de Granada de más de 3.000 m, y que en Granada no hay picos de más de 3.000 m.

Sin embargo, aquí también sucede que, si intentamos formalizar (2) en lenprop, obtenemos algo que no es un argumento formalmente válido. En efecto, la tabla de convenciones simbólicas, en este caso, vendría a ser algo así como:

p : *Mulhacén y Veleta son picos de Granada de más de 3.000 m.*

r : *En Granada hay picos de más de 3.000 m.*

Pero aquí también observamos que r no es consecuencia lógica de p:

$$p \quad \not\models_{\text{PROP}} \quad r$$

Por consiguiente, r no es derivable de p en ninguno de los cálculos deductivos que estudiamos en logfor1:

$$p \nvdash_{\text{DNP}} r \qquad\qquad p \nvdash_{\text{TV}} r \qquad\qquad p \nvdash_{\text{AP}} r$$

Y en definitiva, podemos concluir que estamos ante otro argumento deductivo no proposicional.

§ 1.14. PROPOSICIONES EXISTENCIALES

Un aspecto llamativo de la conclusión del argumento (2) es que afirma que *hay* objetos de una cierta clase (en concreto, picos de más de 3.000 metros en Granada).

Pues bien, cuando afirmamos que *"hay"* objetos de una cierta clase, entonces estamos haciendo una **proposición existencial**.

También estamos haciendo una proposición existencial cuando decimos que *"existen"* objetos de una cierta clase. Por ejemplo, cuando decimos que:

"En Granada *existen* picos de más de 3.000 m"

Y también estamos haciendo una proposición existencial cuando decimos que *"algunos"* objetos son de cierta clase. Por ejempo, cuando decimos que:

"*Algunos* picos de Granada tienen más de 3.000 m

En cualquiera de estos casos estamos diciendo lo mismo, y estamos haciendo una proposición existencial.

Naturalmente, si lo que se afirma mediante una proposición existencial es cierto, entonces es que existen uno o más objetos que cumplen con la condición en cuestión (como ocurre con los picos granadinos de más de 3.000 m).

Pues bien, este tipo de expresiones tendrán también un gran protagonismo en el presente curso, como iremos viendo en los temas sucesivos.

§ 1.15. CUESTIONES

1. Inspirándote en el argumento (2) de **§ 1.13**, pon un ejemplo de argumento deductivo no proposicional en el que aparezca una proposición existencial.
2. Formaliza este otro argumento, e indica si es válido y si crees que es derivable en DNP, TV o AP.

§ 1.16. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 2

Panorama de contenidos – El alfabeto de lenpred – Constantes

§ 2.1. LA LÓGICA DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN CLÁSICA

El objetivo de la presente asignatura es presentar una teoría lógica que es mucho más sofisticada que la lógica proposicional clásica, pero constituye una **extensión** suya.

Por consiguiente, nuestra teoría va a ser una ampliación o continuación de la que vimos en logfor1: utiliza prácticamente todo lo que vimos allí, pero incorpora cosas nuevas, y extiende el tratamiento de lo que ya teníamos, para dar acomodo a estas nuevas incorporaciones de la manera más provechosa posible.

A dicha teoría la llamaremos **"lógica de predicados de primer orden clásica"** (abreviadamente, **"logpred"**). Y nos servirá para analizar argumentos como los de **§ 1.10** , **§ 1.13** , y otros muchos que están en su misma situación.

§ 2.2. CUESTIONES

Explica brevemente, con tus propias palabras, la relación que existe entre logpred y logprop.

A lo largo del tema, en la realización de todas las cuestiones planteadas:

- Intenta prestar atención a los pequeños detalles.
- Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el manual.
- **Si estás trabajando en el aula, contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.** (Lo que no te dé tiempo a entregar en el aula, puedes trabajarlo en tus horas de estudio individual.)

§ 2.3. PANORAMA DE LA ASIGNATURA

Empezaremos la asignatura presentando la sintaxis del lenguaje formal, que es el **lenguaje de la lógica de primer orden clásica** (abreviadamente, **"lenpred"**). Al hacerlo, intercalaremos explicaciones sobre el modo en que los símbolos y fórmulas del lenguaje formal se correlacionan con determinadas proposiciones del lenguaje natural, cuya estructura lógica representan.

A continuación, presentaremos la semántica formal para lenpred, la cual incorpora elementos de la semántica veritativo-funcional, pero exige un nivel de complejidad sustancialmente mayor.

Tras hacer todo eso, abordaremos uno de los cálculos deductivos que ya conocemos: el cálculo de deducción natural. Ampliaremos este cálculo con las reglas necesarias, para que pueda lidiar con el nuevo lenguaje y las nuevas inferencias.

El método de árboles también se puede extender para que cubra la lógica de primer orden, pero aquí no lo estudiaremos, para no sobrecargar excesivamente el manual.

En cuanto al método de tablas de verdad, no tiene ningún protagonismo en lógica de primer orden, porque no hay forma de adaptarlo al nuevo lenguaje y a las nuevas inferencias.

Por último, tocaremos brevemente tres cuestiones importantes, cuyo estudio detenido corresponde a textos más avanzados:

- la **metateoría de los cálculos deductivos** para la lógica de primer orden, incluyendo el cálculo de deducción natural y el método de árboles;
- los llamados **"resultados limitativos"**, incluyendo el *Teorema de Church* y los *teoremas de incompletitud de Gödel*;
- la **lógica de orden superior**.

§ 2.4. CUESTIONES

1. Indica cuál de los puntos indicados en el panorama te interesa más conocer, y explica sucintamente por qué.
2. Indica qué metodo deductivo de los estudiados en logfor1 no tendrá aquí ningún protagonismo, y por qué.

§ 2.5. EL LENGUAJE DE LA LÓGICA DE PREDICADOS DE PRIMER ORDEN CLÁSICA CON IDENTIDAD

A continuación, vamos a presentar el lenguaje formal con el que trabajaremos en el presente curso, que es el **lenguaje de la lógica de predicados de primer orden clásica con identidad** (abreviadamente, **"lenpred"**).

De forma análoga a como explicamos en logfor1, este lenguaje formal será nuestro **lenguaje objeto** durante el presente curso. Y el castellano, enriquecido con diversos conceptos y símbolos técnicos, será nuestro **metalenguaje**.

En otras palabras: nuestro objeto de estudio será el lenguaje formal lenpred. Y utilizaremos un castellano "técnico" (es decir, una jerga del castellano, enriquecida con conceptos y símbolos técnicos) para llevar a cabo dicho estudio.

Tampoco aquí vamos a ver a los símbolos de lenpred, sino que nos limitaremos a nombrarlos mediante símbolos metalingüísticos. Todas las consideraciones que hicimos en logfor1 respecto a la invisibilidad de los símbolos de lenprop, se aplican exactamente igual a los símbolos de lenpred.

§ 2.6. CUESTIONES

1. ¿Cual será nuestro lenguaje objeto en el presente curso?
2. ¿Y nuestro metalenguaje?
3. ¿Cómo son los símbolos de lenpred?

§ 2.7. EL ALFABETO DE LENPRED

El alfabeto de lenpred tiene seis tipos de símbolos, que iremos introduciendo paulatinamente:

1. *Constantes*
2. *Variables*
3. *Símbolos predicativos*
4. *Conectivas*
5. *Cuantificadores*
6. *Paréntesis*

Llamaremos **“operadores lógicos”** a las conectivas y a los cuantificadores.

Y llamaremos **“símbolos lógicos”** a los operadores lógicos y a un símbolo predicativo especial, llamado **“símbolo de igualdad”**. Al resto de símbolos del alfabeto les llamaremos **“símbolos no lógicos”** o **“símbolos extralógicos”**.

Por consiguiente, los símbolos extralógicos de lenpred serán: las constantes, las variables, los símbolos predicativos (salvo el símbolo de igualdad) y los paréntesis.

§ 2.8. CUESTIONES

1. Indica cuáles son los operadores lógicos de lenpred.
2. Indica cuáles son los símbolos lógicos.
3. Indica cuáles son los símbolos no lógicos.

§ 2.9. CONSTANTES

Las **constantes** de lenpred (abreviadamente, **"ctes"**) son:

a $\quad$ b $\quad$ c

c_1 $\quad$ c_2 $\quad$ c_3 $\quad \ldots$ (y así hasta el infinito)

En c_1, decimos que el 1 es un **"subíndice"**, y lo leemos así: *"ce sub uno"* (o más abreviadamente, *"ce uno"*).

§ 2.10. CUESTIONES

Especifica las ctes de lenpred, tal y como aparecen recuadradas en la sección anterior. Debes memorizarlas para un buen seguimiento de la asignatura.

§ 2.11. LAS CONSTANTES DE LENPRED Y SU CORRELATO EN EL LENGUAJE NATURAL

Las constantes de lenpred vienen a corresponder, salvando las distancias, a los nombres propios del lenguaje natural.

Los nombres propios son aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que denotamos objetos de forma directa, sin describirlos. Un ejemplo de nombre propio es "Sócrates". Otro ejemplo es "Mulhacén". Otro ejemplo es "π".

Estas expresiones no deben confundirse con las llamadas *"descripciones definidas"*, que refieren a un objeto mediante una descripción que lo identifica unívocamente. Así por ejemplo, podemos referirnos al Mulhacén como *"el pico más alto de Granada"*, ya que, efectivamente, el Mulhacén es el pico más alto de Granada. pero la expresión "el pico más alto de Granada" no es un nombre propio, sino una descripción definida de dicho objeto.

Del mismo modo, podemos referirnos al número π como *"la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro"*; pero esto último no es un nombre propio, sino una descripción definida (es decir, específica, unívoca) de dicho número.

Pues bien, las constantes de nuestro lenguaje formal harán las veces, salvando las distancias, de los nombres propios del lenguaje natural, como los que acabamos de ver.

§ 2.12. CUESTIONES

1. Da un ejemplo de nombre propio.

2. Da una descripción que identifique unívocamente el objeto que acabas de nombrar (es decir, que únicamente sea verdadero de ese objeto, y no de ningún otro).

§ 2.13. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 3

Variables – Símbolos predicativos

§ 3.1. VARIABLES

Nos ocupamos ahora de las **variables** de lenpred (abreviadamente, **“vbles”**), que son:

$\boxed{x}$ $\boxed{y}$ $\boxed{z}$

$\boxed{x_1}$ $\boxed{x_2}$ $\boxed{x_3}$ $\dots$ (y así hasta el infinito)

§ 3.2. CUESTIONES

Especifica las vbles de lenpred, tal y como aparecen recuadradas en la sección anterior. Debes memorizarlas para un buen seguimiento de la asignatura.

A lo largo del tema, en la realización de todas las cuestiones planteadas:

- Intenta prestar atención a los pequeños detalles.
- Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el manual.
- **Si estás trabajando en el aula, contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.** (Lo que no te dé tiempo a entregar en el aula, puedes trabajarlo en tus horas de estudio individual.)

§ 3.3. LAS VARIABLES DE LENPRED Y SU CORRELATO EN EL LENGUAJE NATURAL

Las variables de lenpred vienen a corresponder, salvando las distancias, a aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que nos referimos a un objeto de forma indeterminada, sin identificarlo específicamente.

Por ejemplo, supongamos que yo digo:

Siempre que voy al cine, hay una persona ruidosa que me fastidia.

En ese caso, la "persona ruidosa" no es nadie en particular, e incluso puede ser una persona distinta cada vez.

Ahora supongamos que digo:

Tengo una enfermedad equis, que aún no han sabido diagnosticar.

En ese caso, no se sabe es cuál será esa "enfermedad equis", por lo que no se le puede poner nombre.

Pues bien, las variables de nuestro lenguaje formal harán las veces, salvando las distancias, de este tipo de expresiones del lenguaje natural.

§ 3.4. CUESTIONES

Pon un ejemplo de proposición en castellano, en la que se mencione un objeto de forma indeterminada, al estilo de los casos que se acaban de proponer.

§ 3.5. SÍMBOLOS PREDICATIVOS

A continuación, el alfabeto de lenpred tiene un gran arsenal de lo que llamaremos **"símbolos predicativos"** (abreviadamente, **"simpreds"**).

Los simpred vienen ordenados por categorías, parecidas a las plantas de un edificio. Ahora bien, se trata de un "edificio" con infinitas plantas, y en cada planta hay infinitos simpred distintos.

1. **Símbolos predicativos 1-arios** (o **monarios**, abreviadamente, **"simpred mon"**):

$F \quad G \quad H$

$F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad \ldots$ (y así hasta el infinito)

2. **Símbolos predicativos 2-arios** (o **binarios**, abreviadamente, **"simpred bin"**):

$=$

K $\quad$ L

K_1 $\quad$ K_2 $\quad$ K_3 $\quad$ ... $\quad$ (y así hasta el infinito)

3. **Símbolos predicativos 3-arios** (o **ternarios**, abreviadamente, **"simpred ter"**):

M $\quad$ N

M_1 $\quad$ M_2 $\quad$ M_3 $\quad$ ... $\quad$ (y así hasta el infinito)

4. **Símbolos predicativos 4-arios** (o **cuaternarios**, abreviadamente, **"simpred 4-ar"**):

O^4 $\quad$ O^4_1 $\quad$ O^4_2 $\quad$ ... $\quad$ (y así hasta el infinito)

5. **Símbolos predicativos 5-arios** (o **quinarios**, abreviadamente, **"simpred 5-ar"**):

O^5 $\quad O_1^5$ $\quad O_2^5$ $\quad \ldots$ (y así hasta el infinito)

Y así sucesivamente, con **símbolos predicativos 6-arios** (es decir, O^6, O_1^6, O_2^6, ...), **7-arios** (O^7, O_1^7, O_2^7, ...), y así hasta el infinito.

En un simpred como O_1^4, decimos que el 4 es un **"superíndice"**, y lo leemos así: *"o sub uno súper cuatro"* (o más abreviadamente, *"o uno cuatro"*).

A cada categoría esta tabla, la llamaremos **"valencia"**, o **"número de lugares"**. Así, de los simpred monarios diremos que tienen "valencia 1" (o que son "símbolos predicativos de un lugar"); de los simpred binarios diremos que tienen "valencia 2" (o que son "símbolos predicativos de dos lugares"). Y análogamente con las categorías restantes.

El símbolo predicativo binario $=$ lo leemos *"igual"*, y le llamamos **"símbolo de igualdad"** (o **"símbolo de identidad"**). Como ya dijimos, este el único simpred que constituye un símbolo lógico, por lo que recibirá una atención especial.

§ 3.6. CUESTIONES

1. Especifica los simpred monarios y binarios recuadrados en la sección anterior. Debes memorizarlos para un buen seguimiento de la asignatura (solo los monarios y binarios, no los demás).
2. Indica un simpred de valencia 3 (el que tú quieras, dentro de esa categoría).
3. Indica un simpred de 7 lugares (el que tú quieras, dentro de esa categoría).

§ 3.7. LOS SIMPRED MON Y SU CORRELATO EN EL LENGUAJE NATURAL

Los símbolos predicativos monarios vienen a corresponder, salvando las distancias, a aquellas expresiones predicativas del lenguaje natural, mediante las cuales atribuimos una propiedad a un objeto.

Eso sucede, por ejemplo, cuando decimos

“Natalia Gutman *es violoncelista*”

O cuando decimos:

“Ese coche *es rojo*”

O cuando decimos:

“27 *es un número primo*”

En cualquiera de estos casos, estamos **atribuyendo** una propiedad a un objeto. O dicho de otro modo, estamos **“predicando”** una propiedad de un objeto.

En efecto, en el primero de los enunciados anteriores se predica de Natalia Gutman que es violoncelista. En el siguiente enunciado, se predica de "ese coche" que es rojo. Y en el tercer enunciado, se predica del número 27 que es un número primo.

Pues bien, los simpred monarios son los correlatos, en nuestro lenguaje formal, de este tipo de expresiones.

§ 3.8. CUESTIONES

Pon un ejemplo de proposición en castellano, en la que se atribuya una propiedad a un objeto.

§ 3.9. LOS SIMPRED BIN Y SU CORRELATO EN EL LENGUAJE NATURAL

Por su parte, los símbolos predicativos binarios vienen a corresponder, salvando las distancias, a las expresiones del lenguaje natural mediante las que enunciamos una relación entre dos objetos.

Por ejemplo, cuando decimos que:

"Natalia Gutman fue estudiante de Rostropóvich"

estamos *atribuyendo* la relación *ser estudiante de* a Natalia Gutman y Mstislav Rostropóvich, en ese orden. O dicho de otro modo: estamos *"predicando"* esta relación de Gutman y Rostropóvich, en ese orden.

El orden es importante, obviamente, porque no es lo mismo afirmar que Gutman fue estudiante de Rostropóvich, que afirmar que Rostropóvich fue estudiante de Gutman.

Del mismo modo, cuando decimos que:

“El número π es mayor que 3”

estamos atribuyendo la relación *ser mayor que* a los números π y 3, tomados en ese orden. Es decir, estamos predicando dicha relación de esos dos números, tomados en ese orden.

Y aquí, el orden es también importante: π es mayor que 3, pero no al contrario.

El símbolo de igualdad ($=$) también corresponde, salvando las distancias, a la expresión de una relación entre objetos. Pero este caso lo comentaremos de forma separada, en **§ 4.1** .

§ 3.10. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición en castellano, en la que se atribuya una relación a dos objetos.
2. Completa la siguiente frase: “En el ejemplo que acabo de poner, la relación ... se atribuye a los objetos ... y ..., en ese orden”.

§ 3.11. LOS SIMPRED TER Y SU CORRELATO EN EL LENGUAJE NATURAL

A su vez, los símbolos predicativos ternarios vienen a corresponder, salvando las distancias, a las expresiones del lenguaje natural mediante las que enunciamos una relación entre tres objetos.

Por ejemplo, cuando decimos que:

"Madrid está entre Murcia y La Coruña"

estamos involucrando tres ciudades, para decir que una se encuentra a medio camino entre las otras dos. Dicho de otro modo, estamos predicando la relación *estar entre* de las ciudades Murcia, Madrid y La Coruña, tomadas en ese orden.

El orden también es importante aquí, porque Murcia no está entre Madrid y La Coruña, ni La Coruña está entre Murcia y Madrid.

Del mismo modo, cuando decimos:

"Javier ha cogido <u>El Quijote</u> de la Biblioteca de Bullas

estamos involucrando tres objetos (Javier, *El Quijote* y la Biblioteca de Bullas), para predicar que están en una determinada relación. En este caso, la relación consiste en que el primer objeto (Javier) ha cogido el segundo (*El Quijote*) del tercero (la Biblioteca de Bullas).

Una vez más, el orden importa: no es cierto que "la Biblioteca de Bullas ha cogido a Javier de *El Quijote*", por ejemplo.

§ 3.12. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición en castellano, en la que se atribuya una relación a tres objetos.
2. Completa la siguiente frase: "En el ejemplo que acabo de poner, la relación ..., se atribuye a los objetos ..., ... y ..., en ese orden".

§ 3.13. CORRELATO EN EL LENGUAJE NATURAL DE LOS SIMPRED 4-ARIOS, 5-ARIOS, ETC

También hay veces en que enunciamos una relación entre cuatro o más objetos. Por ejemplo, cuando decimos:

> *"Javier ha cogido <u>El Quijote</u> de la Biblioteca de Bullas el 7 de enero, y tendrá que devolverlo el 5 de febrero".*

estamos involucrando cinco objetos: Javier, el libro, la biblioteca, la fecha de préstamo y la fecha de devolución.

En matemáticas, y en la ciencia en general, este tipo de atribuciones son habituales. Y por eso necesitamos que nuestro lenguaje formal esté preparado para dar correlato a cualquiera de ellas, por compleja que sea.

§ 3.14. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición en castellano, en la que se atribuya una relación a cuatro objetos.
2. Completa la siguiente frase, en relación a dicho ejemplo: "En el ejemplo que acabo de poner, la relación ... se atribuye a los objetos ..., ..., ... y ..., en ese orden".

§ 3.15. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.

2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 4

Igualdad – Conectivas – Cuantificadores – Paréntesis

§ 4.1. CORRELATO DEL SÍMBOLO DE IGUALDAD EN EL LENGUAJE NATURAL

En **§ 3.9** dijimos que los simpred bin corresponden, salvando las distancias, a aquellas expresiones del lenguaje natural en las que se atribuye una relación a dos objetos.

Pues bien, el símbolo de igualdad corresponde a un caso especialmente importante de relación entre dos objetos: la de **ser el mismo objeto que** (o **ser idéntico a**).

En efecto, hay expresiones en el lenguaje natural mediante las que identificamos un objeto con otro, afirmando que son idénticos (esto es, que se trata de uno y el mismo objeto).

Así por ejemplo, cuando decimos:

"La capital de Turquía es Ankara"

estamos afirmando que Ankara y la capital de Turquía son la misma ciudad.

De modo similar, cuando decimos:

“Bizancio es Constantinopla”

estamos afirmando que Bizancio y Constantinopla son la misma ciudad (otra ciudad de Turquía, actualmente llamada “Estambul”).

Análogamente, cuando decimos:

“Lucila Godoy es Gabriela Mistral”

estamos afirmando que la mujer nacida en Chile con el nombre de Luila Godoy, y la escritora Gabriela Mistral, son la misma persona. (En efecto, la escritora se puso ese apodo como alias literario.)

Pues bien, salvando las distancias, el símbolo de igualdad hará las veces, en nuestro lenguaje formal, de ese tipo de expresiones del lenguaje natural.

§ 4.2. CUESTIONES

Inspirándote en la sección precedente, pon un ejemplo de enunciado del lenguaje natural que exprese la identidad entre dos objetos.

A lo largo del tema, en la realización de todas las cuestiones planteadas:

- Intenta prestar atención a los pequeños detalles.
- Allí donde te pidan ejemplos, usa los tuyos propios, distintos a los que aparecen en el manual.

- **Si estás trabajando en el aula, contesta solo a lo que te dé tiempo, sin correr.** (Lo que no te dé tiempo a entregar en el aula, puedes trabajarlo en tus horas de estudio individual.)

§ 4.3. LAS CONECTIVAS

También son símbolos lógicos de lenpred las cinco conectivas que ya conocemos de logfor1:

1. **El símbolo de negación**: $\neg$ (leído *"no"*).
2. **El símbolo de conjunción**: $\wedge$ (leído *"y"*).
3. **El símbolo de disyunción**: $\vee$ (leído *"o"*).
4. **El símbolo condicional**: $\rightarrow$ (leído *"si ... entonces"*).
5. **El símbolo bicondicional**: $\leftrightarrow$ (leído *"si y solo si"*).

§ 4.4. CORRELATO DE LAS CONECTIVAS EN EL LENGUAJE NATURAL

En la lógica de predicados, estas conectivas funcionan de un modo enteramente análogo a como lo hacen en la lógica proposicional. Por consiguiente, todo lo que dijimos sobre ellas en los temas 9 y 10 del manual de logfor1, se aplica también aquí. Y por ello, se recomienda repasar esos temas ahora, con la mayor atención.

En particular, en nuestro lenguaje formal — y salvando las distancias, como siempre decimos — el símbolo de negación ($\neg$) hace las veces de aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que negamos o desmentimos algo.

Por ejemplo, al decir:

“No está lloviendo”

estamos negando (rechazando, desmintiendo) que llueva. Y al decir

“Madrid no tiene costa”

estamos negando (rechazando, desmintiendo) que Madrid sea una ciudad costera.

Del mismo modo, en nuestro lenguaje formal, el símbolo de conjunción hará las veces — salvando las distancias — de aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que expresamos que dos cosas son ciertas al mismo tiempo. Como por ejemplo, cuando afirmamos que

“Llueve y hace frío”

O cuando afirmamos que

“Revolcadores está en Murcia y La Sagra está en Granada

Por su parte, el símbolo de disyunción hará las veces de aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que expresamos disyuntivas entre dos opciones, de las cuales al menos una es verdadera, pero podrían ser las dos. Así por ejemplo, cuando afirmamos:

“Voy a comer fruta o verduras”

O cuando afirmamos:

“El polen lo transporta el viento o las abejas”

Tales disyunciones (o disyuntivas) se denominan *"inclusivas"*, como vimos en el Tema 10 de logfor1.

En cuanto al símbolo condicional, desempeña el rol de las expresiones condicionales del lenguaje natural, aunque con muchos desajustes, como también indicamos en ese mismo tema. Un ejemplo de condicional del lenguaje natural es el siguiente:

"Si yo soy más alta que tú, y tú que ella, entonces yo soy más alta que ella"

Y otro tanto cabe decir del símbolo bicondicional, de cuyo correlato en el lenguaje natural podemos poner este ejemplo:

"Recibirás el título si y solo si has aprobado todas las asignaturas y pagas la tasa"

§ 4.5. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se niegue algo.
2. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se afirmen dos cosas al mismo tiempo.
3. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se presente una disyuntiva entre dos posibilidades, de las cuales al menos una sea verdadera, pero pudieran serlo las dos (es decir, una disyuntiva inclusiva).
4. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural de la forma *"Si ..., entonces ..."*, en la que se exprese que una cosa es condición para que suceda otra.

5. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural de la forma *"... si y solo si ..."*, en la que se exprese que dos cosas están correlacionadas (es decir, que hay una doble condición, de la una a la otra y viceversa).

§ 4.6. LOS CUANTIFICADORES

Finalmente, los dos últimos símbolos lógicos de lenpred son los cuantificadores:

1. **El cuantificador universal**: $\forall$ (leído *"para todo"*).
2. **El cuantificador existencial**: $\exists$ (leído *"existe"*).

El correlato de los cuantificadores en el lenguaje natural son las *proposiciones universales y existenciales*, de las que hablamos en **§ 1.11** y **§ 1.14** , y a las que volveremos en **§ 7.12** .

§ 4.7. CUESTIONES

Especifica los cuantificadores de lenpred, con sus nombres, tal y como están recuadrados en la sección anterior. Debes memorizarlos para un buen seguimiento de la asignatura.

§ 4.8. LOS PARÉNTESIS

Finalmente, lenpred posee una pareja de paréntesis, exactamente igual que lenprop:

- **El paréntesis izquierdo**: (

- **El paréntesis derecho**:)

Al igual que en logfor1, los paréntesis nos servirár para indicar cómo se deben leer fórmulas complejas, agrupando los símbolos de una manera u otra.

En el lenguaje natural, el correlato de esto es el uso de las comas y otros signos de puntuación, que utilizamos para desambiguar expresiones complejas.

Así por ejemplo, cuando decimos:

"Añade pimienta o pimentón, y sal"

estamos recomendando que añadas sal, por una parte, y además, o bien pimienta o bien pimentón.

Mientras que cuando decimos:

"Añade pimienta, o pimentón y sal"

estamos recomendando que añadas, o bien pimienta sola, o bien sal junto con pimentón.

§ 4.9. CUESTIONES

1. Inspirándote en el ejemplo que acabas de leer, pon un ejemplo de oración en el lenguaje natural, en la cual el cambio de una coma suponga una modificación tangible en el significado de la misma, y explícalo.

§ 4.10. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 5

La definición de fórmula atómica – Explicaciones complementarias

§ 5.1. LA DEFINICIÓN DE FÓRMULA DE LENPRED

Una vez introducido el alfabeto de lenpred, vamos a definir lo que son las **fórmulas** (abrevidamente, **flas**) de este lenguaje formal.

Esta definición es bastante más compleja que la definición de fórmula de lenprop, por lo que la desglosaremos en dos fases.

En una primera fase, definiremos las fórmulas más básicas, a las que denominaremos **"fórmulas atómicas"** (abreviadamente, **"flatoms"**). Y en una segunda fase, sobre la base de este concepto inicial, daremos la definición general de fórmula.

§ 5.2. DEFINICIÓN DE FÓRMULA ATÓMICA

Abordamos pues la definición de fórmula atómica, que a su vez consta de diferentes cláusulas, a partir de los tipos de símbolos predicativos definidos en **§ 3.5** :

1. Si W es un símbolo predicativo monario de lenpred y k es una constante de lenpred, entonces
$$Wk$$
es una fórmula atómica de lenpred.
2. Si k_1, k_2 son constantes de lenpred, entonces
$$k_1 = k_2$$
es una fórmula atómica de lenpred.
3. Si W^2 es un símbolo predicativo binario no lógico, y k_1, k_2 son constantes de lenpred, entonces
$$W^2 k_1 k_2$$
es una fórmula atómica de lenpred.
4. Si W^3 es un símbolo predicativo ternario de lenpred y k_1, k_2, k_3 son constantes de lenpred, entonces
$$W^3 k_1 k_2 k_3$$
es una fórmula atómica de lenpred.

Y así sucesivamente, para los símbolos predicativos 4-arios, 5-arios, etc.

§ 5.3. EJEMPLOS DE FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED MON

Por la cláusula (1) de la definición anterior, puesto que a es una constante y F es un símbolo predicativo monario, podemos concluir inmediatamente que Fa es una fórmula atómica.

Y dado que b, c, c_1, c_2 y c_3 son también constantes, pues también serán fórmulas atómicas las siguientes:

Fb $\quad$ Fc $\quad$ Fc_1 $\quad$ Fc_2 $\quad$ Fc_3

Por otra parte, como G es otro símbolo predicativo monario, pues también serán fórmulas atómicas, a su vez:

Ga $\quad$ Gb $\quad$ Gc $\quad$ Gc_1 $\quad$ $\ldots$

Y lo mismo ocurre con cualquier otra constante (como c_4, c_5, etc), y con cualquier otro símbolo predicativo monario (como por ejemplo H, F_1, F_2, etc). Por consiguiente, también serán fórmulas atómicas:

Ha $\quad$ Hc_2 $\quad$ F^1a $\quad$ F^1c_{25} $\quad$ $\ldots$

Ahora podemos entender por qué a estos símbolos predicativos se les llama **"monarios"**: porque **para formar una fórmula, necesitan ir seguidos de una sola constante**.

§ 5.4. CUESTIONES

Pon tres ejemplos de fórmulas atómicas de lenpred, con símbolos predicativos monarios.

§ 5.5. FORMALIZACIÓN DE PROPOSICIONES DEL LENGUAJE NATURAL MEDIANTE FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED MON

En **§ 2.11** indicamos que las constantes de lenpred hacen las veces, salvando las distancias, de los nombres propios del lenguaje natural. Y en **§ 3.7** explicamos que los simpred mon vienen a corresponder a expresiones predicativas.

Pues bien, las fórmulas atómicas que están compuestas de un simpred mon y una constante nos permiten formalizar, salvando las distancias, aquellas proposiciones del lenguaje natural en las que atribuimos una propiedad a un objeto.

Para ello, solo tenemos que indicar a qué objeto corresponde la constante, y a qué predicado corresponde el simpred mon, mediante una **tabla de convenciones simbólicas** similar a las que utilizábamos en logfor1.

§ 5.6. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM CON SIMPRED MON

Por ejemplo, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Natalia Gutman es violoncelista". (1)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer una tabla de convenciones simbólicas como la siguiente:

a : Natalia Gutman

F : *ser violoncelista*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, procedemos a formalizar (1), obteniendo como resultado:

$$Fa$$

§ 5.7. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM CON SIMPRED MON

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"17 es un número primo". (2)

Pues bien, en este otro caso, utilizaremos la siguiente tabla de convenciones simbólicas:

b : número 17

G : *ser un número primo.*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, procedemos a formalizar (1), obteniendo como resultado:

$$Gb$$

§ 5.8. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se atribuya una propiedad a un objeto.

2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 5.9. EJEMPLOS DE FÓRMULAS ATÓMICAS CON EL SÍMBOLO DE IGUALDAD

A continuación, nos ocuparemos de las fórmulas formadas mediante la cláusula (2) de **§ 5.2** .

Para empezar, puesto que a y b son constantes, es obvio que:

$$a = b$$

será una fórmula atómica.

Además, como la definición no especifica que las constantes en cuestión tengan que ser distintas, también

$$a = a$$

será una fórmula atómica.

Por lo mismo, también serán fórmulas atómicas de lenpred:

$$b = a \qquad b = b \qquad a = c_2 \qquad c_{27} = c_{27} \qquad c_{27} = b \qquad \ldots$$

Ahora se entiende por qué el símbolo de igualdad está incluido entre los **"símbolos predicativos binarios"**: porque **necesita ir flanqueado por dos apariciones de constantes, una a cada lado del mismo, para formar una fórmula.**

§ 5.10. CUESTIONES

Pon tres ejemplos de fórmulas atómicas de lenpred, con el símbolo de igualdad.

§ 5.11. FORMALIZACIÓN DE PROPOSICIONES DEL LENGUAJE NATURAL MEDIANTE FLATOM CON $=$

En **§ 2.11** indicamos que las constantes hacen las veces de los nombres propios, y en **§ 4.1** explicamos que el símbolo de igualdad hace las veces de aquellas expresiones del lenguaje natural en las que afirmamos la identidad entre dos objetos.

Pues bien, las fórmulas atómicas en las que solo aparece el símbolo de igualdad flanqueado por dos constantes, nos permiten formalizar aquellas proposiciones del lenguaje natural en las que predicamos la identidad entre dos objetos nombrados por nombres propios.

Para ello, bastará con indicar previamente a qué objeto corresponde cada constante, mediante la correspondiente tabla de convenciones simbólicas.

Nótese que esto no cubre el caso de las proposiciones de identidad que involucran descripciones definidas, como *"La capital de Turquía es Ankara"*. Estas proposiciones requieren un tratamiento especial, del que nos ocuparemos en **§ 14.1** .

§ 5.12. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM CON EL SÍMBOLO DE IGUALDAD

Supongamos que queremos formalizar la proposición:

"Bizancio es Constantinopla". (3)

Pues bien, en este caso podemos utilizar la siguiente tabla de convenciones simbólicas:

c_1 : *Bizancio*

c_2 : *Constantinopla*

Y entonces, aplicando dicha tabla, formalizaríamos (3) mediante:

$$c_1 = c_2$$

§ 5.13. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM CON EL SÍMBOLO DE IGUALDAD

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Lucila Godoy es Gabriela Mistral". (4)

Pues bien, en este otro caso, podemos utilizar la siguiente tabla de convenciones simbólicas:

c_3 : *Lucila Godoy*

c_4 : *Gabriela mistral*

Y entonces, aplicando dicha tabla, formalizaríamos (2) mediante:

$$c_3 = c_4$$

§ 5.14. CUESTIONES

1. Inspirándote en **§ 5.13** y **§ 5.12**,

   a) Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se predique la identidad entre dos objetos, cada uno nombrado con un nombre propio distinto. (Si no se te ocurre ninguno, puedes recurrir al caso del cantaor flamenco José Monje Cruz, apodado "Camarón".)

   b) Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.

   c) Indica cómo formalizar dicha proposición a partir de la tabla señalada.

§ 5.15. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 6

Más explicaciones sobre las fórmulas atómicas

§ 6.1. EJEMPLOS DE FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED BIN NO LÓGICOS

A continuación, vamos a poner ejemplos de las fórmulas atómicas que se forman mediante la cláusula (3) de la definición **§ 5.2** .

Dicha cláusula afecta a los símbolos predicativos binarios no lógicos, es decir, a los simpred bin distintos del símbolo de igualdad.

Pues bien, tales símbolos también necesitan de **dos** apariciones de constantes para formar una fómula. Sin embargo, a diferencia del símbolo de igualdad, en este caso las constantes se colocan a continuación del simpred bin, una detrás de la otra (así lo indica la cláusula (3) que estamos comentando).

Por ejemplo, tomemos el simpred bin K , y a continuación del mismo pongamos dos constantes, a y b . El resultado que obtenemos será:

$$Kab$$

lo cual constituye una fórmula atómica.

También obtenemos una fórmula atómica si a continuación del símbolo predicativo binario colocamos una misma constante, dos veces (es decir, una constante repetida, con dos apariciones sucesivas). Por ejemplo:

$$Kbb$$

Y de un modo similar, podemos formar otras fórmulas atómicas mediante diversos símbolos predicativos binarios, como por ejemplo:

$$Kba \qquad Lbc \qquad Lcc \qquad K_1cc_7 \qquad K_2c_7a \qquad \ldots$$

Ahora podemos entender por qué a estos símbolos predicativos se les llama **"binarios"**: porque **para formar una fórmula, necesitan ir seguidos de dos constantes**.

§ 6.2. CUESTIONES

Pon tres ejemplos de fórmulas atómicas de lenpred, con símbolos predicativos binarios no lógicos.

§ 6.3. FORMALIZACIÓN MEDIANTE FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED BIN NO LÓGICOS

En **§ 3.9** explicamos que los simpred bin vienen a corresponder, salvando las distancias, a aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que enunciamos una relación entre dos objetos.

Pues bien, las fórmulas atómicas que están compuestas de un simpred bin y dos constantes, nos permiten formalizar — salvando las distancias — aquellas proposiciones del lenguaje natural en las que atribuimos una relación a dos objetos, nombrados por nombres propios, y tomados en un orden determinado.

Si dicha relación resulta ser la relación de igualdad (o identidad), ya hemos puesto ejemplos (en **§ 5.12** y **§ 5.13**) sobre cómo formalizar las proposiciones correspondientes. A continuación, veremos ejemplos de formalización de otras relaciones entre dos objetos, distintas a la igualdad.

§ 6.4. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM COM SIMPRED BIN NO LÓGICOS

Por ejemplo, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Natalia Gutman fue discípula de Rostropóvich". (1)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer una tabla de convenciones simbólicas como la siguiente:

a : Natalia Gutman

b : Rostropóvich

K : *ser discípula de*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, procedemos a formalizar (1), obteniendo como resultado:

$$Kab$$

§ 6.5. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM COM SIMPRED BIN NO LÓGICOS

Ahora, supongamos que queremos formalizar la proposición :

$$\text{“\textit{El número} } \pi \text{ \textit{es mayor que 3}”.} \qquad (2)$$

Pues bien, en este caso, utilizaremos la siguiente tabla de convenciones simbólicas:

c : número π

$c3$: número 3

L : *ser mayor que*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, procedemos a formalizar (1), obteniendo como resultado:

$$Lcc_3$$

§ 6.6. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se atribuya una relación distinta de la igualdad a dos objetos nombrados con nombres propios.
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 6.7. EJEMPLOS DE FÓRMULAS ATÓMICAS CON SÍMBOLOS PREDICATIVOS TERNARIOS, 4-ARIOS, ETC

En virtud de la cláusula (4) de **§ 5.2** , un símbolo predicativo **ternario** tendrá que ir seguido de **tres** apariciones de constantes, para formar una fórmula atómica. De ahí viene el nombre de *"ternario"* (o *"de tres lugares"*).

Así por ejemplo, como M es un simpred ter, pues serán fórmulas atómicas de lenpred:

$Mabc$ $\quad$ $Mcba$ $\quad$ $Mabb$ $\quad$ $Maaa$ $\quad$ $Mc_1c_2c_3$ $\quad$ ...

Y otro tanto se aplica a cualquier otro símbolo predicativo ternario de lenpred. Por consiguiente, serán también fórmulas atómicas, por ejemplo:

$Nabc$ $\quad$ $Ncab$ $\quad$ M_1cba $\quad$ M_2bbb $\quad$ $M_{25}c_{14}bc_{27}$ $\quad$ ...

Por otra parte, aplicando la cláusula (5) de **§ 5.2** , un símbolo predicativo **4-ario** (o **cuaternario**), como por ejemplo O^4 , tendrá que ir seguido de **cuatro** apariciones de constantes, para formar una fórmula. Así por ejemplo, serán fórmulas atómicas de lenpred:

$$O^4abcc_1 \qquad O^4aaaa \qquad O^4cbac_2 \qquad O^4c_1c_4c_9b \qquad \ldots$$

Y por el mismo procedimiento, es fácil encontrar ejemplos de fórmulas atómicas con símbolos predicativos 5-arios, 6-arios, 7-arios, etc.

§ 6.8. CUESTIONES

1. Pon dos ejemplos de fórmula atómica de lenpred, con símbolos predicativos ternarios.
2. Pon dos ejemplos de fórmula atómica de lenpred, con símbolos predicativos cuaternarios.

§ 6.9. FORMALIZACIÓN MEDIANTE FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED TERNARIOS, 4-ARIOS, ETC

En **§ 3.11** y **§ 3.13** explicamos que los símbolos predicativos ternarios, 4-arios, etc, vienen a corresponder — salvando las distancias — a aquellas expresiones del lenguaje natural mediante las que atribuimos relaciones a tres o más objetos, nombrados con nombres propios, y tomados en un orden determinado.

Pues bien, las fórmulas atómicas que estén compuestas de un símbolo predicativo ternario y vayan seguidas de tres constantes, nos permitirán formalizar — salvando las distancias — aquellas proposiciones del lenguaje natural en las que atribuimos una relación a tres objetos, tomados en un orden.

Para ello, solo tendremos que establecer previamente la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, tal y como hemos venido haciendo en los casos anteriores.

Y lo mismo haremos, análogamente, para aquellas fórmulas atómicas que estén compuestas de un simpred 4-ario y vayan seguidas de cuatro constantes, o las que estén compuestas de un simpred 5-ario y vayan seguidas de cinco constantes, etc.

§ 6.10. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE FLATOM CON SIMPRED TER

Por ejemplo, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Madrid está entre Murcia y La Coruña". (3)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer una tabla de convenciones simbólicas como la siguiente:

c_1 : Madrid

c_2 : Murcia

c_4 : La Coruña

M : *estar una cosa entre una segunda y una tercera*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, procedemos a formalizar (1), obteniendo como resultado:

$$Mc_1c_2c_4$$

§ 6.11. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición del lenguaje natural en la que se atribuya una relación a tres o más objetos.
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición con la tabla señalada.

§ 6.12. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 7

La definición general de fórmula de lenpred – Cuantificaciones existenciales

§ 7.1. LA DEFINICIÓN GENERAL DE FÓRMULA DE LENPRED

Una vez definidas y explicadas las fórmulas atómicas de todos los tipos posibles, estamos en condiciones de dar la definición general de **fórmula** de lenpred.

Dicha definición consta de ocho **"cláusulas recursivas"**, así llamadas porque están imbricadas unas con otras, y su uso combinado da lugar a fórmulas más y más complejas.

1. Las fórmulas definidas conforme a lo indicado en § **5.2** constituyen **fórmulas atómicas**.

2. Si A es cualquier fórmula, entonces $\neg A$ es otra fórmula, llamada **"negación"**.

A continuación, si A y B son cualesquiera fórmulas, entonces:

3. $(A \wedge B)$ es otra fórmula, llamada **"conjunción"**.

4. $(A \vee B)$ es otra fórmula, llamada **"disyunción"**.

5. $(A \rightarrow B)$ es otra fórmula, llamada **"condicional"**.

6. $(A \leftrightarrow B)$ es otra fórmula, llamada **"bicondicional"**.

Por último, sea k una constante cualquiera y v una variable. A continuación, sea $A(k)$ cualquier fórmula en la que aparezca k pero no v. Y finalmente, sea $A(v)$ el resultado de reemplazar k por v en al menos una de sus apariciones.

Pues bien, en estas condiciones,

7. $\exists v A(v)$ es una fórmula, llamada **"cuantificación existencial en la variable** v**"** (o **"sobre la variable** v**"**).

8. $\forall v A(v)$ es una fórmula, llamada **"cuantificación universal en la variable** v**"** (o **"sobre la variable** v**"**).

Las cláusulas (2)–(6) son similares a las que vimos en logfor1, con la diferencia de que allí las fórmulas atómicas eran símbolos proposicionales, y aquí son algo más complejas. Pero por lo demás, el funcionamiento de estas cláusulas es análogo al de logfor1.

Sin embargo, las cláusulas (7) y (8) sí requieren de una explicación más detenida, y es lo que haremos a continuación, a través de varios ejemplos.

Pero antes, vamos a introducir una abreviatura especial.

§ 7.2. ABREVIATURA ESPECIAL PARA LA IGUALDAD NEGADA

En algunos casos, utilizaremos la cláusula (2) para anteponer el símbolo de negación a una fórmula atómica de igualdad. En esos casos, tendremos dos constantes, k_1 y k_2, y la fórmula resultante será:

$$\neg (k_1 = k_2)$$

Pues bien, para tales fórmulas adoptaremos la siguiente abreviatura:

$$k_1 \neq k_2$$

Así por ejemplo, abreviaremos la fórmula

$$\neg (a = b)$$

poniendo

$$a \neq b$$

§ 7.3. CUESTIONES

Abrevia la fórmula $\neg(b = c)$, aplicando lo que se acaba de indicar.

§ 7.4. UN EJEMPLO DE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

A continuación, vamos a considerar la fórmula Fa, compuesta por el simpred monario F y la constante a.

Y vamos a empezar por reemplazar esa constante por la variable x. El resultado será Fx.

Aquí conviene prestar atención, porque **la expresión Fx no es una fórmula de lenpred**, sino un paso intermedio que estamos dando, en el proceso de construcción de una cuantificación existencial.

A continuación, procedemos a anteponer el cuantificador existencial a dicha expresión, junto con la variable x, obteniendo:

$$\exists x Fx$$

Pues bien, esto sí es un ejemplo de cuantificación existencial de lenpred.

§ 7.5. CUESTIONES

Siguiendo el ejemplo que acabamos de ver:

1. Construye una fórmula de cuantificacion existencial, a partir de la fórmula atómica Gb y la variable y.

2. Construye una fórmula de cuantificacion existencial, a partir de la fórmula atómica Hc y la variable z.

§ 7.6. OTRO EJEMPLO DE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

Ahora vamos a hacer la misma operación, pero partiendo de la fórmula Kbb.

Dicha fórmula está compuesta por el simpred binario K y la constante b, que aparece dos veces.

Pues bien, en este ejemplo, elegiremos reemplazar *solamente la primera* de las apariciones de la constante b, y la sustituiremos por la variable y.

El resultado será:

$$Kyb$$

Nuevamente, nótese que Kyb *no* es una fórmula de lenpred, sino solo un paso intermedio en la construcción de una fórmula de cuantificación existencial.

Una vez hecho eso, procedemos a anteponer el cuantificador existencial, junto con la variable y, obteniendo como resultado:

$$\exists y Kyb$$

Pues bien, esta última expresión sí es una fórmula de lenpred, y en concreto, una cuantificación existencial.

§ 7.7. CUESTIONES

Siguiendo el ejemplo que acabamos de ver:

1. Construye otra fórmula de cuantificacion existencial, a partir de la fórmula atómica Lcc y la variable y.
2. Construye otra fórmula de cuantificacion existencial, a partir de la fórmula atómica Maa y la variable z.

§ 7.8. TERCER EJEMPLO DE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

Ahora volveremos a partir de la fórmula Kbb, pero en esta ocasión reemplazaremos *las dos* apariciones de la constante b por la variable y.

El resultado de dicho reemplazo será la expresión Kyy (la cual no constituye una fórmula).

Y anteponiendo a dicha expresión el cuantificador existencial, junto con la variable y, obtenemos como resultado:

$$\exists y Kyy$$

Pues bien, esta última expresión es también, obviamente, una cuantificación existencial de lenpred.

§ 7.9. CUESTIONES

Construye otra fórmula de cuantificacion existencial a partir de la fórmula atómica Lcc y la variable y, siguiendo el ejemplo que acabamos de ver.

§ 7.10. CUARTO EJEMPLO DE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

En nuestro siguiente ejemplo, vamos a partir de la fórmula

$$(Fc \land Kcb)$$

Aquí no podemos suprimir los paréntesis exteriores, porque no nos vamos a limitar a nombrar esta fórmula sola, sino que la vamos a modificar, y luego le vamos a anteponer un cuantificador.

En concreto, vamos a reemplazar la constante c, en sus dos apariciones, por la variable z. El resultado será $(Fz \land Kzb)$ (que, nuevamente, no es una fórmula de lenpred, sino solo un paso intermedio en la construcción).

Y hecho esto, procedemos a anteponer el cuantificador existencial, junto con la variable z. El resultado que obtenemos es:

$$\exists z(Fz \land Kzb)$$

Y una vez más, esta sí es una fórmula de lenpred, y en concreto, una cuantificación existencial.

§ 7.11. CUESTIONES

Siguiendo el ejemplo que acabamos de ver:

1. Construye otra fórmula de cuantificacion existencial, a partir de la fórmula atómica $(Gc \lor Lbb)$ y la variable y.
2. Construye otra fórmula de cuantificacion existencial, a partir de la fórmula atómica $(\neg Hc \to Laa)$ y la variable x.

§ 7.12. CONVENCIÓN PREVIA RESPECTO A LAS PROPOSICIONES EXISTENCIALES

Las fórmulas de cuantificación existencial de lenpred hacen las veces, salvando las distancias, de las proposiciones existenciales del lenguaje natural, de las que hablamos en **§ 1.14** . Por consiguiente, podemos utilizar tales fórmulas de lenpred para formalizar ese tipo de proposiciones.

Sin embargo, antes de proceder a ello, conviene adoptar la siguiente convención. Siempre que digamos genéricamente que **"hay objetos"** de una determinada clase, entenderemos que **hay al menos uno, pero podrían ser más**. Y lo mismo se aplica a expresiones similares, como *"existen objetos"* de una determinada clase, *"se dan objetos"* que cumplen una determinada condición, etc.

Este tipo de proposiciones existenciales genéricas son las más fáciles de formalizar (veremos cómo a partir de **§ 7.14**).

Sin embargo, habrá ocasiones en que queramos afirmar **"hay un solo objeto"** de una determinada clase. Pues bien, en ese caso tendremos que decirlo así, expresamente (o por medio de expresiones similares, como *"hay exactamente un objeto"* que cumple tal cosa, etc). Estas proposiciones existenciales también se pueden formalizar, pero cuestan un poco más que las anteriores (veremos un ejemplo en **§ 13.1**).

Por último, también habrá ocasiones en que queramos afirmar que **"hay más de un objeto"** de una determinada clase. Pues bien, en ese caso tendremos que decirlo así, expresamente (o por medio de expresiones similares, como *"hay varios objetos"* que cumplen tal cosa, etc). También este tipo de proposiciones existenciales se pueden formalizar, pero también requieren de una maniobra especial para llegar a buen puerto (veremos un ejemplo de ello en **§ 13.6**).

§ 7.13. CUESTIONES

Explica brevemente, con tus propias palabras, la convención que se acaba de adoptar.

§ 7.14. FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIONES EXISTENCIALES

En todo caso, para formalizar cualquier proposición existencial (sea esta del tipo que sea), siempre empezaremos por especificar la correspondiente *tabla de convenciones simbólicas*, al igual que hemos venido haciendo hasta ahora.

En dicha tabla, indicaremos a qué objetos del universo corresponden las constantes de la fórmula, si las hay; e indicaremos a qué predicados corresponden los símbolos predicativos (excepto el símbolo de igualdad, para el cual no hay que especificar ningún significado).

Una vez terminada la tabla de convenciones, procederemos a indicar la fórmula que corresponde a la proposición en cuestión.

A continuación, vamos a comenzar viendo ejemplos del caso más sencillo, la formalización de proposiciones existenciales genéricas.

§ 7.15. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

Supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay violoncelistas". (1)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser sencillamente la siguiente:

F : *ser violoncelista*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (1) por medio de:

$$\exists x F x$$

Alternativamente, también podemos usar cualquier otra variable, en puesto de x, y tendríamos una formalización igualmente correcta. Así por ejemplo, cualquiera de las fórmulas:

$$\exists y F y \qquad \exists z F z \qquad \exists x_1 F x_1$$

constituye una formalización correcta de (1), bajo la tabla de convenciones simbólicas que acabamos de dar.

§ 7.16. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición existencial sencilla, similar a (1).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.

3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 7.17. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Rostropóvich tuvo estudiantes". (2)

Ello es equivalente a decir que *"Hubo estudiantes de Rostropóvich"*, o que *"Existieron estudiantes de Rostropóvich"*. Por lo tanto, se trata de una proposición existencial genérica.

Pues bien, en este caso necesitaríamos una tabla de convenciones simbólicas como la siguiente:

b : Rostropóvich

K : *ser estudiante de*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (2) por medio de:

$$\exists y K y b$$

Aquí también podríamos haber usado cualquier otra variable en puesto de y, de modo análogo a lo que acabamos de comentar para el caso anterior.

§ 7.18. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición existencial cuya estructura sea más o menos similar a (2).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 7.19. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay violoncelistas que fueron estudiantes de Rostropóvich". (3)

Pues bien, en este caso podemos aplicar la siguiente tabla:

b : Rostropóvich

F : *ser violoncelista*

K : *ser estudiante de*

Y aplicando dicha tabla, podemos formalizar (3) por medio de:

$$\exists z(Fz \wedge Kzb)$$

Obviamente aquí también podríamos usar cualquier otra variable en puesto de z, como hemos comentado en los casos anteriores.

§ 7.20. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición existencial cuya estructura sea más o menos similar a (3).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 7.21. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 8

Cuantificaciones universales – Fórmulas complejas

§ 8.1. EJEMPLOS DE CUANTIFICACIONES UNIVERSALES

La construcción de cuantificaciones universales, siguiendo la cláusula (8) de **§ 7.1** , es enteramente análoga a la construcción de cuantificaciones existenciales, siguiendo la cláusula (7).

Por lo tanto, dando pasos similares a los que hemos visto en **§ 7.4** , **§ 7.6** , **§ 7.8** y **§ 7.10** , podemos concluir que también:

$\forall x F x$ $\quad$ $\forall y K y b$ $\quad$ $\forall y K y y$ $\quad$ $\forall z(F z \wedge K z b)$

son fórmulas de lenpred, y en particular, cuantificaciones universales.

§ 8.2. CUESTIONES

Construye cuatro ejemplos de cuantificaciones universales, inspirándote en las que acabamos de ver.

§ 8.3. FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIONES UNIVERSALES

Las fórmulas de cuantificación universal de lenpred hacen las veces, salvando las distancias, de las proposiciones universales del lenguaje natural, de las que hablamos en **§ 1.11** . Por consiguiente, podemos utilizar tales fórmulas de lenpred para formalizar ese tipo de proposiciones.

A este respecto, es importante señalar que hay proposiciones universales que usan la locución "cualquier" en lugar de "todos", o "cualquiera" en lugar de "todas". En la mayoría de los casos, esta variante estilística no afecta al significado, ni a la estructura lógica. Y por consiguiente, no afecta al modo en que hay que formalizar la proposición en cuestión.

Así por ejemplo, la proposición

"Cualquier cosa es digna de estudio"

dice lo mismo que

"Todo es digno de estudio"

Se trata de dos expresiones de una misma proposición, y por lo tanto se formalizarán de la misma manera (inmediatamente veremos cómo).

Y lo mismo se aplica a casos similares.

Pues bien, dicho esto, para formalizar una prosición universal empezaremos por establecer la habitual *tabla de convenciones simbólicas*. En esa tabla especificaremos a qué corresponde cada constante y cada simpred que aparezca en la fórmula.

Y sobre la base de dicha tabla, una vez terminada, procederemos a indicar la fórmula que representa la proposición en cuestión.

§ 8.4. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIÓN UNIVERSAL

Por ejemplo, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Todo es digno de estudio". (1)

Vamos a ver cómo formalizar esta proposición, independientemente de que nos parezca verdadera o falsa.

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser sencillamente la siguiente:

F : *ser digno de estudio*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (1) por medio de:

$$\forall x Fx$$

Naturalmente, aquí también vale cualquier otra variable, análogamente a lo que dijimos en **§ 7.15** , **§ 7.17** y **§ 7.19** :

$\forall y Fy$ $\quad$ $\forall z Fz$ $\quad$ $\forall x_1 Fx_1$ $\quad$ . . .

§ 8.5. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición universal análoga a (1) (es decir, que solo requiera un simpred), aunque sea falsa.
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 8.6. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE CUANTIFICACIÓN UNIVERSAL

Como segundo ejemplo de formalización mediante una fórmula sencilla de cuantificación universal, nos proponemos formalizar:

"Todo es igual a sí mismo". (2)

Este es un caso peculiar, porque no precisa de la intervención de símbolo extralógico alguno. Y por consiguiente, no hay tabla de convenciones simbólicas que establecer previamente a la formalización.

En efecto, usando el símbolo de igualdad y el cuantificador universal, junto con una variable, obtenemos:

$$\forall x \, (x = x)$$

Dicha fórmula es una formalización correcta de (2). Y lo mismo ocurrirá con cualquier otra fórmula similar, que use otra variable distinta (esta coletilla se da por sentada a partir de ahora, ya no la repetiremos más).

§ 8.7. FÓRMULAS COMPLEJAS

Como dijimos en **§ 7.1** , la definición general de fórmula de lenpred permite que sus cláusulas se combinen unas con otras, dando lugar a fórmulas más y más complejas.

Para ilustrar esto, vamos a partir de las siguientes fórmulas atómicas:

$a = b$ $\quad$ $a = a$ $\quad$ Fa $\quad$ Gb $\quad$ Kab $\quad$ $Mcba$

Pues bien, partiendo de estas fórmulas atómicas, y aplicando la definición **§ 7.1** y la abreviatura **§ 7.2** , podemos formar fórmulas complejas como las siguientes:

$a = b \rightarrow a = a$ $\quad$ $a \neq b \wedge Fa$ $\quad$ $Gb \vee Kab \leftrightarrow Mcba$

$\exists x(x = b \rightarrow x = x)$ $\quad$ $\forall y(y \neq b \wedge Fy)$ $\quad$ $Gb \vee Kab \leftrightarrow \exists xMcxa$

Aplicando lo que vimos en logfor1 respecto a las conectivas, y extendiéndolo a los cuantificadores, es sencillo indicar el operador lógico principal de cada una de estas fórmulas:

$a = b \boxed{\rightarrow} a = a$ $\quad$ $a \neq b \boxed{\wedge} Fa$ $\quad$ $Gb \vee Kab \boxed{\leftrightarrow} Mcba$

$\boxed{\exists} x(x = b \rightarrow x = x)$ $\quad$ $\boxed{\forall} y(y \neq b \wedge Fy)$ $\quad$ $Gb \vee Kab \boxed{\leftrightarrow} \exists xMcxa$

§ 8.8. MÁS EJEMPLOS DE FÓRMULAS COMPLEJAS

También podemos combinar los propios cuantificadores, como por ejemplo en las fórmulas siguientes:

$\exists x \exists y Kxy$ $\neg \forall x \exists y Kxy$ $\forall x(\neg Kax \to \exists y Kyx)$

cuyos operadores principales son:

$\boxed{\exists} x \exists y Kxy$ $\boxed{\neg} \forall x \exists y Kxy$ $\boxed{\forall} x(\neg Kax \to \exists y Kyx)$

§ 8.9. CUESTIONES

Pon tres ejemplos de fórmulas complejas e indica el operador lógico principal de cada una.

§ 8.10. FORMALIZACIÓN MEDIANTE FÓRMULAS COMPLEJAS

Las fórmulas complejas de lenpred nos servirán para encontrar correlato formal a proposiciones del lenguaje natural muy variadas (salvando las distancias, como siempre decimos).

A continuación vamos a ver algunos de los ejemplos y patrones de formalización más relevantes.

§ 8.11. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA FLATOM

Supongamos que queremos formalizar la proposición :

“Gabriela Mistral no es Natalia Gutman”. (3)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

$$a \ : \ \text{Gabriela Mistral}$$

$$b \ : \ \text{Natalia Gutman}$$

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (3) por medio de:

$$a \neq b$$

§ 8.12. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 8.13. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA FLATOM

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Gabriela Mistral no es violoncelista". (4)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : Gabriela Mistral

F : *ser violoncelista*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (4) por medio de:

$$\neg Fa$$

§ 8.14. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (4).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 8.15. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA FLATOM

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Gabriela Mistral no fue estudiante de Rostropóvich". (5)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

$$a \quad : \quad \text{Gabriela Mistral}$$

$$b \quad : \quad \text{Rostropóvich}$$

$$K \quad : \quad \textit{ser estudiante de}$$

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (5) por medio de:

$$\neg Kab$$

§ 8.16. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (5).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 8.17. CUARTO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA FLATOM

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Rostropóvich no fue estudiante de sí mismo". (6)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

b : Rostropóvich

K : *ser estudiante de*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (6) por medio de:

$$\neg Kbb$$

§ 8.18. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (6).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 8.19. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 9

Ampliación sobre la formalización mediante fórmulas complejas

§ 9.1. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNA CONJUNCIÓN ENTRE FLATOMS

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Gabriela Mistral y Alfonsina Storni eran poetas". (1)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : Gabriela Mistral

b : Alfonsina Storni

F : *era poeta*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (1) por medio de:

$$Fa \wedge Fb$$

§ 9.2. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (1).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.3. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UN CONDICIONAL ENTRE FLATOMS

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Si Gabriela Mistral era poeta, también lo era Alfonsina Storni". (2)

En este caso, nos valdría la misma tabla de convenciones que en **§ 9.1** . Y aplicando dicha tabla, podemos formalizar (2) por medio de:

$$Fa \rightarrow Fb$$

§ 9.4. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (2).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.5. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNA DISYUNCIÓN ENTRE FLATOMS

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"O Gabriela Mistral era poeta, o lo era Alfonsina Storni". (3)

Aquí también nos valdría la misma tabla de convenciones que en **§ 9.1** . Y aplicando dicha tabla, podemos formalizar (3) por medio de:

$$Fa \vee Fb$$

§ 9.6. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.7. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"No hay unicornios". (4)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

$$F \quad : \quad \textit{ser unicornio}$$

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (4) por medio de:

$$\neg\exists x Fx$$

§ 9.8. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (4).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.9. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Nada es distinto de sí mismo". (5)

Al igual que sucedía en **§ 8.6** , en esta proposición no hay nombres propios, y la única relación que interviene es la de igualdad. Por consiguiente, aquí tampoco harán falta símbolos extralógicos, por lo que no hay tabla de convenciones que especificar.

Por otra parte, es obvio que decir (5) es lo mismo que decir:

"No hay nada que sea distinto de sí mismo"

o bien:

"No existe algo que sea distinto de sí mismo"

Las tres son variantes estilísticas de la misma proposición.

Por consiguiente, la formalización de (5) quedaría:

$$\neg\exists x\,(x \neq x)$$

§ 9.10. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Venus no tiene satélites". (6)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : Venus

K : *ser satélite de*

Naturalmente, decir (6) es como decir

"No existe algo que sea un satélite de Venus"

Ambas son variantes estilísticas de la misma proposición, con una misma estructura lógica.

Por consiguiente, podemos formalizar dicha proposición por medio de:

$$\neg\exists x\, Kxa$$

§ 9.11. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (6).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.12. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN UNIVERSAL

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"No todo es digno de estudio". (7)

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser digno de estudio*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (7) por medio de:

$$\neg\forall x Fx$$

§ 9.13. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE LA NEGACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN UNIVERSAL

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

$$\textit{“No todo es saludable”.} \qquad (8)$$

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser saludable*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (8) por medio de:

$$\neg\forall x Fx$$

§ 9.14. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (7) y (8).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.15. COMBINACIONES COMPLEJAS DE CUANTIFICACIÓN Y NEGACIÓN

A veces, manejamos combinaciones complejas de existencial y negación, o de universal y negación. Pues bien, entre algunas de esas combinaciones se dan interesantes correlaciones.

A continuación vamos a ver algunos ejemplos de ello, en casos sencillos.

En **§ 11.13** y **§ 11.15** , veremos otros ejemplos, un poco más complicados.

Y a partir de esos ejemplos, aplicando el sentido común, podemos encontrar correspondencias análogas en otros casos similares.

§ 9.16. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIÓN COMPLEJA DE EXISTENCIAL Y NEGACIÓN

Supongamos que queremos formalizar la proposición :

"No hay nada que no sea digno de estudio". (9)

Naturalmente, decir (9) es como decir

"No existe algo que no sea digno de estudio"

Ambas son variantes estilísticas de la misma proposición, con una misma estructura lógica.

Pues bien, para formalizar esta proposición, comenzaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

$$F \quad : \quad \textit{ser digno de estudio}$$

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (9) por medio de:

$$\neg\exists x \, \neg Fx$$

§ 9.17. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (9).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 9.18. UN EJEMPLO DE CORRELACIÓN ENTRE COMBINACIONES COMPLEJAS DE CUANTIFICACIÓN Y NEGACION

Nótese la correlación entre (9) y :

"Todo es digno de estudio". (10)

Sin embargo, la formalización de (10) es distinta:

$$\forall x Fx$$

Así lo vimos en **§ 8.4** , bajo la misma tabla de convenciones simbólicas.

Por consiguiente, (9) y (10) son *proposiciones distintas*. No se puede decir que una sea una mera variante estilística de la otra. De hecho, su estructura lógica es distinta, como se aprecia en las distintas formalizaciones de cada una.

De igual modo, es importante enfatizar que $\neg\exists x\neg Fx$ y $\forall xFx$ **no son** la misma fórmula. De hecho, salta a la vista que son secuencias distintas de símbolos de lenpred.

Sin embargo, las fórmulas $\neg\exists x\neg Fx$ y $\forall xFx$ son **lógicamente equivalentes**, como veremos en **§ 25.12** .

Y ello concuerda con el hecho de que (9) y (10) son, a su vez, **proposiciones lógicamente equivalentes** (esto es, que no puede ser verdadera una sin la otra).

§ 9.19. CUESTIONES

1. Inspirándote en la correlación entre (9) y (10), indica una proposición que tenga el mismo tipo de correlación con el ejemplo que has puesto en **§ 9.17** .
2. Formaliza la proposición que acabas de indicar.

§ 9.20. OTRO EJEMPLO DE CORRELACIÓN ENTRE COMBINACIONES COMPLEJAS DE CUANTIFICACIÓN Y NEGACION

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay cosas no saludables". (11)

Obviamente, podríamos usar la misma tabla de convenciones que en **§ 9.13** :

F : *ser saludable*

Y aplicando dicha tabla, formalizaremos (11) por medio de:

$$\exists x \neg Fx$$

Ahora bien, aquí también se da una correlación entre (11) y la proposición (8) que vimos en **§ 9.13** :

"No todo es saludable"

cuya formalización era:

$$\neg \forall x Fx$$

Una vez más, debemos enfatizar que $\exists x \neg Fx$ y $\neg \forall x Fx$ son fórmulas distintas, aunque también sean fórmulas lógicamente equivalentes, como demostraremos en **§ 25.13** .

Y por su parte, también es obvio que (8) y (11) son proposiciones lógicamente equivalentes (esto es, que no puede ser verdadera la una sin la otra).

§ 9.21. CUESTIONES

1. Inspirándote en la correlación entre (11) y (8), indica una proposición que tenga el mismo tipo de correlación con el ejemplo que pusiste en **§ 9.14** .
2. Formaliza la proposición que acabas de indicar.

§ 9.22. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 10

El existencial conjuntivo

§ 10.1. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

$$\text{“\textit{Hay coches blancos}”.} \tag{1}$$

Pues bien, para ello empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

$$F \quad : \quad \textit{ser un coche}$$

$$G \quad : \quad \textit{ser blanco}$$

Y a continuación, aplicando dicha tabla, procedemos a formalizar (1) por medio de:

$$\exists x\,(Fx \wedge Gx)$$

§ 10.2. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (1).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 10.3. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

“Hay quien es pianista y ajedrecista”. (2)

(Un ejemplo excepcional de ello fue Taimánov.)

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser pianista*

G : *ser ajedrecista*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (2) por medio de:

$$\exists x\,(Fx \wedge Gx)$$

§ 10.4. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (2).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 10.5. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay quien es violoncelista pero no pianista". (3)

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser violoncelista*

G : *ser pianista*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (3) por medio de:

$$\exists x\,(Fx \wedge \neg Gx)$$

§ 10.6. CUARTO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición :

$$\text{“\textit{Hay coches que no son blancos}”.} \tag{4}$$

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser un coche*

G : *ser blanco*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (4) por medio de:

$$\exists x\,(Fx \wedge \neg Gx)$$

§ 10.7. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3) y (4).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 10.8. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE NEGACIÓN DE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"No hay planetas cuadrados". (5)

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser un planeta*

G : *ser cuadrado*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (5) por medio de:

$$\neg \exists x \, (Fx \wedge Gx)$$

§ 10.9. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (5).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 10.10. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE NEGACIÓN DE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición:

"No hay violoncelistas que fueran estudiantes de Gabriela Mistral". (6)

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : Gabriela Mistral

F : *ser violoncelista*

K : *ser estudiante de*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (6) por medio de:

$$\neg \exists x \, (Fx \wedge Kxa)$$

§ 10.11. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (6).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 10.12. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE NEGACIÓN DE EXISTENCIAL CONJUNTIVO

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"No hay cuervos que no sean negros". (7)

Nótese que (7) es otra forma de decir:

"No hay ninguna cosa que sea un cuervo y no sea negra"

Ambas son variantes estilísticas de la misma proposición.

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser un cuervo*

G : *ser negro*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (6) por medio de:

$$\neg \exists x \, (Fx \wedge \neg Gx)$$

(Volveremos a los ejemplos de cuervos en **§ 11.15** y **§ 11.17** .)

§ 10.13. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (7).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 10.14. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 11

El universal condicional y otras variantes

§ 11.1. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNIVERSAL CONJUNTIVO

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Todo es sorprendente y digno de estudio". (1)

Pues bien, empezaremos por establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser sorprendente*

G : *ser digno de estudio*

Y a continuación, aplicando dicha tabla, podemos formalizar (1) por medio de:

$$\forall x\,(Fx \wedge Gx)$$

§ 11.2. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (1).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 11.3. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNIVERSAL CONDICIONAL

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Si algo es sorprendente, entonces es digno de estudio". (2)

Nótese que (2) es otra forma de decir:

"Dada cualquier cosa, si es sorprendente, entonces es digna de estudio"

"Todo lo que es sorprendente, es digno de estudio"

"Todo lo sorprendente es digno de estudio"

Las cuatro son variantes estilísticas de la misma proposición.

Sin embargo, esta proposición es netamente distinta a (1).

En efecto, decir que **"si algo es sorprendente, es digno de estudio"** — que es lo que dice (2) — deja hueco a la posibilidad de que haya cosas no sorprendentes y no dignas de estudio.

Mientras que decir que **"todo es, a la vez, sorprendente y digno de estudio"** — que es lo que dice (1) — excluye esa posibilidad.

Por consiguiente, utilizaremos la misma tabla de convenciones simbólicas que antes, pero formalizaremos (2) mediante:

$$\forall x\,(Fx \to Gx)$$

Nótese que, en esta ocasión, las fórmulas

$\forall x\,(Fx \land Gx)$ y $\forall x\,(Fx \to Gx)$

no solo son **distintas**, sino que **tampoco son lógicamente equivalentes** (lo veremos en **§ 26.2**).

§ 11.4. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (2).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 11.5. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNIVERSAL CONDICIONAL

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Todos los planetas son esféricos". (3)

Aquí también tenemos que empezar por darnos cuenta de que no estamos diciendo que todas las cosas que existen sean a la vez planetas y esféricas. Tan solo estamos diciendo que **"si algo es un planeta, entonces ese algo es esférico"**.

Teniendo esto en cuenta, procedemos a establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser un planeta*

G : *ser esférico*

Y basándonos en esta tabla de convenciones, así como en el precedente anterior, formalizamos (3) mediante:

$$\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$$

§ 11.6. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 11.7. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNIVERSAL CONDICIONAL

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Todes les estudiantes de Rostropóvich fueron violoncelistas". (4)

A tal efecto, procedemos a establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : Rostropóvich

F : *ser violoncelista*

K : *ser estudiante de*

Y por último, basándonos en esta tabla de convenciones, y sobre la experiencia de los precedentes anterirores, formalizamos (4) mediante:

$$\forall x(Kxa \to Fx)$$

§ 11.8. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (4).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 11.9. CUARTO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE UNIVERSAL CONDICIONAL

A continuación, nos proponemos formalizar la proposición :

"Todos los planetas son esféricos y giran sobre su eje". (5)

En este caso, la tabla de convenciones podría ser:

F : *ser un planeta*

G : *ser esférico*

H : *girar sobre su eje*

Y basándonos en esta tabla de convenciones, formalizamos (5) mediante:

$$\forall x(Fx \to Gx \land Hx)$$

§ 11.10. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (5).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 11.11. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE NEGACIÓN DE UNIVERSAL CONDICIONAL

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

“No todos los coches son blancos”. (6)

Evidentemente, esta es la negación de la proposición:

“Todos los coches son blancos”

Ahora bien, en **§ 11.5** ya vimos cómo formalizar proposiciones de este tipo.

Por consiguiente, lo que tenemos que hacer ahora es anteponer una negación al tipo de fórmula que vimos en **§ 11.5** .

Así pues, procedemos a establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

F : *ser un coche*

G : *ser blanco*

Y a continuación, aplicando dicha tabla y teniendo en cuenta que hay negar la fórmula que vimos en **§ 11.5** , es claro que la formalización correcta de (6) será:

$$\neg\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$$

§ 11.12. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (6).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 11.13. TERCER EJEMPLO DE CORRELACIÓN ENTRE COMBINACIONES COMPLEJAS DE CUANTIFICACIÓN Y NEGACION

Nótese la correlación entre (6) y :

"Hay coches que no son blancos". (7)

Evidentemente, ambas proposiciones ((6) y (7)) son lógicamente equivalentes, porque no puede ser verdadera la una sin la otra.

Sin embargo, la formalización de (7) es distinta:

$$\exists x\,(Fx \wedge \neg Gx)$$

Así lo vimos en **§ 10.6** , bajo la misma tabla de convenciones simbólicas que acabamos de estipular para (6).

Por consiguiente, (6) y (7) son *proposiciones distintas*, y no una mera variante estilística una de otra. De hecho, su estructura lógica es distinta, como se aprecia en las distintas formalizaciones de cada una.

Paralelamente,

$\neg\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$ y $\exists x\,(Fx \wedge \neg Gx)$

son fórmulas distintas, aunque sean lógicamente equivalentes, como veremos en **§ 25.14** .

§ 11.14. CUESTIONES

1. Inspirándote en la correlación entre (6) y (7), indica una proposición que tenga el mismo tipo de correlación con el ejemplo que has puesto en **§ 11.12** .
2. Formaliza la proposición que acabas de indicar.

§ 11.15. CUARTO EJEMPLO DE CORRELACIÓN ENTRE COMBINACIONES COMPLEJAS DE CUANTIFICACIÓN Y NEGACION

También es interesante hacer notar la correlación entre:

"Todos los cuervos son negros". (8)

y:

"No hay ningún cuervo que no sea negro". (9)

Evidentemente, (8) y (9) son proposiciones distintas (no son meras variantes estilísticas). Pero son lógicamente equivalentes, porque no puede ser verdadera la una sin la otra.

Para la formalización de estas dos proposiciones, podemos utilizar la siguiente tabla:

$$F \quad : \quad \textit{ser un cuervo}$$

$$G \quad : \quad \textit{ser negro}$$

A continuación, la formalización de (8) está clara, porque hemos visto muchos ejemplos de ello (en **§ 11.5** , sin ir más lejos):

"Todos los cuervos son negros" : $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$

Y la formalización de (9), por su parte, la vimos en **§ 10.12** :

"No hay ningún cuervo que no sea negro" : $\neg\exists x\,(Fx \wedge \neg Gx)$

En **§ 25.14** demostraremos que también estas dos fórmulas son lógicamente equivalentes.

§ 11.16. CUESTIONES

1. Indica una proposición que sea similar a (8) y otra que sea similar a (9).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para las mismas.
3. Indica cómo formalizar dichas proposiciones, a partir de la tabla señalada.

§ 11.17. CORRELACIÓN DE HEMPEL

A continuación, vamos a abordar la formalización de:

"Todo lo que es no-negro es no-cuervo". (10)

Nótese que (10) es otra forma de decir::

"Dada cualquier cosa, si no es negra
entonces no es un cuervo". (11)

En efecto, (10) y (11) son variantes estilísticas de la misma proposición.

Por consiguiente, aplicando la tabla de convenciones que acabamos de dar, estas dos proposiciones se han de formalizar de la misma manera:

$$\forall x\,(\neg Gx \to \neg Fx)$$

Por otra parte, (8) no es una variante estilística de (10), pero sí es lógicamente equivalente a ella (es decir, que no puede ser verdadera la una sin la otra).

Y lo mismo ocurre con sus formulaciones respectivas (es decir, con las fórmulas que corresponden a (8) y a (10), bajo la tabla de convenciones que estamos manejando):

$$\forall x\,(Fx \to Gx) \qquad\qquad \forall x\,(\neg Gx \to \neg Fx)$$

Estas dos fórmulas son lógicamente equivalentes, como demostraremos en **§ 25.15** .

La equivalencia lógica entre las proposiciones (8) y (10) da lugar a la llamada *"Paradoja de Hempel"*. Tal paradoja pertenece la teoría de la confirmación, y se estudia en Filosofía de la ciencia.

§ 11.18. CUESTIONES

1. Indica una proposición que sea similar a (8) y otra que sea similar a (10).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para las mismas.
3. Indica cómo formalizar dichas proposiciones, a partir de la tabla señalada.

§ 11.19. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 12

Combinaciones de existenciales y universales

§ 12.1. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE EXISTENCIALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

$$\text{“\textit{Hay una cosa que es causa de otra}”.} \tag{1}$$

En este caso, antes de establecer la tabla de convenciones simbólicas, tenemos que darnos cuenta de que la relación *ser causa de* conecta dos objetos: por un lado, la causa; y por otro lado, aquello que es causado (es decir, el efecto).

Por consiguiente, para formalizar dicha relación, necesitaremos un simpred binario, como por ejemplo K.

Por consiguiente, la tabla de convenciones para (1) sería sencillamente:

$$K \;:\; \textit{ser causa de}$$

A partir de aquí, es fácil darse cuenta de que (1) es una afirmación *doblemente existencial*, ya que nos dice que existe una cosa que es la causa, y que existe otra cosa que es el efecto.

Por consiguiente, para formalizar (1) necesitaremos utilizar una combinación de dos cuantificadores existenciales, cada uno con su propia variable de cuantificación. Si cogemos x e y como variables en ese orden, el resultado será:

$$\exists x \, \exists y \, Kxy$$

§ 12.2. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE EXISTENCIALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

$$\text{“\textit{Algo se parece a algo}”.} \tag{2}$$

En este caso, la relación relevante (*ser parecido a*) también involucra dos objetos. Por consiguiente, para formalizar esta relación también necesitamos un simpred binario, como puede ser el mismo K .

Así pues, una tabla de convenciones para (2) sería:

K : *ser parecido a*

Por otra parte, también es claro que (2) afirma la existencia de dos cosas, tales que una se parece a la otra.

Por consiguiente, la formalización de (2) también exigirá una combinación de dos cuantificadores existenciales, como en el caso anterior. Y por lo tanto, el resultado podría ser:

$$\exists x \, \exists y \, Kxy$$

§ 12.3. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (1) y (2).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 12.4. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE UNIVERSALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

$$\text{“}\textit{Todo se parece a todo}\text{”}. \tag{3}$$

Vamos a proceder a formalizar (3), independientemente de que la consideremos verdadera o falsa.

Para ello, es obvio que podemos usar la misma tabla de convenciones que acabamos de usar para (2).

Ahora bien, en este caso no afirmamos que *haya dos objetos* tales que uno se parezca al otro. En este caso, lo que afirmamos es que *cualesquiera dos objetos* se parecen entre sí.

Por lo tanto, lo que necesitamos aquí es una pareja de cuantificadores universales, cada uno con su propia variable de cuantificación. El resultado podría ser:

$$\forall x\, \forall y\, Kxy$$

§ 12.5. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE UNIVERSALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Todo está conectado con todo". (4)

Aquí también procederemos a la formalización, sin preocuparnos por si la proposición en cuestión es verdadera o falsa.

En este caso, necesitamos una nueva tabla de convenciones, como por ejemplo:

K : *está conectado con*

Y a partir de aquí, es claro que podemos formalizar (4) mediante:

$$\forall x \, \forall y \, Kxy$$

§ 12.6. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3) y (4).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 12.7. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE EXISTENCIALES Y UNIVERSALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Todo está conectado con algo". (5)

Obviamente, en este caso nos vale la misma tabla de convenciones del caso anterior. Pero la formalización será algo más complicada.

En efecto, lo que viene a decir (5) es que dada cualquier cosa, existe otra cosa con la que la primera cosa está conectada.

Por consiguiente, ello involucra una afirmación universal (*"para cualquier cosa, sucede que ..."*), conjuntamente con una afirmación existencial (*"... existe otra cosa, con la cual la primera cosa está conectada"*).

Esto sugiere que utilicemos un cuantificador universal, y a continuación un cuantificador existencial, cada uno con una variable distinta. Pues bien, cogiendo las variables x e y en ese orden, como venimos haciendo, el resultado será:

$$\forall x \, \exists y \, Kxy$$

§ 12.8. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (5).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.

3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 12.9. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE EXISTENCIALES Y UNIVERSALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay algo que está conectado con todo". (6)

Evidentemente, (5) y (6) son muy distintas. Lo que dice (6) es que existe una cosa que se encuentra conectada con cualquier otra cosa.

Por consiguiente, en (6) también tenemos una afirmación universal y una afirmación existencial, pero están combinadas en orden inverso.

En efecto, aquí aparece en primer lugar la afirmación existencial (*"existe una cosa tal que . . . "*), y a continuación aparece la afirmación universal (*". . . está conectada con cualquier otra cosa*).

Esto sugiere que coloquemos primero el cuantificador existencial, y a continuación el universal. Y el resultado sería:

$$\exists x \, \forall y \, Kxy$$

§ 12.10. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (6).

2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 12.11. TERCER EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE EXISTENCIALES Y UNIVERSALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Cualquier violoncelista toca alguna pieza". (7)

Aquí también tenemos una combinación de universal y existencial, pero un poco más compleja que en los casos anteriores.

En particular, (7) viene a decir que, dada cualquier cosa, si esa cosa es violoncelista, entonces existe otra cosa que es una pieza musical, y que es interpretada por la primera cosa.

Por consiguiente, para formalizar (7) necesitaremos:

- un simpred monario que represente la propiedad de *ser violoncelista*;
- otro simpred monario, que represente la propiedad de *ser una pieza musical*;
- un simpred binario que represente la relación de *tocar* (es decir, *interpretar*, o *ejecutar musicalmente*):

En definitiva, nuestra tabla de convenciones simbólicas podría ser la siguiente:

$$F \quad : \quad \textit{ser violoncelista}$$

$$G \quad : \quad \textit{ser una pieza musical}$$

$$K \quad : \quad \textit{ejecutar musicalmente}$$

Y a partir de aquí, razonamos como sigue.

La primera afirmación contenida en (7) es una afirmación universal, que nos habla de *cualquier violoncelista*.

Por lo tanto, la formalización de (7) deberá empezar con un cuantificador universal, por ejemplo sobre la variable x. Mediante ese cuantificador, enunciaremos que *"si el objeto equis es violoncelista, entonces ..."*:

$$\forall x\,(\,Fx\;\rightarrow\;\ldots$$

Nótese que esto **no es una fórmula**, sino un fragmento de fórmula, que tendremos que completar a continuación con alguna otra cosa.

Pues bien, a continuación tenemos que expresar que existe una pieza musical, la cual el objeto equis toca. Para ello, deberemos usar el cuantificador existencial sobre una nueva variable (por ejemplo, y). Y a continuación, expresaremos que ese segundo objeto es una pieza musical, y que el objeto equis la interpreta:

$$\ldots\;\exists y\,(\,Gy\;\wedge\;Kxy\,)$$

Por último, el resultado de juntar esos dos fragmentos, es justamente la fórmula que buscamos como formalización de (7):

$$\forall x\,(\,Fx\;\rightarrow\;\exists y\,(\,Gy\;\wedge\;Kxy\,)\,)$$

§ 12.12. CUARTO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE COMBINACIONES DE EXISTENCIALES Y UNIVERSALES

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición :

"Hay una pieza que cualquier violoncelista toca". (8)

Nótese la diferencia entre esta proposición y la anterior. Es obvio que cualquier violoncelista toca alguna pieza (si alguien no toca nada al violoncelo, entonces no se le puede llamar "violoncelista").

Sin embargo, es mucho menos obvio que exista una pieza musical de la que se pueda decir que cualquier violoncelista la toca. Quizá podría ser verdad del Preludio de la *1ª Suite para violoncelo solo* de Bach. (Yo diría que, actualmente, cualquier violoncelista profesional del mundo ha tocado esa pieza.)

Pero en cualquier caso, en esta asignatura no nos interesa si existe o no tal pieza — esto es, no nos interesa si (8) es verdad o no. Lo que nos interesa es la estructura lógica de (8), y su diferencia con (7).

Pues bien, vamos a partir de la misma tabla de convenciones anterior, y vamos a proceder a razonar cuál será la formalización correcta de (8), paso por paso.

Para empezar, aquí también tenemos una combinación de afirmación universal y afirmación existencial, al igual que en (7), pero en esta ocasión aparecen en el orden inverso: primero va la afirmación existencial, y luego la universal.

Por consiguiente, la fórmula que buscamos ahora comenzará con un cuantificador existencial, digamos sobre la variable x, y a continuación expresará que ese objeto *equis* es una pieza musical:

$$\exists x\,(\,Gx\ \ldots$$

Nuevamente enfatizamos que **la expresión precedente no es una fórmula**, sino un fragmento incompleto, que tendremos que continuar de alguna manera hasta formar una fórmula.

Pues bien, lo que necesitamos a continuación es enunciar que, además de que el objeto equis es una pieza musical, sucede que para cualquier otro objeto, si ese objeto es violoncelista, entonces interpreta la pieza equis.

Para conseguir esto, empezaremos por poner una conjunción, a fin de unir el fragmento anterior con lo que viene después.

Y a continuación de dicha conjunción, colocaremos un cuantificador universal, en una nueva variable (por ejemplo, la variable y), y expresaremos mediante un condicional, que si ese otro objeto es violoncelista, entonces interpreta la pieza equis.

El resultado de todo esto será el siguiente fragmento de fórmula:

$$\ldots\ \wedge\ \forall y\,(\,Fy\ \rightarrow\ Kyx\,)$$

Y por último, uniendo los dos fragmentos (y cerrando con un paréntesis final), tendremos la formalización correcta de (8), a saber:

$$\exists x\,(\,Gx\ \wedge\ \forall y\,(\,Fy\ \rightarrow\ Kyx\,)\,)$$

§ 12.13. COMPARACIÓN ENTRE EL TERCER Y CUARTO EJEMPLO DE COMBINACIONES ENTRE EXISTENCIALES Y UNIVERSALES

Nótese la diferencia entre las formalizaciones de (7) y (8):

$$\forall x\,(\,Fx \rightarrow \exists y\,(\,Gy \wedge Kxy\,)\,)$$

$$\exists x\,(\,Gx \wedge \forall y\,(\,Fy \rightarrow Kyx\,)\,)$$

Como vemos, los cuantificadores ($\forall$ y $\exists$) aparecen en distinto orden en una fórmula y otra. Además, también las conectivas ($\rightarrow$ y $\wedge$) aparecen en orden distinto.

En cuanto a las variables, aparecen en el mismo orden (primero x y después y), pero su rol cambia en un caso y en otro. En efecto, en la formalización de (7), la variable x representa le violoncelista y la variable y representa la pieza musical. Mientras que en la formalización de (8), la variable x representa la pieza, e y representa le violoncelista.

§ 12.14. CUESTIONES

1. Indica una proposición que sea similar a (7) y otra que sea similar a (8).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para las mismas.
3. Indica cómo formalizar dichas proposiciones, a partir de la tabla señalada.

§ 12.15. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 13

Existenciales numéricos

§ 13.1. ABREVIATURA DE UNICIDAD

Ahora resulta conveniente introducir una nueva **abreviatura especial** para ciertas fórmulas de lenpred, al estilo de la que introdujimos en § **7.2** .

Sea $\exists v A(v)$ una fórmula de cuantificación existencial, formada de acuerdo con la cláusula (7) de § **7.1** .

En § **7.12** explicamos que una fórmula de cuantificación existencial como

$$\exists v A(v)$$

se utiliza para formalizar proposiciones que afirman la existencia de **al menos un objeto** de ciertas características.

También prometimos que más adelante explicaríamos cómo formalizar aquellas proposiciones que afirman la existencia de **exactamente un objeto** de las características que sean.

Pues bien, ha llegado el momento de abordar esa tarea. Y para ello, vamos a introducir una nueva **abreviatura especial**, al estilo de la que introdujimos en **§ 7.2** , con la diferencia de aquella concernía la igualdad negada, y esta concierne cierto tipo de cuantificación existencial.

En efecto, sea $\exists v A(v)$ una fórmula de cuantificación existencial, formada de acuerdo con la cláusula (7) de **§ 7.1** .

Pues bien, vamos a abreviar como $\exists_1 v A(v)$ aquella fórmula que consiste en combinar la cuantificación existencial con una cuantificación universal que viene a decir que si A se puede aplicar a otra variable w , entonces esa variable tiene el mismo valor que v .

Más exactamente:

$\exists_1 v A(v)$ se define como una abreviatura de:

$$\exists v\,(\,A(v)\,\land\,\forall w\,(\,A(w)\,\rightarrow\,w = v\,)\,)$$

A esta abreviatura la llamaremos **“abreviatura de unicidad”**, y nos referiremos a $\exists_1$ como el **“primer cuantificador existencial numérico”**.

A continuación, vamos a ver cómo funciona esta abreviatura en la práctica, a través de varios ejemplos.

§ 13.2. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN DE EXISTENCIALES CON UNICIDAD

Para empezar, vamos a abordar la formalización de la proposición:

"Hay una cosa, y solo una, que es realmente interesante". (1)

Como en ocasiones anteriores, aquí solo vamos a atender a la formalización lógica de esta proposición: no discutiremos si (1) es verdadera o falsa, ni tampoco elucubraremos sobre qué cosa podría ser la única "realmente interesante", si es que tal cosa existiera.

Tampoco investigaremos el significado de *"ser realmente interesante"*, por oposición a *"ser interesante"* a secas.

En cualquier caso, resulta obvio que para formalizar dicha propiedad, cualquiera que sea su significado, necesitamos un simpred monario. Con lo cual, la tabla de convenciones nos podría quedar sencillamente así:

F : *ser realmente interesante*

A partir de aquí, tenemos que expresar que hay una cosa *equis* que tiene la propiedad de *ser realmente interesante*, y que para cualquier otra cosa, si también tiene esa propiedad, entonces es idéntica a *equis*.

Y de ese modo, estaremos diciendo que hay una cosa, y solo una, que es realmente interesante:

$$\exists x\,(\,Fx\ \wedge\ \forall y\,(\,Fy\ \rightarrow\ y = x\,)\,) \tag{2}$$

Esta es, pues, una formalización correcta de (1).

Ahora bien, salta a la vista que la fórmula (2) encaja a la perfección en la abreviatura que acabamos de introducir, por lo que podemos acortar dicha fórmula poniendo sencillamente:

$$\exists_1 x Fx$$

§ 13.3. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (1).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición a partir de la tabla señalada, sin utilizar la abreviatura de unicidad.
4. Indica cómo abreviar la fórmula que acabas de dar, mediante la abreviatura de unicidad.

§ 13.4. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN DE EXISTENCIALES CON UNICIDAD

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición:

"La Tierra tiene un único satélite natural". (3)

En este caso, necesitaremos una tabla de convenciones simbólicas como la siguiente:

a : la Tierra

K : *ser satélite natural de*

De manera análoga al caso anterior, aquí también queremos decir que existe un objeto *equis* que es satélite natural de la Tierra, y que cualquier otro objeto que sea satélite natural de la Tierra ha de ser idéntico a *equis*:

$$\exists x\,(\,Kxa \,\wedge\, \forall y\,(\,Kya \,\rightarrow\, y = x\,)\,)$$

Esta sería una formalización correcta de (3).

Ahora bien, esta fórmula también se puede acortar mediante la abreviatura de unicidad, obteniendo como resultado:

$$\exists_1 xKxa$$

§ 13.5. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición a partir de la tabla señalada, sin utilizar la abreviatura de unicidad.
4. Indica cómo abreviar la fórmula que acabas de dar, mediante la abreviatura de unicidad.

§ 13.6. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIALES DE LA FORMA "AL MENOS DOS"

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición:

"Marte tiene al menos dos satélites naturales". (4)

Como venimos diciendo, no nos interesamos por explorar la verdad o falsedad de las proposiciones que nos proponemos formalizar. Lo único que queremos es analizar su estructura lógica, para asignarles la fórmula de lenpred que mejor las represente. No obstante, por curiosidad, diremos que Marte tiene exactamente dos satélites naturales, llamados "Fobos" y "Deimos".

Pues bien, el caso es que para formalizar (4), necesitaremos una tabla de convenciones simbólicas como la siguiente:

a : Marte

K : *ser satélite natural de*

Por otra parte, lo que (4) afirma es que existen al menos dos objetos distintos que son satélites de Marte.

Por consiguiente, para formalizar esta proposición, tendremos que utilizar una doble cuantificación existencial, con dos variables distintas, y a continuación añadir la condición de que cada variable corresponde a un objeto distinto, y ambas corresponden a un satélite de Marte.

El resultado sería, pues:

$$\exists x\,\exists y\,(\,Kxa\ \wedge\ Kya\ \wedge\ x \neq y\,) \tag{5}$$

§ 13.7. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (4).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 13.8. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIALES DE LA FORMA "COMO MUCHO DOS"

Ahora supongamos que queremos formalizar la proposición:

"Marte tiene como mucho dos satélites naturales". (6)

Lo que (6) afirma es que no existen tres objetos distintos que sean satélites naturales de Marte.

Por consiguiente, para formalizar esta proposición, podemos poner sencillamente:

$$\neg \exists x \exists y \exists z (Kxa \wedge Kya \wedge Kza \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z) \tag{7}$$

§ 13.9. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (6).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 13.10. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN MEDIANTE EXISTENCIALES DE LA FORMA "EXACTAMENTE DOS"

Por último, supongamos que queremos formalizar la proposición:

"Marte tiene exactamente dos satélites naturales". (8)

Pues bien, es obvio que (8) equivale a la afirmación conjunta de (4) y (6).

Por consiguiente, para formalizar (8) basta con poner en conjunción las fórmulas (5) y (7), o bien, de forma algo más elegante:

$$\exists x\, \exists y\, (\, Kxa \wedge Kya \wedge x \neq y \wedge \forall z(Kza \rightarrow z = x \vee z = y)\,) \tag{9}$$

La fórmula (9) se puede utilizar para introducir otra abreviatura, con un segundo cuantificador existencial numérico ($\exists_2$); y se podría continuar la serie en otros similares ($\exists_3$, etc). Pero aquí no vamos a hacer uso de estos, nos conformamos con $\exists_1$.

§ 13.11. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (8).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 13.12. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 14

Descripciones definidas y presuposición – Intensión y extensión

§ 14.1. LAS DESCRIPCIONES DEFINIDAS Y LA PRESUPOSICIÓN

A continuación, vamos a abordar la formalización de la proposición:

$$\text{“\textit{La catedral de Murcia es barroca}”.} \tag{1}$$

Para ello tenemos que realizar un *excursus* previo acerca de las **descripciones definidas**, que ya mencionamos brevemente en **§ 2.11** y **§ 5.11** .

En efecto, la expresión *“la catedral de Murcia”* es una *descripción definida.* Y el uso de este tipo de expresiones en el lenguaje natural **presupone** que la descripción en cuestión denota un único objeto (es decir, que existe un objeto denotado por dicha descripción, y que además es único).

A dicho requisito le llamamos **“condición de existencia y unicidad”**. La *condición de existencia* exige que haya un objeto que satisfaga la descripción en cuestión. Y la *condición de unicidad* exige que dicho objeto sea único (es decir, que solo haya un objeto que satisfaga dicha descripción).

La **presuposición** es un recurso perteneciente a la **pragmática** del lenguaje natural, y se estudia en *Filosofía del lenguaje*.

§ 14.2. DESCRIPCIONES DEFINIDAS VACÍAS O CON REFERENCIA MÚLTIPLE

La presuposición tiene la consecuencia de que, **en el caso en que una descripción definida no denote ningún objeto, o denote más de uno, el enunciado resultante carece de valor de verdad**.

Así por ejemplo, el enunciado

"La catedral de Alcantarilla es barroca"

carece de valor de verdad (no es verdadero ni falso) por la sencilla razón de que no hay catedral en Alcantarilla. En este caso, falla la condición de existencia.

Del mismo modo, el enunciado

"La catedral de Londres es barroca"

también carece de valor de verdad, porque en Londres no hay una catedral, sino 18. En este otro caso, falla la condición de unicidad.

§ 14.3. CUESTIONES

1. Explica con tus propias palabras qué es la presuposición, en relación con las descripciones definidas.

2. Pon un ejemplo de enunciado similar a (1), que tenga sentido pleno, e indica si es verdadero o falso.
3. Pon un ejemplo de enunciado que contenga una descripción definida que no denote ningún objeto.
4. Indica si el enunciado precedente es verdadero o falso.
5. Pon un ejemplo de enunciado que contenga una descripción definida que denote más de un objeto.
6. Indica si el enunciado precedente es verdadero o falso.

§ 14.4. LA PRESUPOSICIÓN Y LA FORMALIZACIÓN DE ENUNCIADOS EN LENPRED

En logpred no hay nada parecido a la presuposición. De hecho, logpred carece totalmente de recursos pragmáticos.

Además, como veremos en **§ 16.8** , logpred es bivalente, al igual que logprop, y ello significa que no puede haber una fórmula que no sea ni verdadera ni falsa bajo una interpretación.

Todo ello nos obliga a formalizar (1) mediante un artificio, que consiste en incorporar la condición de existencia y unicidad a la propia fórmula, como si la proposición incluyera la *afirmación* de la condición de existencia y unicidad, en lugar de simplemente *presuponerla*. Vamos a verlo.

§ 14.5. UN EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN CON DESCRIPCIONES DEFINIDAS

El primer paso para abordar la formalización de (1) es establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas. Tal tabla podría ser, por ejemplo:

a : Murcia

F : *ser barroca*

K : *ser catedral de*

Pues bien, a partir de aquí, procedemos a formalizar que hay una catedral de Murcia y solo una, (es decir, la condición de existencia y unicidad). Y a continuación, añadimos la referencia a ser barroca.

El resultado sería, por ejemplo, la fórmula:

$$\exists x\,(\,Kxa\;\wedge\;\forall y(Kya \rightarrow y = x)\;\wedge\;Fx\,) \tag{2}$$

Lo que esta fórmula viene a decir, bajo la tabla de convenciones simbólica indicada, es que hay un objeto *equis* que es catedral de Murcia, que cualquier otro objeto que sea catedral de Murcia coincide con *equis*, y que además *equis* es barroco.

En consecuencia, la fórmula que acabamos de dar, interpretada bajo esa tabla de convenciones, sería falsa si la catedral de Murcia no fuera barroca, pero también sería falsa si Murcia no tuviera catedral, o tuviera más de una.

§ 14.6. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (1).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 14.7. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN CON DESCRIPCIONES DEFINIDAS

A continuación, supongamos que queremos formalizar la proposición:

"La capital de España es Madrid". (3)

El primer paso consiste en establecer la correspondiente tabla de convenciones simbólicas, que en este caso podría ser:

a : España

b : Madrid

K : *ser capital de*

Aquí también tenemos una descripción definida: *"la capital de España"*. Pero en este caso, lo que decimos del objeto así descrito es que coincide con Madrid (esto es, que coincide con el objeto nombrado por ese nombre propio).

Por lo tanto, la fórmula que buscamos tendrá que expresar que hay una y solo una capital de España (es decir, la condición de existencia y unicidad); y a continuación, tendrá que expresar que dicho objeto es justamente Madrid.

El resultado sería, por ejemplo, la fórmula:

$$\exists x\,(\,Kxa\ \wedge\ \forall y(Kya \rightarrow y = x)\ \wedge x = b\,)$$

Lo que esta fórmula viene a decir, leída bajo la tabla de convenciones simbólica indicada, es que hay un objeto *equis* que es capital de España, que cualquier otro objeto que sea capital de España coincide con *equis*, y que además *equis* es idéntico a Madrid.

§ 14.8. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de proposición similar a (3).
2. Especifica una tabla de convenciones simbólicas para dicha proposición.
3. Indica cómo formalizar dicha proposición, a partir de la tabla señalada.

§ 14.9. LAS DESCRIPCIONES DEFINIDAS Y EL PRIMER CUANTIFICADOR NUMÉRICO

Sería un error aplicar la abreviatura de unicidad (es decir, el primer cuantificador numérico) a la formalización de descripciones definidas.

En efecto, la fórmula

$$\exists_1 x \, (\, Kxa \wedge Fx \,)$$

leída bajo la tabla de convenciones de **§ 14.5** , viene a decir que hay un único objeto que cumple con las dos condiciones de ser la catedral de Murcia y ser barroco. En otras palabras, tal fórmula viene a decir que:

Hay solo una catedral de Murcia que es barroca

Pero esto se aleja del enunciado (1) aún más que la fórmula (2).

Así por ejemplo, resulta que de las 18 catedrales de Londres, solo una es barroca (*Saint Paul*). Por tanto, podemos afirmar acertadamente que

"Hay solo una catedral de Londres que es barroca" (4)

Pero esa afirmación no equivale a decir:

"La catedral de Londres es barroca" (5)

En efecto, el enunciado (4) es verdadero, mientras que (5) es *carente de sentido*, al incumplirse la condición de unicidad.

§ 14.10. INTENSIÓN Y EXTENSIÓN

La **intensión** de un predicado lingüístico es su contenido semántico o cognitivo, es decir, la idea que expresa.

Por su parte, la **extensión** es el conjunto de objetos que satisface ese predicado en un momento dado.

Como eslogan a recordar, podemos poner:

**LA INTENSIÓN ES UNA EXPLICACIÓN,
LA EXTENSIÓN ES UN LISTADO.**

Así por ejemplo, la intensión del predicado *"océano"* es el concepto de *ser un océano*, es decir, una gran masa de agua salada que separa los continentes de la Tierra. Mientras que la extensión de dicho predicado, a fecha actual, es el conjunto de océanos que hay en este momento: Atlántico, Pacífico, Índico, Ártico y Antártico.

Obviamente, la extensión de un predicado puede cambiar con el tiempo. Así por ejemplo, hace 300 millones de años, en la Tierra había un único continente (*Pangea*), y un único océano (*Panthalassa*).

La diferencia entre intensión y extensión también se estudia en *Filosofía del lenguaje*, pero no concierne a la pragmática sino a la **semántica** del lenguaje (es decir, al estudio del significado lingüístico).

§ 14.11. MÁS EJEMPLOS DE INTENSIÓN VERSUS EXTENSIÓN

Yo puedo intentar explicar

Las características de las películas que más me gustan. (6)

Pero también puedo dar, directamente un

Listado de mis películas favoritas. (7)

(6) es intensional, porque apela a un *contenido semántico* (es decir, a un *significado*, una *explicación*, una *idea*); mientras que (7) es extensional, porque apela sencillamente a un *conjunto de objetos.*

Del mismo modo, alguien puede intentar explicar cómo diferenciamos en Murcia entre un *pueblo* y una *ciudad*. Pero también puede, alternativamente, dar un listado con todos los pueblos de la Región de Murcia, y otro listado con todas sus ciudades.

Pues bien, la primera explicación será intensional, porque apela a las ideas de *pueblo* y *ciudad*, que hay que tratar de entender o captar. Mientras que los listados de pueblos y ciudades son extensionales, porque no hay nada que entender — simplemente identificar qué poblaciones aparecen en un listado u otro.

Por último, una explicación de lo que es la *admiración*, en abstracto, es un intento de caracterizar su *intensión*. Mientras que un listado de personas en el que se especifica quién admira a quién, es un intento de caracterizar la *extensión* de ese mismo predicado.

§ 14.12. CUESTIONES

1. Explica con tus propias palabras la distinción entre intensión y extensión.
2. Reproduce literalmente el eslogan recuadrado en **§ 14.10** (es conveniente que lo memorices para un buen seguimiento de la asignatura).
3. Pon un ejemplo de intensión y extensión de un mismo predicado.

§ 14.13. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 15

Semántica formal – Conjuntos y subconjuntos

§ 15.1. LA SEMÁNTICA FORMAL DE PRIMER ORDEN CLÁSICA

Como explicamos en logfor1, la formalización es útil para analizar la estructura lógica de las proposiciones del lenguaje natural, pero tiene importantes limitaciones: es una herramienta asistemática, presenta importantes desajustes con el lenguaje natural, y en definitiva, resulta demasiado imprevisible y resbaladiza.

Uno de los problemas de la formalización es que utiliza categorías de carácter intensional, es decir, que refieren a una comprensión intuitiva de los conceptos utilizados.

Pues bien, la lógica nos ofrece una herramienta más sencilla y pulida para interpretar las fórmulas de lenpred, que es puramente extensional — es decir, que refiere únicamente a objetos y conjuntos de objetos.

A dicha herramienta la llamaremos **"semántica formal de primer orden clásica"** (abreviadamente, **"semprim"**). Semprim es el correlato de la *semántica vf* que estudiamos en logofor1, pero adaptada a nuestro nuevo lenguaje.

De hecho, también la semántica vf era puramente extensional, dado que la interpretación de cada fórmula era un simple objeto (un valor de verdad: $\mathbb{V}$ o $\mathbb{F}$), en lugar de referir a una idea o significado cognitivo más complejo.

§ 15.2. CONJUNTOS DE OBJETOS

La noción de **conjunto de objetos** desempeña un papel muy importante en semprim. Tanto es así, que para estar en condiciones de definir esta semántica, vamos a necesitar unas nociones elementales de la llamada **“teoría de conjuntos”**.

Cuando decimos **“conjunto”**, nos referimos a **cualquier colección de objetos, es decir, personas, animales o cosas, concretas o abstractas**. En este punto, nos remitimos a **§ 1.6** , así como a la sección §8.4 de logfor1, que conviene releer ahora con atención, para tenerla bien fresca en la cabeza.

Pues bien, a lo que dijimos en §8.4 de logfor1, empezamos por añadir ahora que un conjunto puede tener elementos heterogéneos.

Por ejemplo, podemos formar un conjunto de tres elementos, con *la violoncelista Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives* y *el número* π. En principio, no parece haber ninguna característica que estos tres objetos tengan en común, pero eso no nos impide formar un conjunto con ellos.

§ 15.3. CUESTIONES

Pon un ejemplo de conjunto de objetos heterogénos, en el que haya objetos materiales y objetos abstractos, sin ninguna conexión aparente.

§ 15.4. EL CONJUNTO VACÍO

A continuación, supongamos que cogemos una caja de zapatos, sacamos los zapatos que contiene, y nos quedamos con la caja vacía. Lo que tenemos es una caja de zapatos vacía, pero por ello no deja de ser una caja de zapatos.

Pues bien, los **conjuntos vacíos** son como cajas de zapatos vacías, en el sentido que vamos a explicar a continuación.

El planeta Marte tiene dos satélites, Fobos y Deimos. Por lo tanto, usando la notación que aprendimos en la sección §8.4 de logfor1, podemos poner:

$$\text{Conjunto de satélites de Marte: } \{\,\text{Fobos}\,,\ \text{Deimos}\,\}$$

Sin embargo, el planeta Venus no tiene satélites. Por consiguiente, el *conjunto de satélites de Venus* no tiene elementos (no hay ningún objeto que pertenezca a dicho conjunto). Y por esta razón decimos que el conjunto de satélites de Venus es un "conjunto vacío".

Otro tanto ocurre con el *conjunto de los caballos que vuelan.* Este conjunto no tiene elementos, porque no hay ningún caballo capaz de volar por sí mismo. Por consiguiente, el conjunto de caballos que vuelan está tan vacío como el conjunto de satélites de Venus.

Todos los conjuntos vacíos se parecen en algo fundamental: no tienen elementos. Y por ello vamos a tratar a todos los conjuntos vacíos como si fueran uno solo, e incluso les vamos a dar un mismo nombre: "$\varnothing$".

§ 15.5. CUESTIONES

Pon un ejemplo de conjunto vacío.

§ 15.6. CONJUNTOS Y SUBCONJUNTOS

Dados dos conjuntos D y E, decimos que "D **es un subconjunto de** E" (o que "D **está incluido en** E"), cuando sucede que todos los elementos de D son elementos de E. Esto lo abreviamos diciendo que "D **es un subcjto de** E, o poniendo:

$$D \subseteq E$$

Así por ejemplo, si D_1 es el conjunto de provincias de Andalucía, y D_2 es el conjunto de provincias de España, entonces es obvio que D_1 es un subconjunto de D_2. Y por lo tanto, ponemos:

$$D_1 \subseteq D_2$$

o lo que es lo mismo,

$$\{\text{provincias de Andalucía}\} \subseteq \{\text{provincias de España}\}$$

A continuación, sea $2\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales pares, es decir:

$$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Pues bien, este conjunto está obviamente incluido en el conjunto de los números naturales (o dicho de otro modo, es un subconjunto suyo). Por lo tanto, ponemos:

$$2\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$$

Un último ejemplo nos lo proporciona el conjunto formado por Quijote y Sancho, los dos principales protagonistas de *El Quijote*. Obviamente, este conjunto está incluido en el conjunto de todos los personajes de *El Quijote* (es decir, es un subconjunto suyo). Por lo tanto, ponemos:

$$\{\,\text{Quijote}\,,\text{Sancho}\,\} \;\subseteq\; \{\,\text{personajes de } \textit{El Quijote}\,\}$$

§ 15.7. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de conjunto (cualquiera que se te ocurra), y denomínalo "E_2".
2. Pon un ejemplo de conjunto que esté incluido en E_2, y denomínalo "E_1".

§ 15.8. PERTENENCIA E INCLUSIÓN

Es importante advertir la diferencia que existe la noción de **inclusión** ($\subseteq$), que acabamos de definir, y la noción de **pertenencia** ($\in$), que introdujimos en la sección §8.4 de logfor1.

La *pertenencia* es la conexión que existe entre un elemento y un conjunto al que pertenece.

Por ejemplo, el conjunto de provincias de España (D_2) consta de 50 elementos: Albacete, Alicante, Almería, Asturias, etc. Y de cada una de estas provincias, decimos que **"pertenece"** al conjunto D_2, lo cual señalizamos mediante el símbolo "$\in$":

Albacete $\in D_2$ Alicante $\in D_2$ Almería $\in D_2$ ...

Por su parte, la *inclusión* es una relación entre que se da entre dos conjuntos, cuando el primero es un subconjunto del segundo (es decir, cuando ocurre que todos los elementos del primero son elementos del segundo). Esto es algo muy distinto a lo anterior.

Por ejemplo, el conjunto de provincias de Andalucía (D_1) está incluido en el conjunto de provincias de España, porque todas las provincias andaluzas son provincias españolas, obviamente. Y eso es lo que señalizamos poniendo:

$$D_1 \subseteq D_2$$

Sin embargo, el conjunto de provincias de Andalucía (D_1) *no es un elemento* del conjunto de provincias de España (D_2). La razón es que Andalucía no es ella misma una provincia, sino un conjunto de provincias, que es algo muy distinto. Por esa razón, debemos poner:

$$D_1 \notin D_2$$

Del mismo modo, el conjunto de provincias de Aragón (es decir, el conjunto formado por Zaragoza, Huesca y Teruel) también es un subconjunto del conjunto de provincias de España. Y sin embargo, este conjunto no es un *elemento* del conjunto de provincias de España, porque Aragón no es una provincia, sino un conjunto de provincias, que es algo muy distinto.

De igual manera, el conjunto de provincias españolas que empiezan por la letra “A” también está incluido en D_2, pero no es un elemento suyo. Y así podríamos seguir con infinidad de ejemplos, para subrayar la diferencia entre estas dos nociones, pertenencia ($\in$) e inclusión ($\subseteq$).

§ 15.9. CUESTIONES

En relación a tus ejemplos de **§ 15.7** , explica lo más claramente que puedas por qué es el caso que $E_1 \subseteq E_2$, pero sin embargo $E_1 \notin E_2$.

§ 15.10. SUBCONJUNTOS DE SÍ MISMOS Y SUBCONJUNTOS PROPIOS

Es importante advertir que, trivialmente, todo conjunto es subconjunto de sí mismo. Esto es así porque, dado cualquier conjunto D, es trivialmente verdadero que todos los elementos de D son elementos de D. Por consiguiente, para cualquier conjunto D, siempre tenemos:

$$D \subseteq D$$

Esto se aplica, en particular, a todos los ejemplos de conjuntos que hemos visto aquí. Todos ellos son, trivialmente, subconjuntos de sí mismos:

$$\begin{aligned} \{\text{ provincias de Andalucía }\} &\subseteq \{\text{ provincias de Andalucía }\} \\ 2\mathbb{N} &\subseteq 2\mathbb{N} \\ \mathbb{N} &\subseteq \mathbb{N} \\ \{\text{ Quijote, Sancho }\} &\subseteq \{\text{ Quijote, Sancho }\} \\ &\dots \end{aligned}$$

En función de esto, cuando queremos hablar de aquellos subconjuntos de un conjunto que no coinciden con el conjunto entero, utilizamos la denominación **"subconjuntos propios"**. Así pues, los subconjuntos propios de un conjunto son **aquellos subconjuntos distintos al conjunto entero**.

§ 15.11. EL CONJUNTO VACÍO COMO SUBCONJUNTO DE CUALQUIER CONJUNTO

De forma paralela a lo anterior, hay que advertir que el conjunto vacío ($\varnothing$) es también, trivialmente, subconjunto de cualquier conjunto.

En efecto, puesto que $\varnothing$ no tiene elementos, resulta trivialmente verdadero que todos sus elementos pertenecen a cualquier conjunto que digamos. En otras palabras, dado cualquier conjunto D, siempre tenemos, trivialmente:

$$\varnothing \subseteq D$$

Huelga decir que esto se aplica a todos los ejemplos de conjuntos que hemos visto aquí, incluido el propio $\varnothing$. Por consiguiente, tenemos:

$$\begin{aligned}
\varnothing &\subseteq \{\,\varnothing\,\} \\
\varnothing &\subseteq \{\,\text{provincias de Andalucía}\,\} \\
\varnothing &\subseteq 2\mathbb{N} \\
\varnothing &\subseteq \mathbb{N} \\
\varnothing &\subseteq \{\,\text{Quijote, Sancho}\,\} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

§ 15.12. CUESTIONES

1. Explica lo más claramente que puedas por qué es el caso que $D \subseteq D$ para cualquier conjunto D.

2. Explica lo más claramente que puedas por qué es el caso que $\varnothing \subseteq D$ para cualquier conjunto D.

3. Hemos dicho que $\varnothing$ es subconjunto de cualquier conjunto. Ahora bien, ¿habrá algún conjunto del cual $\varnothing$ no sea *subconjunto propio*? Si se te ocurre alguno, indícalo y razona tu respuesta.

§ 15.13. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 16

Secuencias ordenadas – El universo de discurso

§ 16.1. SECUENCIAS ORDENADAS DE OBJETOS

Una **secuencia ordenada de objetos** (abreviadamente, **secuencia**, o **sec**) es una fila en la que cada objeto ocupa una o varias posiciones.

Hay una gran diferencia entre una secuencia ordenada y un simple conjunto.

En un conjunto, los objetos pueden aparecer en cualquier orden: es indiferente el orden en el que los presentemos. Y además, cada objeto aparece una única vez (no se tienen en cuenta las repeticiones).

Por el contrario, en una secuencia de objetos, el orden es fundamental: no es lo mismo estar en $1^{\underline{a}}$ posición en una cola, que estar en $2^{\underline{a}}$ posición, o tener la posición 27.

Además, un mismo objeto puede figurar varias veces en una secuencia, ocupando distintos lugares de la fila (así como en una cola con tickets, alguien puede coger varios números distintos, por si acaso se le pasa uno, tener otra opción más adelante).

Para representar secuencias ordenadas, utilizaremos los ángulos “<” y “>”, colocando a los objetos de la secuencia entre esos ángulos, en el orden que corresponda. Esta notación es bien distinta de las llaves que utilizamos para los conjuntos, “{” y “}”.

Además, a los objetos que conforman las secuencias los llamaremos **“componentes”** (abreviadamente **“comp”**); y más en particular, **“1º componente”**, **“2º componente”**, etc. También aquí marcamos la diferencia respecto a los conjuntos, a cuyos objetos llamamos “elementos”.

§ 16.2. CUESTIONES

- Señala la diferencia que existe entre secuencias y conjuntos, en relación al orden de los objetos en cuestión.
- Señala la diferencia que existe entre secuencias y conjuntos, en relación a las repeticiones.

§ 16.3. UN EJEMPLO DE SECUENCIA ORDENADA DE OBJETOS

Nuestro primer ejemplo de secuencia ordenada de objetos consistirá en los campeones del mundo de ajedrez entre 1900 y 1946.

El primer campeón mundial de ajedrez en el siglo XX fue Lasker, que consiguió el título en 1894 y lo retuvo hasta 1921. El segundo fue Capablanca, que tuvo el título de 1921 a 1927. El tercero fue Alekhine, que tuvo el título de 1927 a 1935. El cuarto fue Max Ewe, quien fue campeón entre 1935 y 1937. Y el quinto fue otra vez Alekhine, que recuperó el título en 1937, y murió sin haberlo perdido, en 1946.

Por consiguiente, la secuencia de campeones mundiales de ajedrez entre 1900 y 1946 está formada por:

$$< \text{Lasker}\,,\ \text{Capablanca}\,,\ \text{Alekhine}\,,\ \text{Ewe}\,,\ \text{Alekhine} >$$

Como vemos, el orden de la secuencia refleja la sucesión temporal de campeones, y es importante.

En efecto, Lasker es el 1º componente de la secuencia y Capablanca el 2º, porque Lasker tuvo el título en un período anterior a Capablanca. Y cuando estos dos jugadores se enfrentaron por el título mundial, fue Capablanca quien arrebató el título a Lasker, no al revés.

Además, observamos que Alekhine aparece dos veces, en 3ª y 5ª posición, porque fue campeón en dos períodos distintos, con un breve interludio en el que Ewe ostentó el título. Por lo tanto, las repeticiones de los componentes también son importantes cuando hablamos de secuencias de objetos.

Sin embargo, si pensamos ahora en el **conjunto** de campeones mundiales de ajedrez entre 1900 y 1946, estaremos hablando de algo muy distinto.

En efecto, el conjunto de campeones mundiales de ajedrez en el período 1900–1946 está formado por *cuatro elementos*: Lasker, Capablanca, Alekhine y Ewe, independientemente del orden en que los mencionemos. Y Alekhine no figura dos veces en dicho conjunto, sino solamente una, a pesar de haber sido campeón en dos períodos distintos. La razón es que los conjuntos, a diferencia de las secuencias, no contemplan repeticiones de sus elementos (en un conjunto, cada elemento figura una única vez).

§ 16.4. OTRO EJEMPLO DE SECUENCIA ORDENADA

Otro ejemplo de secuencia ordenada de objetos, bastante más caprichoso que el que anterior, es el siguiente:

$$< \pi\,, \text{Dulcinea del Toboso}\,, \text{el pacifismo}\,, \pi\,, \text{el pacifismo} >$$

En este caso, tenemos también una secuencia de 5 componentes, pero no parece haber ningún criterio reconocible por el que se haya reunido a estos objetos, ni se les haya ordenado de esta manera. Simplemente, se trata de una secuencia de la cual el número π es su 1º y el 4º componente, el pacifismo es su 3º y el 5º componente, y su 2º componente es Dulcinea (la mujer de la que está enamorado Don Quijote en la famosa novela de Cervantes).

Sin embargo, esta secuencia es tan legítima como la anterior, porque en la definición de secuencia ordenada no se especifica que tenga que haber ninguna razón particular por la que se seleccionen unos objetos determinados, ni para que se les coloque en un orden u otro. Cualquier fila de objetos es igualmente válida.

Por último, al igual que sucedía con el ejemplo anterior, la secuencia que acabamos de formar es netamente distinta del conjunto formado por los componentes de la misma:

$$\{\,\text{pacifismo}\,,\ \pi\,,\ \text{Dulcinea}\,\}$$

En efecto, este conjunto tiene tres elementos, no cinco, y como tal conjunto, es indiferente el orden en que los mencionemos.

§ 16.5. CUESTIONES

Propón un ejemplo de secuencia compuesta por siete componentes, con alguna repetición, y compárala con el correspondiente conjunto formado por los componentes de la misma.

§ 16.6. PARES ORDENADOS, TERNAS Y CUATERNAS

Las secuencias de dos componentes tienen nombre propio, se llaman **"pares ordenados"** (abreviadamente, **"par ord"**, **"pares ord"**). Un ejemplo de par ordenado es la secuencia <Sol, Luna>, cuyo 1º componente es el Sol, y cuyo 2º componente es la Luna.

Otro ejemplo de par ordenado es la secuencia <Luna, Sol>, que es diferente a la anterior, porque aunque tiene los mismos componentes, estos aparecen en el orden inverso.

Otro ejemplo de par ordenado es la secuencia <Luna, Luna>, cuyo 1º y 2º componente es la Luna.

Por su parte, también las secuencias de tres componentes tienen nombre propio, las llamamos **"ternas ordenadas"** (abreviadamente, **"ternas ord"**). Un ejemplo de terna ordenada es la secuencia

<Sol, Luna, Luna>

en la que el Sol figura como 1º componente, y la Luna figura como 2º y 3º componente.

Por último, a las secuencias de cuatro componentes las llamamos **"cuaternas ordenadas"** (abreviadamente, **"cuaternas ord"**). Un ejemplo de cuaterna ordenada es la secuencia

< Mercurio, Venus , La Tierra , Marte >

compuesta por los cuatro planetas rocosos del sistema solar, por su orden de cercanía al Sol.

§ 16.7. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de par ordenado, otro de terna ordenada y otro de cuaterna.

§ 16.8. PRELIMINARES DE LA DEFINICIÓN DE SEMPRIM

Terminada nuestra incursión en la teoría de conjuntos, estamos en condiciones de abordar la *semántica de primer orden clásica* (*semprim*).

A su vez, esta semántica está basada en la nocion de **interpretación de primer orden** (abreviadamente, **"intpred"**), que es una forma de dar valores de verdad a cada una de las fórmulas de nuestro lenguaje formal.

Al igual que ocurría con la semántica veritativo-funcional, la semántica de primer orden clásica es también **bivalente**, porque cada fórmula resultará $\mathbb{V}$ o $\mathbb{F}$ bajo cada interpretación. Sin embargo, el concepto de interpretación de primer orden es bastante más complejo que el concepto de interpretación proposicional.

Por esta razón, desglosaremos la definición de intpred en diferentes secciones, para ir dedicando a cada uno de sus componentes la atención que merece.

§ 16.9. CUESTIONES

1. Explica en pocas palabras qué hace una interpretación de primer orden.
2. Indica qué similitud y qué diferencia señala el manual entre la semántica de primer orden y la semántica veritativo-funcional.

§ 16.10. EL UNIVERSO DE DISCURSO O DOMINIO DE INTERPRETACIÓN

El primer componente de una interpretación de primer orden I es **un conjunto no vacío**, al que llamaremos **“universo de discurso”** o **“dominio de interpretación”** (abreviadamente, **“dom”**, o $dom(I)$).

En este contexto, si I es una interpretación de primer orden, y tiene como dominio a un conjunto D, entonces decimos que I **“está basada”** en D.

El dominio recoge el conjunto de cosas sobre las cuales vamos a interpretar las fórmulas de lenpred, en cada caso. Por consiguiente, es una forma de delimitar previamente los objetos a los que nos estamos refiriendo, cuando leemos las fórmulas de lenpred bajo una determinada interpretación.

Esto se parece, salvando las distancias, a cuando en el lenguaje cotidiano decimos algo así como:

“*Estoy hablando de mis estudiantes, no me refiero a nadie más*”

Al hacer una afirmación de esas características, estamos cerrando, por así decirlo, el ámbito de referencia sobre el que cabe interpretar nuestras palabras.

Pues bien, la especificación del dominio (o universo de discurso) viene a hacer lo mismo respecto de nuestro lenguaje formal, pero de una manera más rigurosa y sistemática.

§ 16.11. RESTRICCIONES RESPECTO AL DOMINIO

La exigencia de que el dominio esté no vacío responde al sentido común: no es realista razonar (o comunicarse) bajo la hipótesis de que no exista nada.

Sin embargo, existe un sistema de lógica no clásica que explora esta posibilidad (la llamada *"lógica libre"*), aunque excede del ámbito de este curso.

§ 16.12. EJEMPLOS DE DOMINIOS PARA LAS INTERPRETACIONES DE PRIMER ORDEN

Un ejemplo de universo de discurso es el conjunto de todos los personajes de *El Quijote*, al cual podríamos llamar "DQ".

Otro ejemplo es el conjunto formado la violoncelista Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives y el número π, al cual podríamos llamar "GVP".

Otro ejemplo es el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$.

Cualquiera de estos tres conjuntos vale como dominio de una interpretación de primer orden, por la sencilla razón de que ninguno de ellos está vacío (ninguno de ellos es $\varnothing$).

§ 16.13. CUESTIONES

1. Define la noción de universo de discurso de una interpretación de primer orden.
2. Da un ejemplo de conjunto que pueda ser dominio de una intpred. Denomina "E_1" a dicho conjunto.
3. Indica un conjunto que *no* pueda ser dominio de una intpred, y explica por qué.

§ 16.14. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 17

La interpretación de las constantes y de los simpred mon

§ 17.1. LA INTERPRETACIÓN DE LAS CONSTANTES

Una vez fijado su dominio, una interpretación de primer orden tiene que dar un valor a cada una de las constantes del lenguaje.

Pues bien, **el valor de una constante k de lenpred bajo una interpretación I, será sencillamente un elemento del dominio de I**. Es decir:

Para cada constante k, $I(k)$ = un objeto d que pertenece a $dom(I)$

Puesto que las constantes vienen a ser como los nombres propios del lenguaje formal, lo que estamos haciendo al interpretarlas de esta manera, es algo así como indicar a qué objeto del dominio corresponde cada nombre propio.

Esto es algo parecido, salvando las distancias, a cuando nos presentan a una persona, diciéndonos su nombre. Al poner en relación ese nombre con la persona que tengo delante, estoy interpretando ese nombre, o dándole referencia, en ese contexto de uso particular.

Además, debemos tener en cuenta que dos constantes distintas pueden tener el mismo valor bajo una interpretación (es decir, pueden corresponder al mismo objeto). Esto es similar a cuando una persona tiene dos nombres distintos, o un nombre y un *nickname*. Dos expresiones distintas pueden ser nombres propios de una misma persona o de una misma cosa.

§ 17.2. CUESTIONES

Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior — literalmente, tal y como aparece ahí. (Debes memorizarla para un buen seguimiento de la asignatura.)

§ 17.3. EJEMPLOS DE INTERPRETACIONES DE LAS CONSTANTES

Una posible interpretación, I_1, con dominio DQ (el conjunto de los personajes de *El Quijote*), es aquella que asigna los siguientes valores a las constantes del lenguaje:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
I_1(a) & = & \text{Don Quijote} & I_1(c_1) & = & \text{Dulcinea} \\
I_1(b) & = & \text{Sancho Panza} & I_1(c_2) & = & \text{Dulcinea} \\
I_1(c) & = & \text{Dulcinea} & & \ldots &
\end{array}
$$

Como vemos, la interpretación I_1 asigna Don Quijote a la constante a, asigna Sancho Panza a la constante b, y asigna Dulcinea a todas las demás constantes del lenguaje.

Naturalmente, la interpretación que acabamos de describir no es la única interpretación posible basada en el dominio DQ.

Otro ejemplo de interpretación basada en el dominio DQ es la siguiente, a la que llamaremos I_2:

$$
\begin{array}{lclqquad lcl}
I_2(a) & = & \text{Don Quijote} & I_2(c_1) & = & \text{Don Quijote} \\
I_2(b) & = & \text{Don Quijote} & I_2(c_2) & = & \text{Don Quijote} \\
I_2(c) & = & \text{Don Quijote} & & \dots &
\end{array}
$$

En este caso, como vemos, la interpretación I_2 asigna Don Quijote a todas las constantes del lenguaje, sin excepción.

Y así podríamos definir otras muchas interpretaciones distintas, basadas en el dominio DQ, que asignen un personaje de *El Quijote* a cada una de las constantes del lenguaje.

§ 17.4. CUESTIONES

Pon otro ejemplo de interpretación basada en DQ, y denomínala "J_2".

§ 17.5. TERCER EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LAS CONSTANTES

A continuación, vamos a definir una nueva interpretación de primer orden, a la que denominaremos "I_3", y que estará basada en el conjunto GVP (es decir, el conjunto formado por la violoncelista Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives y el número π). Pues bien, diremos que I_3 asigna los siguientes valores a las constantes del lenguaje:

$$\begin{array}{lclclcl} I_3(\,a\,) & = & \text{Natalia Gutman} & \qquad & I_3(\,c_1\,) & = & \pi \\ I_3(\,b\,) & = & \text{Edif. Luis Vives} & & I_3(\,c_2\,) & = & \pi \\ I_3(\,c\,) & = & \pi & & & \dots & \end{array}$$

Por tanto, la interpretación I_3 asigna Natalia Gutman a la constante a, asigna el Edificio Luis Vives a la constante b, y asigna el número π a todas las demás constantes del lenguaje.

§ 17.6. CUESTIONES

Pon otro ejemplo de interpretación basada en GVP, y denomínala "J_3".

§ 17.7. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LAS CONSTANTES

Ahora vamos a definir una nueva interpretación de las constantes, pero esta vez basada en el conjunto de los números naturales:

$$\mathbb{N} = \{\, 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\,\}$$

Pues bien, una posible interpretación, digamos "I_4", basada en este conjunto, es aquella que asigna los siguientes valores a las constantes del lenguaje:

$$\begin{array}{lclcclcl} I_4(a) & = & 0 & \qquad & I_4(c_1) & = & 1 \\ I_4(b) & = & 0 & & I_4(c_2) & = & 2 \\ I_4(c) & = & 0 & & I_4(c_3) & = & 3 \end{array}$$

$$\dots$$

Como vemos, la interpretación I_4, que acabamos de definir, asigna el número 0 a las constantes a, b y c, y a continuación, asigna el número 1 a la constante c_1, el número 2 a la constante c_2, el número 3 a la constante c_3, etc.

Naturalmente, I_4 no es la única interpretación posible basada en $\mathbb{N}$, hay muchas otras que cabría imaginar.

Y en general, queda claro que hay una inmensa variedad de conjuntos no vacíos que se pueden proponer como dominios de interpretación. Y a su vez, habrá aún más interpretaciones de las constantes, que se pueden proponer sobre la base de todos esos dominios. Por consiguiente, es patente que el abanico de interpretaciones distintas para nuestro lenguaje formal es gigantesco.

§ 17.8. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de interpretación de las constantes basada en $\mathbb{N}$, y denomínala "J_4".

2. Pon un ejemplo de interpretación de la constantes, cuyo dominio sea el conjunto E_1 que tú propusiste en **§ 16.13** (2). Denomina "J_1" a dicha interpretación.

§ 17.9. LA INTERPRETACIÓN DE LOS SÍMBOLOS PREDICATIVOS MONARIOS

Una vez fijado el dominio y el valor de las constantes, una interpretación de primer orden tiene que dar un valor a cada uno de los símbolos predicativos del lenguaje. Y de eso precisamente nos vamos a ocupar a continuación.

Como sabemos, los símbolos predicativos del lenguaje están estructurados en bloques: monarios, binarios, ternarios, y así sucesivamente. Pues bien, siguiendo este orden de bloques, iremos desglosando el valor que reciben estos símbolos bajo una interpretación de primer orden, dependiendo del bloque al que pertenezcan.

En concreto, empezaremos con los símbolos predicativos monarios (simpred mon). Y una vez que los hayamos estudiado suficientemente, pasaremos al siguiente bloque.

Pues bien, dicho todo esto, **el valor de un símbolo predicativo monario U de lenpred, bajo una interpretación I, será cualquier subconjunto de su dominio**. Es decir:

$$\boxed{\text{Para cada simpred mon } U, \quad I(U) = \text{cualquier cjto } D \quad \text{tal que} \quad D \subseteq dom(I)}$$

Es importante darse cuenta de que la estipulación precedente no excluye que el subconjunto asignado a un símbolo predicativo monario pueda ser vacío. En otras palabras: **el valor de un simpred mon**

bajo una interpretación puede ser el conjunto vacío, $\varnothing$. En **§ 18.1** veremos un ejemplo de ello.

§ 17.10. CUESTIONES

1. ¿Qué bloque viene a continuación de los simpred mon?
2. Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior — literalmente, tal y como aparece ahí. (Debes memorizarla para un buen seguimiento de la asignatura.)
3. ¿Es posible que una interpretación asigne a un simpred mon el conjunto vacío? (Contesta simplemente "Sí" o "No" a esta pregunta, sin razonar la respuesta.)
4. ¿Crees que es posible que una interpretación asigne a un simpred mon el conjunto entero de su dominio? Razona la respuesta.

§ 17.11. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LOS SÍMBOLOS PREDICATIVOS MONARIOS

A continuación, vamos a dar un ejemplo de interpretación de los símbolos predicativos monarios (simpred mon) de nuestro lenguaje formal.

Para ello, partiremos de la interpretación I_1 que definimos en **§ 17.3** . Y ahora procederemos a complementar esta interpretación, asignando valores a los simpred mon. Para ello, seguiremos la estipulación que acabamos de hacer en **§ 17.9** .

A tal efecto, conviene recordar que el dominio de I_1 es DQ, es decir, el conjunto de los personajes de *El Quijote*. Por consiguiente, I_1 tendrá que asignar a cada simpred mon un subconjunto de DQ, esto es, un conjunto de personajes de dicha novela.

Pues bien, en nuestro ejemplo, la forma en que I_1 asigna un subconjunto de DQ a cada simpred mon será la siguiente:

$$
\begin{array}{lcl}
I_1(F) & = & \{\text{personajes femeninos de } \textit{El Quijote}\} \\
I_1(G) & = & \{\text{personajes masculinos de } \quad \text{"} \quad \} \\
I_1(H) & = & \{\text{personajes de la aldea de Don Quijote}\} \\
I_1(F_1) & = & \{\text{Dulcinea, Cardenio y el bachiller}\} \\
I_1(F_2) & = & \{\text{Dulcinea, Cardenio y el bachiller}\} \\
I_1(F_3) & = & \{\text{Dulcinea, Cardenio y el bachiller}\} \\
& \ldots &
\end{array}
$$

Así pues, como vemos, I_1 asigna a la letra predicativa monaria F el conjunto de todos los personajes femeninos de *El Quijote* (es decir, Dulcinea, la sobrina, el ama, etc). Además, I_1 asigna a la letra predicativa G el conjunto de todos los personajes masculinos de *El Quijote* (es decir, Don Quijote, Sancho Panza, el bachiller, el cura, etc).

Además, la interpretación I_1 asigna a la letra predicativa H el conjunto de todos los personajes de la aldea de Don Quijote; es decir, Don Quijote, Sancho, la sobrina, el bachiller, etc (pero no, por ejemplo, Dulcinea ni Cardenio, que eran de otros sitios).

Y finalmente, I_1 asigna a todas las demás letras predicativas del lenguaje (es decir, F_1, F_2, F_3, ...) el conjunto formado por Dulcinea, Cardenio y el bachiller (Sansón Carrasco).

Como vemos, en todos los casos hemos asignado a cada símbolo predicativo monario un subconjunto del conjunto de personajes de *El Quijote* (es decir, un subconjunto de DQ). Por consiguiente, se cumple la condición estipulada, según la cual la interpretación ha de asignar a cada simpred mon del lenguaje un subconjunto del dominio de la interpretación.

Huelga decir, una vez más, que la interpretación I_1, que estamos describiendo como ejemplo, no tiene nada de particular. Hay muchas otras formas posibles de interpretar los simpred mon sobre el dominio DQ, en las que se asignan a los simpred mon otros subconjuntos de DQ, distintos a los que acabamos de señalar.

§ 17.12. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred mon de lenpred, basada en el dominio DQ. Denomina "J_2" a dicha interpretación. Para ello, basta con que indiques el valor bajo J_2 de cada simpred mon, tal y como acabamos de hacer con I_1.

§ 17.13. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.

2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 18

Más sobre la interpretación de los simpred mon y los simpred bin

§ 18.1. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LOS SÍMBOLOS PREDICATIVOS MONARIOS

No solo hay una enorme variedad de interpretaciones distintas de los simpred mon basadas en DQ, sino que también hay muchísimas otras interpretaciones basadas en dominios distintos. A continuación, vamos a ver un ejemplo de ello.

Para nuestro siguiente ejemplo, partiremos de la interpretación I_3, la cual definimos en **§ 17.5** . Ahora, vamos a complementar esa interpretación con una asignación de valores a los simpred mon. Lo haremos de manera similar a como hemos hecho en el caso de I_1, pero basándonos en el dominio de esta otra interpretación.

A tal efecto, hay que empezar por recordar que el dominio de I_3 es el conjunto formado por la violoncelista Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives y el número π, y que a dicho conjunto lo denominamos en su momento *"GVP"*.

Por consiguiente, I_3 tendrá que asignar a cada simpred mon un subconjunto de *GVP*. Y en nuestro ejemplo, la forma en que I_3 hace esto será la siguiente:

$$
\begin{aligned}
I_3(\,F\,) &= \{\text{Natalia Gutman, Edif. Luis Vives}, \pi\} \\
I_3(\,G\,) &= \{\text{Natalia Gutman}, \pi\} \\
I_3(\,H\,) &= \{\pi\} \\
I_3(\,F_1\,) &= \varnothing \\
I_3(\,F_2\,) &= \varnothing \\
I_3(\,F_3\,) &= \varnothing \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Así pues, I_3 asigna a la letra predicativa monaria F el conjunto formado por Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives y el número π. Por consiguiente, I_3 asigna a F el dominio entero:

$$I(\,F\,) = dom(I)$$

A continuación, la interpretación I_3 asigna a la letra predicativa G el conjunto formado por Natalia Gutman y el número π. A continuación, I_3 asigna a la letra predicativa H el conjunto formado por el número π solo.

Y finalmente, la interpretación I_3 asigna a todas las demás letras predicativas del lenguaje (es decir, F_1, F_2, F_3, ...) el conjunto vacío, $\varnothing$.

Como vemos, en todos los casos hemos asignado a cada símbolo predicativo monario un subconjunto del conjunto GVP. Por consiguiente, aquí también hemos cumplido la estipulación de que la interpretación asigne a cada simpred mon del lenguaje un subcjto de su dominio.

§ 18.2. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred mon, basada en el dominio GVP. Denomina "J_3" a dicha interpretación. Para ello, basta con que indiques el valor bajo J_3 de cada simpred mon, tal y como acabamos de hacer con I_3.
2. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred mon, basada en el conjunto E_1, tú propusiste en **§ 16.13** (2). Denomina "J_1" a dicha interpretación

§ 18.3. SIMPRED MON Y PROPIEDADES

Como explicamos en **§ 3.3**, los símbolos predicativos monarios son correlatos lejanos de los **predicados** del lenguaje natural, como "azul" o "múltiplo de 7".

Pues bien, al interpretar un símbolo predicativo monario mediante un subconjunto del dominio, estamos haciendo algo parecido, salvando las distancias, a cuando interpretamos un predicado como expresando una **propiedad**. Esto es lo que hacemos, por ejemplo, cuando interpretamos el predicado “azul” como expresando la propiedad de *ser azul*; o bien, cuando interpretamos el predicado “múltiplo de 7” como expresando la propiedad de *ser un número múltiplo de 7*.

Sin embargo, hay que tener en cuenta que el subconjunto del dominio asignado a un simpred mon no siempre corresponde a una característica común, homogénea, que permita identificar específicamente sus elementos. Así por ejemplo, no hay ninguna característica visible que singularice al conjunto formado por Dulcinea, Cardenio y el bachiller, dentro de los personajes de *El Quijote*.

Esta es una diferencia importante entre la interpretación de los simpred mon de nuestro lenguaje formal, y el modo en que entendemos los predicados del lenguaje natural.

En efecto, detrás de los predicados del lenguaje natural siempre hay alguna condición unificadora (una *intensión*), que nos permite *entender* (o *captar*) el significado de ese predicado. Mientras que, por su parte, en la interpretación de un símbolo predicativo monario, es posible atribuirle cualquier *extensión* que queramos — es decir, cualquier subconjunto del dominio que queramos estipular, por caprichoso que sea.

§ 18.4. CUESTIONES

¿Se puede interpretar un simpred mon mediante un subconjunto de objetos del dominio elegidos a capricho (es decir, sin que compartan ninguna característica visible, más allá de ser elementos del dominio)? (Contesta simplemente “Sí” o “No” a esta pregunta, sin razonar la respuesta.)

§ 18.5. CONTINUACIÓN DEL ESTUDIO DE LAS INTERPRETACIONES DE PRIMER ORDEN

Hasta ahora hemos hecho una primera introducción a las interpretaciones de primer orden. Empezamos estudiando el concepto de dominio de la interpretación, y a continuación explicamos cómo las interpretaciones dan valores a las constantes del lenguaje. Por último, explicamos también el modo en que las interpretaciones de primer orden dan valores a los símbolos predicativos monarios del lenguaje.

Pues bien, ahora vamos a continuar ese estudio, explicando el modo en que las interpretaciones de primer orden dan valores al resto de símbolos predicativos de nuestro lenguaje formal, es decir, a los simpred binarios, ternarios, etc.

A tal fin, empezaremos por ocuparnos del bloque de los símbolos predicativos binarios (sinpred bin). Y a continuación, en secciones sucesivas, seguiremos con los simpred ternarios y con el resto de bloques.

§ 18.6. LA INTERPRETACIÓN DEL SÍMBOLO DE IGUALDAD

Antes de ocuparnos de la interpretación de los símbolos predicativos binarios, tenemos que hacer una advertencia previa: vamos a excluir de nuestra consideración al símbolo de igualdad ($=$). Y la razón es que se trata de un **símbolo lógico**, por lo que no está sujeto a variaciones entre una interpretación y otra.

Por consiguiente, el comportamiento de $=$ vendrá regulado directamente por unas *"reglas de valoración de las fórmulas atómicas"*, que veremos en **§ 20.1** .

§ 18.7. CUESTIONES

Indica escuetamente la razón por la que no se especifica la interpretación de $=$, junto con el resto de símbolos predicativos binarios del lenguaje.

§ 18.8. LA INTERPRETACIÓN DE LOS SIMPRED BINARIOS NO LÓGICOS

Hecha la advertencia precedente, **el valor de un simpred binario no lógico U^2 de lenpred, bajo una interpretación I, será un conjunto cualquiera de pares ordenados de elementos del dominio**. Esto es:

Para cada simpred bin no lógico U^2, $I(U^2)$ es cualquier conjunto de pares ordenados $< d_1, d_2 >$, donde d_1 y d_2 pertenecen a $dom(I)$

Nótese que — al igual que ocurría con los simpred mon — la estipulación precedente no excluye que el conjunto de pares asignado pueda ser el conjunto vacío. En **§ 19.1** veremos un ejemplo de ello.

§ 18.9. CUESTIONES

1. Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior — literalmente, tal y como aparece ahí. (Debes memorizarla para un buen seguimiento de la asignatura.)
2. ¿Qué símbolo predicativo binario queda fuera de la misma?
3. ¿Es posible que una interpretación asigne a un simpred bin el conjunto vacío? (Contesta simplemente "Sí" o "No" a esta pregunta, sin razonar la respuesta.)

§ 18.10. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LOS SÍMBOLOS PREDICATIVOS BINARIOS

A continuación, vamos a dar un ejemplo de interpretación de los simpred bin de nuestro lenguaje formal.

Para ello, partiremos de la interpretación I_1, que definimos en **§ 17.3** . Y ahora procederemos a complementar esta interpretación, asignando valores a los simpred bin, de acuerdo con lo que acabamos de indicar.

A tal efecto, conviene volver a recordar que el dominio de I_1 es DQ, es decir, el conjunto de los personajes de *El Quijote*. Por consiguiente, I_1 tendrá que asignar a cada simpred bin un conjunto de pares ordenados, cuyos componentes sean personajes de dicha novela.

Pues bien, en nuestro ejemplo, la forma en que I_1 hace esto es la siguiente:

$I_1(K) \quad = \quad \{$ pares ord de DQ, cuyo $1^{\underline{\text{o}}}$ componente ama al $2^{\underline{\text{o}}}\}$

$I_1(L) \quad = \quad \{$ pares ord de DQ, cuyo $1^{\underline{\text{o}}}$ componente protege al $2^{\underline{\text{o}}}\}$

$I_1(K_1) \quad = \quad \{$ pares ord de DQ, cuyo $1^{\underline{\text{o}}}$ componente alecciona al $2^{\underline{\text{o}}}\}$

$I_1(K_2) \quad = \quad \{$ <Dulcinea, Cardenio> , <Cardenio, bachiller> $\}$

$I_1(K_3) \quad = \quad \{$ <Dulcinea, Cardenio> , <Cardenio, bachiller> $\}$

$I_1(K_4) \quad = \quad \{$ <Dulcinea, Cardenio> , <Cardenio, bachiller> $\}$

$\ldots$

Así pues, como vemos, la interpretación I_1 asigna al símbolo predicativo binario K el conjunto de pares ordenados de personajes de *El Quijote* cuyo $1^{\underline{\text{o}}}$ componente ama al $2^{\underline{\text{o}}}$.

Por consiguiente, el par <Quijote, Dulcinea> pertenecerá a la interpretación de K bajo I_1, ya que Quijote está enamorado de Dulcinea. Pero el par <Dulcinea, Quijote> no pertencerá a dicha interpretación, ya que Dulcinea no quiere saber nada del viejo hidalgo.

Además, la interpretación de K bajo I_1 también tendrá los pares <Cardenio, Luscinda> y <Luscinda, Cardenio>, puesto que en este caso se trata de un amor correspondido. Y así muchos otros pares ordenados: todos aquellos de cuyo primer componente se diga que ama al segundo, en algún momento de la novela.

Por otro lado, tenemos que el par <Quijote, mozo Andrés> pertenecerá a la interpretación de L bajo I_1, ya que Don Quijote protege al mozo Andrés, desatándolo de un árbol. Pero el par <mozo Andrés, Quijote> no pertenecerá a esta interpretación, porque el mozo Andrés no protege a Don Quijote de nada. Y así con el resto de personajes, según que aparezca uno protegiendo al otro, en algún pasaje de la novela.

En cuanto a la interpretación de K_1 bajo I_1, los pares <Quijote, Sancho> y <Sancho, Quijote> pertenecerán a dicha interpretación, ya que ambos se aleccionan mutuamente en numerosas ocasiones durante la novela. E incluirá también todos los pares de personajes en los que el primer componente alecciona al segundo, en algún pasaje del libro.

Por último, la interpretación I_1 asigna al resto de simpred bin del lenguaje (K_2, K_3, ...) un mismo conjunto de pares ordenados: concretamente, el conjunto formado por los pares <Dulcinea, Cardenio> y <Cardenio, bachiller>.

Así pues, como vemos, en todos los casos hemos asignado a cada símbolo predicativo binario un conjunto de pares ordenados de personajes de *El Quijote*. Por consiguiente, se cumple la condición estipulada, según la cual la interpretación ha de asignar a cada simpred bin del lenguaje un conjunto de pares ordenados de elementos del dominio.

Huelga decir, una vez más, que que esta forma de interpretar los simpred bin sobre el dominio DQ, no tiene nada de particular: hay muchas otras formas posibles de interpretar los simpred bin sobre el dominio DQ, siempre que se asigne a cada simpred bin un conjunto de pares ordenados de elementos de dicho dominio.

§ 18.11. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred bin de lenpred, basada en el dominio DQ. Denomina "J_2" a dicha interpretación. Para ello, debes indicar el valor bajo J_2 de cada simpred bin, tal y como acabamos de hacer con I_1.

§ 18.12. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 19

La interpretación de los simpred bin, simpred ter, etc

§ 19.1. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LOS SÍMBOLOS PREDICATIVOS BINARIOS

Al igual que ocurría con los simpred mon, no solo hay una enorme variedad de interpretaciones distintas de los simpred bin basadas en DQ, sino que también hay muchísimas otras interpretaciones basadas en dominios distintos. A continuación, vamos a ver un ejemplo de ello.

En efecto, para nuestro siguiente ejemplo vamos a volver a apoyarnos en la interpretación I_3, la cual definimos en **§ 17.5** . Y ahora, complementaremos esa interpretación con una asignación de valores a los simpred bin. Lo haremos de manera enteramente similar a como hemos hecho en el caso de I_1, pero basándonos en el dominio de esta otra interpretación.

A tal efecto, empezamos por recordar que el dominio de I_3 es el conjunto GVP, formado Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives y el número π.

Por consiguiente, I_3 tendrá que asignar a cada simpred bin un conjunto de pares ordenados de elementos de GVP. Y en nuestro ejemplo, la forma en que I_3 hace esto es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
I_1(\,K\,) &= \{<\text{Gutnam}, \text{Vives}>, <\text{Gutnam}, \pi>\} \\
I_1(\,L\,) &= \{<\text{Gutnam}, \text{Gutnam}>\} \\
I_1(\,K_1\,) &= \varnothing \\
I_1(\,K_2\,) &= \{\text{todos los pares ord formados por Gutnam, Vives, o } \pi\} \\
I_1(\,K_3\,) &= \{\text{todos los pares ord formados por Gutnam, Vives, o } \pi\} \\
I_1(\,K_4\,) &= \{\text{todos los pares ord formados por Gutnam, Vives, o } \pi\} \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

En definitiva, vemos que la interpretación I_3 asigna al símbolo predicativo binario K un conjunto de dos pares ordenados, concretamente el par $<\text{Gutnam}, \text{Vives}>$ y el par $<\text{Gutnam}, \pi>$.

A continuación, I_3 asigna al símbolo predicativo binario L un conjunto compuesto por un único par ordenado, concretamente el par $<\text{Gutnam}, \text{Gutnam}>$.

A continuación, I_3 asigna al símbolo predicativo binario K_1 el conjunto vacío.

Y por último, I_3 asigna al resto de simpred bins del lenguaje (K_2, K_3, ...), el conjunto de todos los pares ordenados que se pueden formar con los elementos de GVP — es decir: el par $<$ Gutnam, Gutnam $>$, el par $<$ Vives, Vives $>$, el par $< \pi, \pi >$, el par $<$ Gutnam, Vives $>$, el par $<$ Vives, Gutnam $>$, etc.

En definitiva, vemos que en todos los casos hemos asignado a cada símbolo predicativo binario un conjunto de pares ordenados de elementos de GVP. Por consiguiente, se cumple la condición estipulada, según la cual la interpretación ha de asignar a cada simpred bin del lenguaje un conjunto de pares ordenados de elementos del dominio.

§ 19.2. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred bin, basada en el dominio GVP. Denomina "J_3" a dicha interpretación. Para ello, has de indicar el valor bajo J_3 de cada simpred bin, tal y como acabamos de hacer con I_3.

2. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred bin, basada en el conjunto E_1, tú propusiste en **§ 16.13** (2). Denomina "J_1" a dicha interpretación

§ 19.3. SIMPRED BIN Y RELACIONES

Como explicamos en **§ 3.9** , los símbolos predicativos binarios son correlatos lejanos de los **predicados relacionales** del lenguaje natural, como "madre de" o "múltiplo de".

Pues bien, al interpretar un símbolo predicativo binario mediante un conjunto de pares ordenados de elementos del dominio, estamos haciendo algo parecido, salvando las distancias, a cuando interpretamos un predicado relacional como expresando una **relación entre dos cosas**.

Esto es lo que hacemos, por ejemplo, cuando interpretamos el predicado "madre de" como expresando la relación *ser madre de* (es decir, la relación que se da entre dos personas, cuando la primera es madre de la segunda). Y también es lo que hacemos cuando interpretamos el predicado relacional "múltiplo de" como expresando la relación de *ser un número múltiplo de otro* (es decir, la relación que se da entre dos números, n y m, cuando n es múltiplo de m).

Sin embargo, de forma paralela a lo que avisamos en **§ 18.3** , hay que tener en cuenta que el conjunto de pares ordenados del dominio que una interpretación asigna a un simpred bin, no siempre corresponde a una relación (o *intensión*) reconocible entre los componentes de esos pares.

Así por ejemplo, no hay ninguna relación tangible que singularice los pares $< \mathrm{Dulcinea}, \mathrm{Cardenio} >$ y $< \mathrm{Cardenio}, \mathrm{bachiller} >$, que la interpretación I_1 asigna a los simpred bin K_2 , K_3 , etc.

Y tampoco hay ninguna relación tangible que singularice los pares $< \mathrm{Gutnam}, \mathrm{Vives} >$ y $< \mathrm{Gutnam}, \pi >$, que la interpretación I_3 asigna al simpred bin K . Estas interpretaciones se asignan de forma puramente *extensional*.

Por consiguiente, aquí tenemos también una diferencia importante entre la interpretación de los simpred bin de nuestro lenguaje formal, y el modo en que entendemos los predicados relacionales del lenguaje natural. Detrás de los predicados del lenguaje natural siempre hay alguna relación tangible (o *intensión*), que nos permite *entender* (o *captar*) el significado de ese predicado. Mientras que en la interpretación de un símbolo predicativo binario, es posible atribuirle, *extensionalmente*, cualquier conjunto de pares ordenados del dominio que queramos estipular, por caprichoso que sea.

§ 19.4. CUESTIONES

¿Se puede interpretar un simpred bin mediante un conjunto de pares ordenados del dominio elegidos a capricho (es decir, sin que obedezcan a ninguna relación reconocible)? (Contesta simplemente "Sí" o "No" a esta pregunta, sin razonar la respuesta.)

§ 19.5. LA INTERPRETACIÓN DE LOS SIMPRED TERNARIOS

A la vista de la interpretación de los simpred binarios, no es difícil adivinar que **el valor de un simpred ternario U^3 de lenpred, bajo una interpretación I, será un conjunto de ternas ordenadas de elementos del dominio**. Esto es:

Para cada simpred ter U^3, $I(U^3)$ es un conjunto de ternas ordenadas $< d_1, d_2, d_3 >$, donde d_1, d_2 y d_3 pertenecen a $dom(I)$

Nótese que — al igual que ocurría con los simpred mon y con los simpred bin — la estipulación precedente no excluye que el conjunto de pares asignado pueda ser el conjunto vacío. Inmediatamente vamos a ver un ejemplo de ello.

§ 19.6. CUESTIONES

Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior — literalmente, tal y como aparece ahí. (Debes memorizarla para un buen seguimiento de la asignatura.)

§ 19.7. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE LOS SÍMBOLOS PREDICATIVOS TERNARIOS

A continuación, vamos a dar un ejemplo de interpretación de los simpred ter de nuestro lenguaje formal.

Para ello, partiremos una vez más de la interpretación I_1, que definimos en **§ 17.3**. Y ahora procederemos a complementar esta interpretación, asignando valores a los simpred ter, de acuerdo con lo que acabamos de indicar.

No es necesario recordar que el dominio de I_1 es DQ, por lo que I_1 tendrá que asignar a cada simpred ter un conjunto de ternas ordenadas, cuyos componentes sean personajes de dicha novela.

Pues bien, en nuestro ejemplo, la forma en que I_1 hace esto es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
I_1(M) &= \{\text{ternas ord de } DQ\text{, por orden de aparición en la obra}\} \\
I_1(N) &= \{< \text{Cardenio, Cardenio, Cardenio} >\} \\
I_1(M_1) &= \varnothing \\
I_1(M_2) &= \varnothing \\
I_1(M_3) &= \varnothing \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Así pues, como vemos, la interpretación I_1 asigna al símbolo predicativo ternario M el conjunto de ternas ordenadas de personajes de *El Quijote* en las cuales el 1º componente aparece en la novela antes que el 2º, y el 2º antes que el 3º.

Por consiguiente, la terna <Quijote, ama, sobrina> pertenecerá a la interpretación de M bajo I_1, ya que, efectivamente, esos tres personajes se mencionan en ese orden (de hecho, Don Quijote es el primer personaje que se menciona en la novela, justo a continuación se menciona al ama, y justo después a la sobrina).

Sin embargo, la terna <Quijote, Sancho, mozo Andrés> no pertenecerá a dicha interpretación, ya que el mozo Andrés se menciona antes que Sancho en la obra. Concretamente, el mozo Andrés aparece por primera vez en el cap. 4 de la Parte I, mientras que Sancho debuta tres capítulos después, en el 7.

Además, la interpretación de N bajo I_1 contiene únicamente la terna ordenada <Cardenio, Cardenio, Cardenio>. Y la interpretación de todos los demás simpred ter está sencillamente vacía.

De cualquier modo, salta a la vista que en todos los casos hemos asignado a cada símbolo predicativo ternario un conjunto de ternas ordenadas de personajes de *El Quijote*. Y por consiguiente, se cumple la condición estipulada, según la cual la interpretación ha de asignar a cada simpred ter del lenguaje un conjunto de ternas ordenadas de elementos del dominio.

§ 19.8. CUESTIONES

1. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred ter, basada en el dominio GVP. Denomina "J_2" a dicha interpretación. Para ello, has de indicar el valor bajo J_2 de cada simpred bin, tal y como acabamos de hacer con I_1.
2. Pon otro ejemplo de interpretación de los simpred ter, basada en el conjunto E_1, tú propusiste en **§ 16.13** (2). Denomina "J_1" a dicha interpretación

§ 19.9. SIMPRED TER Y RELACIONES

Como explicamos en **§ 3.3** , los símbolos predicativos ternarios son correlatos lejanos de los **predicados relacionales** del lenguaje natural que relacionan tres objetos, como "estar entre una cosa y otra" o "darle un recado a una persona de parte de otra".

Pues bien, al interpretar un símbolo predicativo ternario mediante un conjunto de ternas ordenadas de elementos del dominio, estamos haciendo algo parecido, salvando las distancias, a cuando interpretamos un predicado relacional como expresando una **relación entre tres cosas**. Esto es lo que hacemos, por ejemplo, cuando interpretamos el predicado "estar entre una cosa y otra" como expresando la relación que se da entre tres personas, cuando la primera está entre la segunda y la tercera. Y algo similar, análogamente, respecto a la relación que hay entre tres personas, cuando la primera le da un recado a la segunda, de parte de la tercera.

Sin embargo, de forma paralela a lo que hemos venido avisando en **§ 18.3** y **§ 19.3** , hay que hacer constar que el conjunto de ternas ordenadas del dominio que una interpretación asigna a un simpred ter, no siempre corresponde a una relación reconocible entre los componentes de esos pares.

Y eso ocurre, en particular, con la terna

<Cardenio, Cardenio, Cardenio>

la cual no obedece a ninguna relación intuitivamente reconocible, más allá de ser la repetición de este personaje tres veces, como 1^{o}, 2^{o} y 3^{o} componente de esa terna.

Por consiguiente, aquí tenemos también una diferencia importante entre la interpretación de los simpred ter de nuestro lenguaje formal, y el modo en que entendemos los predicados relacionales del lenguaje natural. Detrás de los predicados del lenguaje natural siempre hay alguna relación tangible (una *intensión*), que nos permite *entender* (o *captar*) el significado de ese predicado. Mientras que en la interpretación de un símbolo predicativo ternario, es posible atribuirle, *extensionalmente*, cualquier conjunto de ternas ordenadas del dominio que queramos estipular, por caprichoso que sea.

§ 19.10. LA INTERPRETACIÓN DE LOS SIMPRED CUATERNARIOS, QUINARIOS, ETC

Llegados a este punto, se puede adivinar que la interpretación de los simpred cuaternarios, quinarios, 6-arios, etc, sigue exactamente el mismo patrón que los anteriores, pero referido a secuencias de 4 componentes, o bien de 5 componentes, o bien de 6 componentes, etc.

Además, conforme avanzamos en esta escala de complejidad, los ejemplos son más abstractos, y menos habituales.

Por todo ello, no vamos a dar más explicaciones al respecto de estos casos. Cualquiera las puede reconstruir, si quiere, a partir de los casos anteriores.

§ 19.11. CUESTIONES

1. Basándote en lo que acabas de leer, ¿qué crees que debe asignar una interpretación a un simpred cuaternario?
2. ¿Y a uno quinario (es decir, 5-ario)?

§ 19.12. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 20

La interpretación de las fórmulas atómicas de igualdad y con simpred mon

§ 20.1. LA INTERPRETACIÓN DE LAS FÓRMULAS ATÓMICAS DE IGUALDAD

Una vez que hemos definido la interpretación de las constantes y símbolos predicativos de nuestro lenguaje formal, ha llegado el momento de interpretar fórmulas completas. Como dijimos en **§ 16.8**, nuestra semántica es bivalente, por lo que el valor de cada fórmula bajo una interpretación será siempre $\mathbb{V}$ o $\mathbb{F}$.

Empezaremos con las fórmulas más sencillas, que son las fórmulas atómicas. Y en particular, vamos a empezar con las fórmulas de igualdad.

Pues bien, sea I una interpretación de lenpred, y sean k_1 y k_2 constantes cualesquiera de lenpred. En tal caso, el valor de la fórmula $k_1 = k_2$ bajo I será $\mathbb{V}$, si y solo si la interpretación I asigna a las constantes k_1 y k_2 exactamente el mismo objeto.

En resumen:

$$I(k_1 = k_2) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si el objeto } I(k_1) \text{ es idéntico a } I(k_2) \\ \\ \mathbb{F} & \text{si el objeto } I(k_1) \text{ es distinto a } I(k_2) \end{cases}$$

§ 20.2. CUESTIONES

Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior (literalmente, tal y como aparece ahí). Debes memorizarla para un buen seguimiento de la asignatura.

§ 20.3. CONEXIÓN ENTRE LA INTERPRETACIÓN DEL SÍMBOLO DE IGUALDAD DE LENPRED Y EL LENGUAJE NATURAL

Como ya sabíamos, el símbolo de igualdad ($=$) está llamado a representar la relación de igualdad (o *relación de identidad*) en nuestro razonamiento deductivo. De ahí la estipulación de **§ 20.1** .

En efecto, dicha estipulación nos viene a decir que una igualdad entre dos nombres de objetos es verdadera, bajo una determinada interpretación, si y solo si esos dos nombres corresponden al mismo objeto, bajo esa interpretación.

Salvando las distancias, esto es comparable a cuando decimos, en el lenguaje natural, que el enunciado

Lucila Godoy es Gabriela Mistral (1)

es verdadero, porque esos dos nombres propios (el nombre real de la escritora, "Lucía Godoy", y el apodo que ella misma se puso, "Gabriela Mistral") corresponden a la misma persona.

O bien, por poner otro ejemplo, como cuando decimos en el lenguaje natural que el enunciado

$$\textit{Bizancio es Constantinopla} \tag{2}$$

es verdadero, porque esos dos nombres propios corresponden a la misma ciudad.

§ 20.4. CUESTIONES

Piensa otro ejemplo de dos nombres propios que correspondan a la misma persona o a la misma cosa. Utilizando esos nombres, escribe un enunciado similar a (1) y (2).

En tu respuesta, evita usar enunciados como "El autor de *Don Quijote* es Cervantes", o "La capital de España es Madrid". Esas respuestas no se ajustan a lo que se pide, porque "El autor de *Don Quijote*" y "La capital de España" no son nombres propios, sino *descripciones*, y más concretamente *descripciones definidas* (véase **§ 14.1**). En efecto, esas dos expresiones permiten identificar unívocamente un objeto (un escritor y una ciudad, respectivamente), pero no constituyen un *nombre propio* de dichos objetos.

§ 20.5. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE FÓRMULAS DE IGUALDAD

Vamos a retomar una vez más la interpretación I_1, tal y como la hemos definido en sucesivos estadios, en **§ 17.3** , **§ 17.11** , **§ 18.10** y **§ 19.7** .

Y vamos a empezar echando un vistazo a los objetos que dicha interpretación asigna a las constantes del lenguaje, y que están indicados en **§ 17.3** .

En concreto, dijimos que $I_1(\ a\ ) =$ Don Quijote, mientras que $I_1(\ b\ ) =$ Sancho Panza. Por consiguiente, tendremos:

$$I_1(\ a = b\ ) \ = \ \mathbb{F}$$

Del mismo modo, como $I_1(\ b\ ) =$ Sancho Panza, mientras que $I_1(\ c\ ) =$ Dulcinea, también tendremos:

$$I_1(\ b = c\ ) \ = \ \mathbb{F}$$

Sin embargo, como $I_1(\ c\ ) =$ Dulcinea, y también $I_1(\ c_1\ ) =$ Dulcinea (y lo mismo con c_2, c_3, etc) entonces podemos concluir que

$$I_1(\ c = c_1\ ) = \mathbb{V} \qquad I_1(\ c = c_2\ ) = \mathbb{V} \qquad I_1(\ c_3 = c_1\ ) = \mathbb{V} \qquad \text{etc}$$

§ 20.6. CUESTIONES

1. Indica una fórmula de igualdad que sea $\mathbb{V}$ bajo I_1.
2. Indica una fórmula de igualdad que sea $\mathbb{F}$ bajo I_1.

§ 20.7. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE FÓRMULAS DE IGUALDAD

A continuación, como segundo ejemplo, retomaremos la interpretación I_3, tal y como la hemos definido en **§ 17.5** , **§ 18.1** y **§ 19.1** .

Pues bien, basta con echar un vistazo a los objetos que esta otra interpretación asignaba a las constantes del lenguaje, los cuales están indicados en **§ 17.5** .

En particular, dijimos que $I_3(\ a\ ) =$ Natalia Gutman, mientras que $I_3(\ b\ ) =$ Edificio Luis Vives y $I_3(\ c\ ) = \pi$, por lo que tendremos:

$$I_3(\ a = b\ ) = \mathbb{F} \qquad I_3(\ b = c\ ) = \mathbb{F} \qquad I_3(\ c = a\ ) = \mathbb{F} \qquad \text{etc}$$

Sin embargo, también dijimos que $I_3(\ c_1\ ) = \pi$, $I_3(\ c_2\ ) = \pi$, etc, por lo que tendremos:

$$I_3(\ c = c_1\ ) = \mathbb{V} \qquad I_3(\ c_2 = c\ ) = \mathbb{V} \qquad I_3(\ c_3 = c_5\ ) = \mathbb{V} \qquad \text{etc}$$

§ 20.8. CUESTIONES

1. Indica una fórmula de igualdad que sea $\mathbb{V}$ bajo I_3.
2. Indica una fórmula de igualdad que sea $\mathbb{F}$ bajo I_3.
3. Indica un dominio de interpretación y unos valores de dicho dominio para las constantes a , b , c y c_1 . (Puede ser la misma interpretación J_1 que propusiste en **§ 17.8** , si la recuerdas, o cualquier otra que se te ocurra ahora mismo.)

4. Indica una fórmula de igualdad que sea $\mathbb{V}$ bajo la interpretación que acabas de dar, si la hay. (Si no existe dicha fórmula, explica por qué.)

5. Indica una fórmula de igualdad que sea $\mathbb{F}$ bajo esa misma interpretación, si la hay. (Si no existe dicha fórmula, explica por qué.)

§ 20.9. LA INTERPRETACIÓN DE LAS FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED MONARIOS

Naturalmente, las fórmulas de igualdad no son las únicas fórmulas atómicas (flatoms) de lenpred, sino que hay muchas otras. En efecto, hay flatoms que contienen un simpred monario, hay flatoms que contienen un simpred binario distinto de $=$ (es decir, un simpred binario no lógico), hay flatoms que contienen un simpred ternario, etc.

Pues bien, a continuación nos vamos a encargar de la interpretación de las flatoms con simpred monarios. Es decir, flas como Fa, Fb, Ga, Hc_3, etc

Dicho esto, sea I una interpretación de lenpred, y sea U un simpred monario y k una constante cualquiera. En tal caso, el valor de la fórmula Uk bajo I será $\mathbb{V}$ si y solo si el objeto que la interpretación I asigna a la constante k pertenece al subconjunto del dominio que I asigna al simpred U.

En resumidas cuentas:

$$\boxed{I(\,Uk\,) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si el objeto } I(\,k\,) \in I(\,U\,) \\ \\ \mathbb{F} & \text{si el objeto } I(\,k\,) \notin I(\,U\,) \end{cases}}$$

(donde "$\in$" significa *pertenece*, y "$\notin$" significa *no pertenece*, como vimos en §8.4 de logofor1).

§ 20.10. CUESTIONES

Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior (literalmente, tal y como aparece ahí). Debes memorizarla para un buen seguimiento de la asignatura.

§ 20.11. CONEXIÓN ENTRE LA INTERPRETACIÓN DE LOS SIMPRED MON Y EL LENGUAJE NATURAL

Como ya sabíamos, los simpred mon están llamados a representar, en nuestro razonamiento deductivo, los predicados simples (es decir, los predicados que se aplican a un único objeto). De ahí la estipulación de **§ 20.1** .

En efecto, dicha estipulación nos viene a decir que la atribución de un predicado a un objeto es verdadera, si y solo si ese objeto tiene, efectivamente, la propiedad correspondiente a dicho predicado.

§ 20.12. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE FLATOMS CON SIMPRED MONARIOS

Vamos a retomar una vez más la interpretación I_1, y en esta ocasión nos fijaremos en los objetos que asigna a las constantes, así como los subconjuntos del dominio que asigna a los simpred mon del lenguaje.

En particular, recordamos, por un lado, que:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
I_1(a) & = & \text{Don Quijote} & I_1(c_1) & = & \text{Dulcinea} \\[2ex]
I_1(b) & = & \text{Sancho Panza} & I_1(c_2) & = & \text{Dulcinea} \\[2ex]
I_1(c) & = & \text{Dulcinea} & & \ldots &
\end{array}
$$

Y por otro lado, recordamos que:

$$
\begin{array}{lcl}
I_1(F) & = & \{\text{personajes femeninos de } \textit{El Quijote}\} \\[2ex]
I_1(G) & = & \{\text{personajes masculinos de} \quad \text{''} \quad\} \\[2ex]
I_1(H) & = & \{\text{personajes de la aldea de Don Quijote}\} \\[2ex]
I_1(F_1) & = & \{\text{Dulcinea, Cardenio y el bachiller}\} \\[2ex]
I_1(F_2) & = & \{\text{Dulcinea, Cardenio y el bachiller}\} \\[2ex]
I_1(F_3) & = & \{\text{Dulcinea, Cardenio y el bachiller}\} \\[2ex]
 & \ldots &
\end{array}
$$

Por consiguiente, resulta claro que, por ejemplo, la fórmula Fa resultará $\mathbb{F}$ bajo I_1, ya que Don Quijote no es un personaje femenino. Mientras que la fórmula Fc resultará $\mathbb{V}$, ya que Dulcinea sí es un personaje femenino.

Por otro lado, resulta claro también que la fórmula Hb será $\mathbb{V}$ bajo I_1, ya que Sancho Panza es un personaje de la aldea de Don Quijote. Mientras que, por su parte, la fórmula Hc será $\mathbb{F}$ bajo I_1, ya que Dulcinea es de otra aldea distinta.

Y por poner algunos ejemplos más, podemos decir que la fórmula F_1a será $\mathbb{F}$ bajo I_1, ya que I_1 asigna Don Quijote a la constante a, pero Don Quijote no pertence al conjunto {Dulcinea, Cardenio, bachiller}, que es el conjunto que I_1 asigna al simpred F_1.

Y para terminar, podemos decir que la fórmula F_1c_3 será $\mathbb{V}$ bajo I_1, ya que I_1 asigna Dulcinea a la constante c_3, y Dulcinea sí pertenece al cjto que I_1 asigna al simpred F_1.

§ 20.13. CUESTIONES

1. Indica una flatom con simpred mon que sea $\mathbb{V}$ bajo I_1.
2. Indica una flatom con simpred mon que sea $\mathbb{F}$ bajo I_1.

§ 20.14. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.

2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 21

La interpretación de las fórmulas atómicas con simpred bin

§ 21.1. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE FLATOMS CON SIMPRED MONARIOS

Ahora vamos a retomar la interpretación I_3, fijándonos en los objetos que asigna a las constantes, y en los subconjuntos del dominio que asigna a los simpred mon del lenguaje:

$I_3(a)$	$=$	Natalia Gutman	$I_3(c_1)$	$=$	π
$I_3(b)$	$=$	Edif. Luis Vives	$I_3(c_2)$	$=$	π
$I_3(c)$	$=$	π		$\dots$	

$$\begin{aligned}
I_3(\ F\ ) &= \{\,\text{Natalia Gutman, Edif. Luis Vives, } \pi\,\} \\
I_3(\ G\ ) &= \{\,\text{Natalia Gutman, } \pi\,\} \\
I_3(\ H\ ) &= \{\,\pi\,\} \\
I_3(\ F_1\ ) &= \varnothing \\
I_3(\ F_2\ ) &= \varnothing \\
I_3(\ F_3\ ) &= \varnothing \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Pues bien, a la vista de estos valores, un ejemplo de flatom que resulta $\mathbb{V}$ bajo I_3 es, obviamente, Fa. Y un ejemplo de flatom que resulta $\mathbb{F}$ bajo I_3 es Gb.

§ 21.2. CUESTIONES

1. Indica una flatom con simpred mon que sea $\mathbb{V}$ bajo I_3.
2. Indica una flatom con simpred mon que sea $\mathbb{F}$ bajo I_3.
3. Indica un dominio de interpretación y unos valores de dicho dominio para las constantes a, b y c, y los simpred monarios F, G y H. (Puede ser la misma interpretación J_1 que propusiste en **§ 17.8**, si la recuerdas, o cualquier otra que se te ocurra ahora mismo.)

4. Indica una flatom con simpred monario que sea $\mathbb{V}$ bajo la interpretación que acabas de dar, si la hay. (Si no existe dicha fórmula, explica por qué.)

5. Indica una flatom con simpred monario que sea $\mathbb{F}$ bajo esa misma interpretación, si la hay. (Si no existe dicha fórmula, explica por qué.)

§ 21.3. LA INTERPRETACIÓN DE LAS FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED BIN NO LÓGICOS

Ha llegado el momento de encargarnos de la interpretación de las flatoms con simpred binarios, excluyendo a $=$, del que ya hemos hablado.

Pues bien, sea I una interpretación de lenpred, sea U^2 un simpred binario no lógico, y sean k_1 y k_2 constantes cualesquiera. En tal caso, el valor de la fórmula $U^2k_1k_2$ bajo I será $\mathbb{V}$ si y solo si el par ordenado de objetos que la interpretación I asigna a las constantes k_1 y k_2, por ese orden, pertenece al conjunto de pares ordenados que I asigna al simpred U^2.

En resumidas cuentas:

$$I(U^2k_1k_2) = \begin{cases} \mathbb{V} \quad \text{si} \quad < I(k_1), I(k_2) > \in I(U) \\ \\ \mathbb{F} \quad \text{si} \quad < I(k_1), I(k_2) > \notin I(U) \end{cases}$$

§ 21.4. CUESTIONES

Reescribe de tu puño y letra la estipulación recuadrada en la sección anterior (literalmente, tal y como aparece ahí). Debes memorizarla para un buen seguimiento de la asignatura.

§ 21.5. CONEXIÓN ENTRE LA INTERPRETACIÓN DE LOS SIMPRED BIN NO LÓGICOS Y EL LENGUAJE NATURAL

Como ya sabíamos, los simpred bin están llamados a representar, en nuestro razonamiento deductivo, los predicados relacionales entre dos objetos (es decir, los predicados que atribuyen una relación a dos objetos). De ahí la estipulación de **§ 20.1** .

En efecto, dicha estipulación nos viene a decir que la atribución de un predicado relacional a dos objetos es verdadera, si y solo si esos dos objetos, en el orden en el que se les menciona, están efectivamente en la relación correspondiente a dicho predicado.

§ 21.6. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE FLATOMS CON SIMPRED BINARIOS

Vamos a retomar una vez más la interpretación I_1, y en esta ocasión nos fijaremos en los objetos que asigna a las constantes, así como los conjuntos de pares ordenados que asigna a los simpred bin del lenguaje.

En particular, recordamos, por un lado, que:

$$I_1(\,a\,) \;=\; \text{Don Quijote} \qquad\qquad I_1(\,c_1\,) \;=\; \text{Dulcinea}$$

$$I_1(\,b\,) \;=\; \text{Sancho Panza} \qquad\qquad I_1(\,c_2\,) \;=\; \text{Dulcinea}$$

$$I_1(\,c\,) \;=\; \text{Dulcinea} \qquad\qquad \ldots$$

Y por otro lado, recordamos que:

$$I_1(\,K\,) \;=\; \{\text{pares ord de } DQ\text{, cuyo } 1^{\underline{\text{o}}} \text{ componente ama al } 2^{\underline{\text{o}}}\}$$

$$I_1(\,L\,) \;=\; \{\text{pares ord de } DQ\text{, cuyo } 1^{\underline{\text{o}}} \text{ componente protege al } 2^{\underline{\text{o}}}\}$$

$$I_1(\,K_1\,) \;=\; \{\text{pares ord de } DQ\text{, cuyo } 1^{\underline{\text{o}}} \text{ componente alecciona al } 2^{\underline{\text{o}}}\}$$

$$I_1(\,K_2\,) \;=\; \{\ \text{<Dulcinea, Cardenio>}\ ,\ \ \text{<Cardenio, bachiller>}\ \}$$

$$I_1(\,K_3\,) \;=\; \{\ \text{<Dulcinea, Cardenio>}\ ,\ \ \text{<Cardenio, bachiller>}\ \}$$

$$I_1(\,K_4\,) \;=\; \{\ \text{<Dulcinea, Cardenio>}\ ,\ \ \text{<Cardenio, bachiller>}\ \}$$

$$\ldots$$

Pues bien, a la vista de estos valores, un ejemplo de flatom con simpred bin que resulta $\mathbb{V}$ bajo I_1, es obviamente Kac, ya que el valor de a bajo I_1 es Don Quijote, el valor de c bajo I_1 es Dulcinea, y es notorio el amor que siente el viejo hidalgo por dicha labradora.

Mientras que, por su parte, la fórmula Kca resultará $\mathbb{F}$ bajo I_1, ya que Dulcinea no ama en absoluto a Don Quijote, como ya recordamos en su momento.

§ 21.7. CUESTIONES

1. Indica una flatom con simpred bin no lógico que sea $\mathbb{V}$ bajo I_1.
2. Indica una flatom con simpred bin no lógico que sea $\mathbb{F}$ bajo I_1.

§ 21.8. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN DE FLATOMS CON SIMPRED BINARIOS

Ahora vamos a retomar la interpretación I_3, fijándonos en los objetos que asigna a las constantes y en los conjuntos de pares ordenados que asigna a los simpred bin del lenguaje:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
I_3(a) & = & \text{Natalia Gutman} & I_3(c_1) & = & \pi \\
I_3(b) & = & \text{Edif. Luis Vives} & I_3(c_2) & = & \pi \\
I_3(c) & = & \pi & & \dots &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lcl}
I_3(K) & = & \{<\mathrm{Gutnam}, \mathrm{Vives}>, <\mathrm{Gutnam}, \pi>\} \\
I_3(L) & = & \{<\mathrm{Gutnam}, \mathrm{Gutnam}>\} \\
I_3(K_1) & = & \varnothing \\
I_3(K_2) & = & \{\text{todos los pares ord formados por Gutnam, Vives, o } \pi\} \\
I_3(K_3) & = & \{\text{todos los pares ord formados por Gutnam, Vives, o } \pi\} \\
I_3(K_4) & = & \{\text{todos los pares ord formados por Gutnam, Vives, o } \pi\} \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

Pues bien, a la vista de estos valores, un ejemplo de flatom con simpred mon no lógico que resulta $\mathbb{V}$ bajo I_1, es obviamente Laa, ya que el valor de a bajo I_1 es Natalia Gutman, y el par ordenado <Gutman, Gutman> pertenece al conjunto de pares ord que I_3 asigna a L.

Mientras que, por su parte, la fórmula K_1ca resultará $\mathbb{F}$ bajo I_3, ya que I_3 asigna al simpred bin K_1 el conjunto vacío, con lo que no contiene ningún par ordenado (ni, en particular, el par < π,Gutnam>, que es el que se forma mediante las interpretaciones bajo I_1 de las constantes c y a).

§ 21.9. CUESTIONES

1. Indica una flatom con simpred bin no lógico que sea $\mathbb{V}$ bajo I_3.
2. Indica una flatom con simpred bin no lógico que sea $\mathbb{F}$ bajo I_3.
3. Indica un dominio de interpretación y unos valores de dicho dominio para las constantes a, b y c, y los simpred binarios K y L. (Puede ser la misma interpretación J_1 que propusiste en **§ 17.8**, si la recuerdas, o cualquier otra que se te ocurra ahora mismo.)
4. Indica una flatom con simpred binario no lógico que sea $\mathbb{V}$ bajo la interpretación que acabas de dar, si la hay. (Si no existe dicha fórmula, explica por qué.)
5. Indica una flatom con simpred binario no lógico que sea $\mathbb{F}$ bajo esa misma interpretación, si la hay. (Si no existe dicha fórmula, explica por qué.)

§ 21.10. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 22

La interpretación de otras fórmulas atómicas y complejas - Interpret. símiles

§ 22.1. LA INTERPRETACIÓN DE LAS FÓRMULAS ATÓMICAS CON SIMPRED TERNARIOS, CUATERNARIOS, ETC

La interpretación de las flatoms con simpred ternarios, cuaternarios, etc, sigue exactamente el mismo patrón que hemos visto con los simpred mon y bin.

Así por ejemplo, sea I una interpretación de lenpred, sea U^3 un simpred ternario, y sean k_1, k_2 y k_3 constantes cualesquiera de lenpred. En tal caso, el valor de la fórmula $U^3k_1k_2k_3$ en I será $\mathbb{V}$, si y solo si la terna ordenada de objetos que la interpretación I asigna a las constantes k_1, k_2 y k_3 (por ese orden), pertenece al conjunto de ternas ordenadas que I asigna al simpred U^3.

En resumen:

$$I(\boxed{U^3 k_1 k_2 k_3}) = \begin{cases} \mathbb{V} \quad \text{si} \quad < I(\boxed{k_1}), I(\boxed{k_2}), I(\boxed{k_3}) > \in I(\boxed{U^3}) \\ \\ \mathbb{F} \quad \text{si} \quad < I(\boxed{k_1}), I(\boxed{k_2}), I(\boxed{k_3}) > \notin I(\boxed{U^3}) \end{cases}$$

Y lo mismo se puede proyectar para un simpred cuaternario $\boxed{U^4}$ y cuatro constantes, para uno quinario $\boxed{U^5}$ y cinco constantes, etc.

Además, el mismo tipo de ejemplos y explicaciones que hemos dado respecto a las flatoms con simpred monarios y binarios, se pueden reproducir acerca de los simpred ternarios, cuaternarios, etc.

Es verdad que la tarea se va haciendo más farragosa conforme aumenta la valencia de los simpred. Pero no porque aparezcan obstáculos imprevistos, sino únicamente porque hay que manejar más información (mayor número de constantes, etc), y eso resulta más complejo.

Por todo ello, en este curso no vamos a entrar en mayor detalle sobre la interpretación de las flatom con simpred ternarios, cuaternarios, etc. Nos basta con esta breve mención para hacernos una idea general, y no pediremos más.

§ 22.2. CUESTIONES

1. Explica con tus propias palabras en qué condiciones es verdadera una fórmula atómica que contenga un símbolo predicativo ternario.

2. Lo mismo, pero para un símbolo predicativo cuaternario.

3. Explica con tus propias palabras por qué en este curso no ahondaremos más en la interpretación de ese tipo de fórmulas.

§ 22.3. LA INTERPRETACIÓN DE FÓRMULAS COMPLEJAS MEDIANTE LAS CONECTIVAS

La interpretación de las fórmulas formadas mediante las cláusulas 2–6 de la definición de fórmula de lenpred (**§ 7.1**) es similar a la que ya definimos para este tipo de fórmulas en logfor1.

Por lo tanto, aquí nos limitaremos a resumir aquellas definiciones, tal y como aparecían en §7.2 del manual de logfor1 (solo que allí A y B eran fórmulas de lenprop, y aquí serán fórmulas de lenpred).

En efecto, sea I una interpretación de lenpred, y sean A y B fórmulas cualesquiera de lenpred. Entonces:

$$I(\neg A) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si } I(A) = \mathbb{F} \\ \mathbb{F} & \text{si } I(A) = \mathbb{V} \end{cases}$$

$$I(A \wedge B) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si } I(A) = \mathbb{V} \text{ y } I(B) = \mathbb{V} \\ \mathbb{F} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$I(A \vee B) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si } I(A) = \mathbb{V} \text{ o } I(B) = \mathbb{V} \\ \mathbb{F} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$I(\boxed{A \to B}) = \begin{cases} \mathbb{F} & \text{si } I(\boxed{A}) = \mathbb{V} \text{ y } I(\boxed{B}) = \mathbb{F} \\ \mathbb{V} & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

$$I(\boxed{A \leftrightarrow B}) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si } I(\boxed{A}) = I(\boxed{B}) \\ \mathbb{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

§ 22.4. CUESTIONES

Sean A y B dos fórmulas cualesquiera de lenpred, y sea I una interpretación tal que:

$$I(A) = \mathbb{V} \qquad\qquad I(B) = \mathbb{F}$$

A partir de esa suposición, y aplicando tus conocimientos de logfor1, calcula el valor de verdad ($\mathbb{V}$ o $\mathbb{F}$) de cada una de estas fórmulas en la interpretación I:

1. $I(\neg A) = ?$
2. $I(\neg B) = ?$
3. $I(A \wedge B) = ?$
4. $I(A \vee B) = ?$
5. $I(A \to B) = ?$

6. $I(\ B \to A\ ) \ = \ ?$

7. $I(\ A \leftrightarrow B\ ) \ = \ ?$

8. $I(\ A \wedge A\ ) \ = \ ?$

9. $I(\ B \vee B\ ) \ = \ ?$

10. $I(\ \neg A \to A \vee \neg B\ ) \ = \ ?$

11. $I(\ (\neg A \to B) \wedge \neg A\ ) \ = \ ?$

§ 22.5. INTERPRETACIONES SÍMILES

Finalmente, nos acercamos al momento de definir la interpretación de las cuantificaciones existenciales y universales, es decir, las fórmulas formadas mediante las clásulas 7 y 8 de la definción **§ 7.1** .

Pero antes de abordar esa tarea, necesitamos introducir dos nociones previas: las **interpretaciones símiles** y la **instanciación** de una fórmula de cuantificación. Vayamos por partes.

Las *interpretaciones símiles* (o interpretaciones que son **variantes una de otra**) las vamos a definir en dos fases.

La **primera fase de la definición dice que "toda interpretación es símil de sí misma bajo cualquier constante o constantes de lenpred"**. Enseguida veremos ejemplos de ello.

A continuación, **para la segunda fase de la definción, consideramos dos interpretaciones de lenpred que sean distintas**, digamos I y J, y una constante cualquiera, digamos k. Pues bien, en ese caso **"I y J son símiles bajo k"**, si cumplen estas dos condiciones:

1. I y J están basadas en el mismo dominio.
2. I y J son idénticas en los valores que dan a todos los simpreds y constantes, excepto que dan distintos valores a la constante k.

Asimismo, si k_1 y k_2 son constantes de lenpred, entonces diremos que **"I y J son símiles bajo k_1 y k_2"** si están basadas en el mismo dominio, y son idénticas en los valores que dan a todos los simpreds y constantes, excepto que dan distintos valores a la constante k_1, a la constante k_2, o a ambas.

Y de un modo similar se definen la interpretaciones símiles bajo tres o más constantes.

§ 22.6. CUESTIONES

Resume con tus propias palabras la definición anterior, hasta donde la hayas entendido.

§ 22.7. UN EJEMPLO DE INTERPRETACIÓN SÍMIL DE SÍ MISMA

Recordemos ahora la interpretación I_1 que dimos en **§ 17.3**, cuyo dominio era el conjunto DQ de personajes de *El Quijote*. El valor de las constantes de lenpred en esta interpretación era el siguiente:

$$
\begin{array}{rclcrcl}
I_1(\, a \,) & = & \text{Don Quijote} & \qquad & I_1(\, c_1 \,) & = & \text{Dulcinea} \\
I_1(\, b \,) & = & \text{Sancho Panza} & & I_1(\, c_2 \,) & = & \text{Dulcinea} \\
I_1(\, c \,) & = & \text{Dulcinea} & & & \dots &
\end{array}
$$

Pues bien, el primer ejemplo de interpretación símil de I_1 nos lo proporciona propia I_1. En efecto, aplicando lo que acabamos de decir, I_1 es símil de sí misma bajo cualquier constante o grupo de constantes del lenguaje.

Por consiguiente, I_1 es símil de sí misma bajo la constante a. Además, I_1 es símil de sí misma bajo la constante b. Además, I_1 es símil de sí misma bajo el grupo de constantes a, b y c. Y lo mismo con cualquier constante o grupo de constantes de lenpred que queramos aludir.

§ 22.8. OTRO EJEMPLO DE INTERPRETACIONES SÍMILES

A continuación, vamos a introducir una nueva interpretación, a la que llamaremos "I_5". Esta interpretación estará también basada en DQ, y será idéntica en todo a I_1, excepto que sus valores para las constantes serán los siguientes:

$$
\begin{array}{rclcrcl}
I_5(a) & = & \text{Cardenio} & \qquad & I_5(c_5) & = & \text{Dulcinea} \\
I_5(b) & = & \text{Sancho Panza} & \qquad & I_5(c_5) & = & \text{Dulcinea} \\
I_5(c) & = & \text{Dulcinea} & \qquad & & \ldots &
\end{array}
$$

Como vemos, el único punto en la que las interpretaciones I_1 e I_5 no coinciden es el valor de la constante a. En efecto, el valor de a en I_1 es Don Quijote, mientras que el valor de a en I_5 es Cardenio.

Por consiguiente, aplicando la definición precedente, I_1 e I_5 son interpretaciones símiles bajo a.

Además, también podemos decir que las interpretaciones I_1 e I_5 son símiles bajo las constantes a y b, por ejemplo, ya que para ello basta con que difieran en el valor de alguna de estas constantes — y en nuestro caso, difieren en el valor de a.

§ 22.9. CUESTIONES

Inspirándote en el ejemplo precedente, define una interpretación distinta a I_1 y que sea símil suya bajo la constante b. Denomina “I_6” a dicha interpretación.

§ 22.10. TERCER EJEMPLO DE INTERPRETACIONES SÍMILES

A continuación, vamos a introducir una nueva interpretación, a la que llamaremos "I_7". Esta interpretación estará también basada en DQ, y será idéntica en todo a I_1, excepto que sus valores para las constantes serán los siguientes:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
I_7(a) & = & \text{El bachiller} & I_7(c_5) & = & \text{Dulcinea} \\
I_7(b) & = & \text{El cura} & I_7(c_5) & = & \text{Dulcinea} \\
I_7(c) & = & \text{Dulcinea} & & \dots &
\end{array}$$

Como vemos, I_7 coincide con I_1 en todo salvo en dos cosas: el valor de la constante a (que en I_1 es Don Quijote y en I_7 es el bachiller), y el valor de la constante b (que en I_1 es Sancho Panza y en I_7 es el cura).

Por consiguiente, I_1 e I_7 son símiles en a y b, ya que coinciden en todo salvo en los valores de esas dos constantes.

§ 22.11. CUESTIONES

Inspirándote en el ejemplo precedente, define una interpretación distinta a I_1, que sea símil suya bajo las constante c_1 y c_2. Denomina "I_8" a dicha interpretación.

§ 22.12. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 23

La interpretación de las cuantificaciones

§ 23.1. LA INSTANCIACIÓN DE LAS CUANTIFICACIONES

Sea $\forall vA$ cualquier cuantificación universal de lenpred, y sea k cualquier constante **nueva** respecto a esa fórmula (es decir, cualquier constante que no aparezca ya en ella).

Pues bien, la fórmula resultante de **eliminar el fragmento inicial** $\forall v$**, y reemplazar todas las apariciones** de v por k, la escribimos

$$A(k)$$

y la llamamos **"instanciación de la fórmula** $\forall vA$ **en la constante** k**"**.

Análogamente, sea $\exists vA$ cualquier cuantificación existencial de lenpred, y sea k cualquier constante nueva respecto a esa fórmula.

En ese caso, también tenemos que

$$A(k)$$

es la **instanciación de la fórmula** $\exists vA$ **en la constante** k.

§ 23.2. EJEMPLOS DE INSTANCIACIONES

Aplicar la definición precedente es muy sencillo.

Así por ejemplo, la instanciación de la fórmula $\forall xFx$ en la constante a, es sencillamente Fa.

Asimismo, la instanciación de la fórmula $\exists xFx$ en la constante a, es también la misma fórmula Fa.

Por su parte, la instanciación en la constante a de las fórmulas

$$\forall z\,(\,Fz \;\wedge\; Kzb\,) \qquad\qquad \exists z\,(\,Fz \;\wedge\; Kzb\,)$$

es una misma fórmula, concretamente:

$$Fa \;\wedge\; Kab$$

Nótese que estas dos fórmulas no se pueden instanciar en la constante b, porque esta constante ya aparece en ellas (b no es una constante *nueva* respecto a esas fórmulas).

§ 23.3. MÁS EJEMPLOS DE INSTANCIACIONES

A su vez, la instanciación en la constante c de las fórmulas

$$\forall x\,(x = b \rightarrow x = x) \qquad\qquad \exists x\,(x = b \rightarrow x = x)$$

es una misma fórmula, concretamente:

$$c = b \rightarrow c = c$$

Nótese que las dos fórmulas precedentes tampoco se pueden instanciar en la constante b, porque esta constante ya aparece en ellas (no es una constante nueva respecto a esas fórmulas).

Finalmente, la instanciación en la constante a de la fórmula

$$\forall x\,(Fx \rightarrow \exists y\,(Gy \wedge Kxy))$$

es la fórmula

$$Fa \rightarrow \exists y\,(Gy \wedge Kay)$$

§ 23.4. CUESTIONES

Instancia las siguientes fórmulas en la constante c. Si en algún caso no es posible hacerlo, indica por qué.

1. $\forall x(Fx \rightarrow Gx \wedge Hx)$
2. $\exists x\,(Fx \wedge \neg Gx)$
3. $\exists x\,(Gx \wedge \forall y\,(Fy \rightarrow Kyx))$
4. $\exists x\,(Gx \wedge \forall y\,(Fy \rightarrow Kyb))$
5. $\forall x(Fx \rightarrow Gc)$

§ 23.5. VALORES DE LAS CUANTIFICACIONES UNIVERSALES

Sea I una interpretación de lenpred, y sea $\forall v A$ una fórmula de cuantificación universal. Entonces, el valor de la fórmula $\forall v A$ en I será $\mathbb{V}$, si y solo si la instanciación $A(k)$ es $\mathbb{V}$ **en cualquier símil de** I **bajo** k.

En otras palabras:

$$I(\forall v A) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si} \quad J(A(k)) = \mathbb{V} \text{ para cualquier símil de } I \text{ bajo } k \\ \mathbb{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Recordemos que las interpretaciones símiles de I bajo k son la propia I, y aquellas interpretaciones que coinciden en todo con I, excepto el valor de k.

Por lo tanto, si cualquiera de esas interpretaciones hace $\mathbb{V}$ a la fórmula $A(k)$, eso significa que **dicha fórmula será** $\mathbb{V}$ **cualquiera que sea el objeto del dominio que asignemos a la constante** k.

Y esto coincide justamente con sentido de la cuantificación universal, como afirmando que *todos los objetos del dominio cumplen una determinada condición.*

§ 23.6. EJEMPLO DE VALORACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN UNIVERSAL

Vamos a volver una vez más a la interpretación I_1 que especificamos en **§ 17.3** y **§ 17.11** , y cuyo dominio era el conjunto DQ de personajes de *El Quijote*. En esta ocasión, solo nos interesa recordar el valor del simpred mon F en dicha interpretación, que era:

$$I_1(F) \;=\; \{\,\text{personajes femeninos de } \textit{El Quijote}\,\}$$

Pues bien, dado esto, es claro que la cuantificación universal :

$$\forall x\, Fx \tag{1}$$

resultará $\mathbb{F}$ en I_1, por la sencilla razón de que *no todos los personajes de* “El Quijote” *son femeninos.*

Así por ejemplo, basta con instanciar (1) con la constante a , obteniendo la fórmula atómica Fa . A continuación, cogemos cualquier símil de I_1 que asigne a a un personaje masculino. Por ejemplo, podemos coger la propia I_1, ya que $I_1(a) =$ Don Quijote.

Naturalmente, el resultado es que Fa resulta $\mathbb{F}$ en I_1, ya que Don Quijote no es un personaje femenino. En otras palabras: Don Quijote no pertenece al conjunto que I_1 asigna a F :

$$\text{Don Quijote} \notin I_1(F)$$

Y ello basta para verificar que el valor de $\forall x\, Fx$ en I_1 es $\mathbb{F}$.

§ 23.7. OTRO EJEMPLO DE VALORACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN UNIVERSAL

Ahora vamos a rescatar la interpretación I_3, que introdujimos en **§ 17.5** y **§ 18.1** . En este caso, empezamos por recordar que el dominio de esta interpretación era el conjunto GVP (formado por Natalia Gutman, el Edificio Luis Vives y el número π).

Y a continuación, recordamos el valor del simpred mon F en I_3, que era:

$$I_3(F) \;=\; \{\text{Natalia Gutman, Edif. Luis Vives, } \pi\,\}$$

Así pues, en este caso el valor de F en I_3 cubre todo el dominio (todos los objetos del dominio cumplen la propiedad que I_3 asigna a F).

Y en consecuencia, la fórmula

$$\forall x\, Fx \tag{1}$$

resultará $\mathbb{V}$ en esta interpretación.

En efecto, basta con instanciar la fórmula (1) con cualquier constante nueva, por ejemplo b . Por **§ 17.5** , sabemos que el valor de b es el Edificio Luis Vives, el cual pertence al valor de F en I_3, como acabamos de ver.

Pero además, también acabamos de ver que los otros dos objetos que podemos coger como valor para b en una interpretación símil de

I_3 (es decir, Natalia Gutman y el número π), pertenecen asimismo al valor de F.

Por consiguiente, el valor de Fb será $\mathbb{V}$ en cualquier símil de I_3.

Y ello implica que el valor de $\forall x\, Fx$, en la propia I_3, es $\mathbb{V}$.

§ 23.8. CUESTIONES

1. Indica un conjunto de dos objetos, los que tú elijas, y llámalo "E_3".
2. Sea I_9 una interpretación basada en ese conjunto. Especifica un valor de F en I_9, de modo que la fórmula $\forall xFx$ resulte $\mathbb{V}$.
3. A continuación, especifica un valor de G en I_9, de modo que la fórmula $\forall xGx$ resulte $\mathbb{F}$.

§ 23.9. VALORES DE LAS CUANTIFICACIONES EXISTENCIALES

Ahora, sea I una interpretación de lenpred, y sea $\exists vA$ una fórmula de cuantificación existencial. Entonces, el valor de la fórmula $\forall vA$ en I será $\mathbb{V}$, si y solo si la instanciación $A(k)$ es $\mathbb{V}$ **en algún símil de I bajo** k.

En otras palabras:

$$I(\ \exists vA\ ) = \begin{cases} \mathbb{V} & \text{si} \quad J(\ A(k)\ ) = \mathbb{V} \text{ para algún símil de } I \text{ bajo } k \\ \\ \mathbb{F} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Como ya hemos dicho, las interpretaciones símiles de I bajo k son la propia I, y aquellas que coinciden en todo con I excepto el valor de k.

Por lo tanto, si alguna de esas interpretaciones hace $\mathbb{V}$ a la fórmula $A(k)$, eso significa que **dicha fórmula será $\mathbb{V}$ si le asignamos el objeto del dominio correspondiente a la constante** k en esa interpretación.

Y esto coincide con el sentido de la cuantificación existencial, como afirmando que *al menos uno de los objetos del dominio cumplen con la condición en cuestión.*

§ 23.10. EJEMPLO DE VALORACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

Vamos a volver una vez más a la interpretación I_1, especificada en **§ 17.3** y **§ 17.11**, y cuyo dominio era el conjunto DQ de personajes de *El Quijote*. Y empezamos por recordar otra vez el valor del simpred mon F en dicha interpretación, que era:

$$I_1(\ F\ ) \quad = \quad \{\text{personajes femeninos de } \textit{El Quijote}\}$$

Pues bien, dado esto, es claro que la cuantificación existencial :

$$\exists x\, Fx \tag{2}$$

resultará $\mathbb{V}$ en I_1, porque *en* "El Quijote" *hay personajes femeninos*.

Así por ejemplo, basta con instanciar (1) con la constante a, obteniendo la fórmula atómica Fa. A continuación, cogemos un símil de I_1 que asigne a a un personaje femenino, como por ejemplo Dulcinea.

Obviamente, ello hará que la fórmula Fa sea $\mathbb{V}$ bajo esa interpretación, símil de I_1.

Y eso basta para verificar que el valor de $\exists x\, Fx$, en la propia I_1, es $\mathbb{V}$.

§ 23.11. OTRO EJEMPLO DE VALORACIÓN DE UNA CUANTIFICACIÓN EXISTENCIAL

Ahora volvamos a la interpretación I_3, que introdujimos en **§ 17.5** y **§ 18.1**, y recordemos una vez más que su dominio era el conjunto GVP (Gutman, el Edif. Luis Vives y π). A continuación, nos interesa recordar el valor del simpred mon F_1 en I_3, que era:

$$I_3(F) \;=\; \varnothing$$

Por consiguiente, el valor de F en I_3 no contiene ningún elemento del dominio. Y en consecuencia, el valor de la fórmula

$$\exists x\, Fx \tag{2}$$

será $\mathbb{F}$ en esta interpretación.

Para razonar esto más despacio, instanciamos la fórmula (1) con cualquier constante nueva, por ejemplo b. Por **§ 17.5**, sabemos que el valor de b es el Edificio Luis Vives, el cual no pertence al valor de F_1 en I_3, como acabamos de ver.

Pero además, no hay ningún objeto que podamos coger en el dominio de I_3, y para el cual haya una interpretación símil bajo b que haga verdadera a la fórmula Fb.

Y así es como se verifica que el valor de $\exists x\, Fx$ en I_3 es $\mathbb{F}$.

§ 23.12. CUESTIONES

Sea I_{10} una nueva interpretación, basada en el conjunto E_3, que has indicado en **§ 23.8** (1).

1. Especifica un valor de F en I_{10}, de modo que la fórmula $\exists x F x$ resulte $\mathbb{V}$.
2. Especifica un valor de G en I_{10}, de modo que la fórmula $\exists x G x$ resulte $\mathbb{F}$.

§ 23.13. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.

3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 24

Semántica de lenpred: satisfacción, verdad lógica e inconsistencia

§ 24.1. CATEGORÍAS SEMÁNTICAS BÁSICAS

Una vez que hemos terminado de definir la noción de *interpretación de primer orden* (*intpred*), vamos a introducir algunas **categorías semánticas básicas** basadas en dicha noción.

Estas categorías son prácticamente idénticas a las que vimos en el Tema 8 de logfor1, con la diferencia de que allí hacían referencia a las *interpretaciones proposicionales*, y aquí las vamos a definir en relación a las *interpretaciones e primer orden.*

Por consiguiente, es recomendable repasar el Tema 8 de logfor1 antes de estudiar este tema, o conjuntamente con él.

§ 24.2. SATISFACCIÓN DE UNA FÓRMULA

Sean I una interpretación de primer orden, y sea A una fórmula cualquiera de lenpred.

Pues bien, diremos que la interpretación I **“satisface”** la fórmula A, sencillamente cuando sucede que A es **verdadera** en I. Esto lo abreviamos mediante el símbolo de doble puerta giratoria que usábamos en logfor1, pero ahora poniendo como subíndice “PRIM”, para hacer referencia a la lógica de primer orden:

$$I \models_{\text{PRIM}} A$$

Por su parte, si ocurre que A es **falsa** en I, entonces diremos que I **“no satisface”** la fórmula A. Y esto lo abreviaremos mediante el mismo símbolo y subíndice “PRIM”, pero con el símbolo tachado:

$$I \not\models_{\text{PRIM}} A$$

Resumiendo ambas cosas, tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} I \models_{\text{PRIM}} A & \text{cuando sucede que} & I(A) & = & \mathbb{V} \\ I \not\models_{\text{PRIM}} A & \text{cuando sucede que} & I(A) & = & \mathbb{F} \end{array}}$$

§ 24.3. CUESTIONES

Reproduce el recuadro anterior (es conveniente que lo memorices para un buen seguimiento de la asignatura).

§ 24.4. EJEMPLOS DE SATISFACCIÓN E INSATISFACCIÓN DE FÓRMULAS

En **§ 20.12** razonamos que la fórmula Fc era $\mathbb{V}$ en la interpretación I_1. Por lo tanto, ahora podemos decir que la interpretación I_1 *"satisface"* la fórmula Fc" (o puesto de otro modo, $I \models_{\text{PRIM}} Fc$).

Por otra parte, allí también razonamos que la fórmula Fa era $\mathbb{F}$ en la interpretación I_1. Por lo tanto, ahora podemos decir que la interpretación I_1 *"no satisface"* la fórmula Fa" (o puesto de otro modo, $I \not\models_{\text{PRIM}} Fa$).

A su vez, en **§ 23.10** razonamos que $\exists xFx$ era $\mathbb{V}$ en la interpretación I_1. Y por consiguiente, ahora podemos decir que I_1 *"satisface"* la fórmula $\exists xFx$ (o puesto de otro modo, $I \models_{\text{PRIM}} \exists xFx$).

Y finalmente, dado que $\exists xFx$ es $\mathbb{V}$ en I_1, resulta obvio que la fórmula $\neg\exists xFx$ será $\mathbb{F}$ en I_1. Por consiguiente, ahora podemos decir que la interpretación I_1 *"no satisface"* la fórmula $\neg\exists xFx$" (o puesto de otro modo, $I \not\models_{\text{PRIM}} \neg\exists xFx$).

§ 24.5. CUESTIONES

1. Repasa **§ 20.12** y **§ 23.10**, y pon otros dos ejemplos de fórmulas que sean satisfechos por I_1. Escribe tu respuesta de la siguiente manera: "$I \models_{\text{PRIM}} Fc$" (pero reemplazando Fc por tus propios ejemplos).

2. Vuelve a repasar **§ 20.12** y **§ 23.10**, y ahora pon dos ejemplos de fórmulas que *no* sean satisfechos por I_1. Escribe tu respuesta

de este modo: “$I \not\models_{\text{PRIM}} Fa$” (pero reemplazando Fa por tus propios ejemplos).

§ 24.6. SATISFACCIÓN DE UN CONJUNTO DE FÓRMULAS

A continuación, sea I una interpretación de primer orden, y sea D un conjunto de fórmulas de lenpred.

Pues bien, diremos que la interpretación I **“satisface”** el conjunto D, cuando satisface todas y cada una de las fórmulas pertenecientes a ese conjunto. Esto lo abreviamos poniendo “$I \models_{\text{PRIM}} D$”.

Y por su parte, si ocurre que la interpretación I no satisface alguna de las fórmulas de D, entonces diremos que I **“no satisface”** el conjunto D. Y abreviaremos eso poniendo “$I \not\models_{\text{PRIM}} D$”.

En resumidas cuentas:

$I \models_{\text{PRIM}} D$ cuando $I \models A$ para cualquier fla $A \in D$

$I \not\models_{\text{PRIM}} D$ cuando $I \not\models A$ para alguna fla $A \in D$

§ 24.7. CUESTIONES

Reproduce el recuadro anterior (es conveniente que lo memorices para un buen seguimiento de la asignatura).

§ 24.8. EJEMPLOS DE SATISFACCIÓN E INSATISFACCIÓN DE CONJUNTOS DE FÓRMULAS

Acabamos de ver que tanto Fc como $\exists xFx$ son $\mathbb{V}$ en I_1. Por consiguiente, ahora podemos decir que el conjunto formado por estas dos fórmulas es satisfecho por esa interpretación. Es decir:

$$I_1 \models \{ Fc , \exists xFx \}$$

Por otra parte, acabamos de ver también que la fórmula Fa no era satisfecha por la interpretación I_1. Por consiguiente, ahora podemos decir que el conjunto formado por las fórmulas Fa y Fc *no* es satisfecho por la interpretación I_1. Es decir:

$$I_1 \not\models \{ Fa , Fc \}$$

§ 24.9. CUESTIONES

1. Vuelve a repasar **§ 20.12** y **§ 23.10**, y pon un ejemplo de conjunto de fórmulas, al que llamarás "E_1", tal que $I_1 \models E_1$. Escribe tu respuesta de este modo: "$E_1 = \{ Fc , \exists xFx \}$" (pero reemplazando las fórmulas Fc y $\exists xFx$ por las que tú elijas).

2. Pon otro ejemplo de conjunto de fórmulas, al que llamarás "E_2", tal que $I_1 \not\models E_2$. Escribe tu respuesta de esta manera: "$E_2 = \{ Fa , Fc \}$" (pero reemplazando las fórmulas Fa y Fc por las que tú elijas).

§ 24.10. FÓRMULAS SATISFACIBLES

Además, decimos que **“una fórmula A de lenpred es satisfacible”** cuando **existe alguna interpretación de primer orden que la satisface**:

A es **satisfacible** cuando hay una intpred I tal que $I \models A$

Por ejemplo, la fórmula Fc es obviamente satisfacible, ya que la interpretación I_1 la satisface. Otro ejemplo de fórmula satisfacible es $\exists xFx$, por la misma razón.

§ 24.11. CUESTIONES

Pon un ejemplo de fórmula satisfacible, e indica una interpretación que la satisfaga. Dicha interpretación puede ser I_1, o bien cualquier otra que tú elijas, o que definas ex profeso para la ocasión.

§ 24.12. CONJUNTOS DE FÓRMULAS SATISFACIBLES

Por su parte, diremos que **“un conjunto de fórmulas D es satisfacible”** cuando **existe alguna interpretación de primer orden que las satisface todas**:

D es **satisfacible** cuando hay una intpred I tal que $I \models A$ para cualquier $A \in D$

En caso de que no exista tal interpretación, entonces diremos que el conjunto de fórmulas D es **“insatisfacible”**.

Así por ejemplo, el conjunto de fórmulas { Fc , $\exists xFx$ } es satisfacible, pues acabamos de ver que la interpretación I_1 satisface ambas fórmulas.

Sin embargo, es evidente que el conjunto de fórmulas { Fc , $\neg Fc$ } es *insatisfacible*, porque si una interpretación satisface la fórmula Fc , entonces no satisfará la fórmula $\neg Fc$. De hecho, no puede haber ninguna interpretación que satisfaga esas dos fórmulas. Y es por ello que se trata de un conjunto de fórmulas insatisfacible.

Del mismo modo, es fácil darse cuenta de que si una interpretación satisface la fórmula $\exists xFx$, entonces *no* satisfará la fórmula $\forall x\neg Fx$. Ello es así porque si existe un objeto del dominio que tiene la propiedad asociada a F , entonces no puede ser que todos los objetos del dominio carezcan de esta propiedad.

Por consiguiente, se sigue que ninguna interpretación puede hacer $\mathbb{V}$ al mismo tiempo a las fórmulas $\exists xFx$ y $\forall x\neg Fx$. Y es por ello que decimos que el conjunto de fórmulas { $\exists xFx$, $\forall x\neg Fx$ } es insatisfacible.

§ 24.13. CUESTIONES

Pon un ejemplo de conjunto de fórmulas que sea satisfacible. Escribe tu respuesta de este modo: "{ Fc , $\exists xFx$ }" (pero reemplazando las fórmulas Fc y $\exists xFx$ por las que tú elijas).

§ 24.14. VERDADES LÓGICAS

Una **verdad lógica es una fórmula de lenpred que resulta verdadera bajo cualquier interpretación**.

Así por ejemplo, es obvio que la fórmula

$$Fa \vee \neg Fa$$

resultará $\mathbb{V}$ bajo cualquier interpretación de primer orden.

Además, también es fácil razonar que la fórmula

$$\forall x Fx \rightarrow \neg \exists x \neg Fx$$

es una verdad lógica. En efecto, si la fórmula $\forall x Fx$ resulta $\mathbb{V}$ en una interpretación, es porque todos los objetos del dominio cumplen con la propiedad que esa interpretación asocia a F. Y por consiguiente, no puede existir un objeto del dominio que no cumpla con esa propiedad.

§ 24.15. CUESTIONES

Pon dos ejemplos de fórmulas de lenpred que sean verdades lógicas.

§ 24.16. FÓRMULAS INSATISFACIBLES (O INCONSISTENCIAS)

De una fórmula que no es satisfacible, decimos que es **"insatisfacible"**, y decimos también que es **inconsistente**, o que es una **"inconsistencia"**.

Por ejemplo, la fórmula

$$Fa \wedge \neg Fa$$

es obviamente insatisfacible. En efecto, si una interpretación hace $\mathbb{V}$ a Fa, entonces hará $\mathbb{F}$ a $\neg Fa$. Por consiguiente, ninguna intpred puede hacer $\mathbb{V}$ a la fórmula $Fa \wedge \neg Fa$.

Otro ejemplo de fórmula insatisfacible (o inconsistente) es

$$\forall x Fx \wedge \exists x \neg Fx$$

Efectivamente, como hemos razonado hace un momento, si una interpretación hace $\mathbb{V}$ a la fórmula $\forall x Fx$, entonces también hará $\mathbb{V}$ a la fórmula $\neg\exists x \neg Fx$. Y por consiguiente, hará $\mathbb{F}$ a la fórmula $\exists x \neg Fx$.

Y de ahí se sigue que ninguna interpretación puede hacer $\mathbb{V}$ a la fórmula $\forall x Fx \wedge \exists x \neg Fx$, por lo que esta fórmula es insatisfacible (o dicho de otro modo, es una inconsistencia).

§ 24.17. CUESTIONES

Pon dos ejemplos de fórmulas de lenpred que sean insatisfacibles.

§ 24.18. CONJUNTO DE FÓRMULAS INSATISFACIBLE (O INCONSISTENTE)

De un conjunto de fórmulas que no es satisfacible, decimos que es un **"conjunto insatisfacible"**, o que es un **"conjunto inconsistente"**.

Por ejemplo, es evidente que el conjunto de fórmulas $\{ Fa , \neg Fa \}$ es insatisfacible. Efectivamente, como acabamos de razonar hace un momento, si una interpretación hace $\mathbb{V}$ a la fórmula Fa, entonces hará $\mathbb{F}$ a la fórmula $\neg Fa$.

No puede existir ninguna interpretación que haga $\mathbb{V}$ a esas dos fórmulas, por lo que se trata de un conjunto insatisfacible (o dicho de otro modo, se trata de un conjunto inconsistente de fórmulas).

De la misma manera, es fácil darse cuenta de que si una interpretación satisface la fórmula $\forall x Fx$, entonces *no* satisfará la fórmula $\exists x \neg Fx$. Ello es así, como ya hemos razonado antes, porque si todos los objetos del dominio tienen la propiedad asociada a F en esa interpretación, entonces no puede ser que haya un objeto que no la tenga.

Por consiguiente, se sigue que ninguna interpretación puede hacer $\mathbb{V}$ al mismo tiempo a las fórmulas $\forall x Fx$ y $\exists x \neg Fx$. Y es por ello que decimos que el conjunto de fórmulas { $\forall x Fx$, $\exists x \neg Fx$ } es insatisfacible (o dicho de otro modo, que se trata de un conjunto de fórmulas inconsistente).

§ 24.19. CUESTIONES

Pon un ejemplo de conjunto de fórmulas que sea insatisfacible. Escribe tu respuesta de este modo: "{ Fc , $\neg Fc$ }" (pero reemplazando las fórmulas Fc y $\neg Fc$ por las que tú elijas).

§ 24.20. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.

3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.

4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 25

Consecuencia y equivalencia lógicas

§ 25.1. CONSECUENCIA LÓGICA DESDE UNA PREMISA

Sean A y B dos fórmulas cualesquiera de lenpred. Decimos que B es **"consecuencia lógica"** de A, cuando sucede que **cualquier interpretación de primer orden que satisface A, también satisface B**.

Esto lo expresamos mediante el símbolo de doble puerta giratoria con el subíndice "PRIM":

$$A \models_{\text{PRIM}} B$$

Al símbolo de doble puerta giratoria le llamaremos a partir de ahora *"símbolo de consecuencia"*, en atención a este uso del mismo, que es especialmente importante.

Además, cuando hablemos de una relación de consecuencia como $A \models_{\text{PRIM}} B$, diremos que la fórmula A es **"la premisa"**, y la fórmula B es **"la conclusión"**.

§ 25.2. UN EJEMPLO DE CONSECUENCIA LÓGICA DESDE UNA PREMISA

Obviamente, cualquier interpretación que satisfaga la fórmula Fa, también satisfará la fórmula $\neg\neg Fa$. Por consiguiente, la fórmula $\neg\neg Fa$ es consecuencia lógica de la fórmula Fa.

Ello lo simbolizamos mediante el símbolo de consecuencia, poniendo:

$$Fa \models_{\text{PRIM}} \neg\neg Fa$$

Además, decimos que en esta relación de consecuencia, Fa es la premisa y $\neg\neg Fa$ es la conclusión.

§ 25.3. SEGUNDO EJEMPLO DE CONSECUENCIA LÓGICA DESDE UNA PREMISA

También es obvio que cualquier interpretación que satisfaga la fórmula $\forall xFx$, tendrá que satisfacer la fórmula Fa. Por consiguiente, la fórmula Fa es consecuencia lógica de la fórmula $\forall xFx$.

Y ello lo simbolizamos mediante el símbolo de consecuencia, poniendo:

$$\forall xFx \models_{\text{PRIM}} Fa$$

En esta otra relación de consecuencia, $\forall xFx$ es la premisa y Fa es la conclusión.

§ 25.4. TERCER EJEMPLO DE CONSECUENCIA LÓGICA DESDE UNA PREMISA

Un ejemplo ligeramente más sofisticado de consecuencia lógica nos lo proporcionan las fórmulas $\forall x(Fx \wedge Gx)$ y $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$.

En efecto, para que una interpretación satisfaga $\forall x(Fx \wedge Gx)$, todos los objetos del dominio tienen que cumplir con las propiedades asignadas a F y a G.

Cuando ocurre esto, podemos decir que *si un objeto del dominio cumple la propiedad asignada a* F*, entonces cumplirá la propiedad asignada a* G.

En efecto, ello será verdadero, trivialmente, en cualquier interpretación en la que todos los objetos del dominio cumplan al mismo tiempo con las propiedades asignadas a F y a G.

Y naturalmente, cuando en una interpretación ocurre esto, entonces esa interpretación satisfará la fórmula $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$.

Así es como se razona que la fórmula $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ se sigue como consecuencia lógica de la fórmula $\forall x(Fx \wedge Gx)$. Es decir:

$$\forall x(Fx \wedge Gx) \models_{\text{PRIM}} \forall x(Fx \rightarrow Gx)$$

§ 25.5. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de relación de consecuencia lógica entre dos fórmulas. Escribe tu respuesta de este modo: "$Fa \models_{\text{PRIM}} \neg\neg Fa$"

(pero reemplazando las fórmulas Fa y $\neg\neg Fa$ por las que tú elijas). No se pide que razones tu respuesta; basta con des el ejemplo al modo que se pide.

2. Indica cuál es la premisa de la relación de consecuencia lógica que acabas de proponer.

3. Indica cuál es la conclusión de dicha relación de consecuencia.

§ 25.6. CONSECUENCIA LÓGICA DESDE UN CONJUNTO DE PREMISAS

Ahora supongamos que D es un conjunto de fórmulas de lenpred, y A es una fórmula.

Entonces, decimos que la fórmula A es **"consecuencia lógica del conjunto D"**, cuando sucede que **cualquier interpretación de primer orden que satiface el conjunto D, también satisface la fórmula A**.

Esto lo expresamos nuevamente mediante el símbolo de consecuencia, poniendo:

$$D \models_{\text{PRIM}} A$$

Y cuando hablemos de una relación de consecuencia como esta, diremos que las fórmulas de D son **"las premisas"**, y la fórmula A es **"la conclusión"**.

§ 25.7. UN EJEMPLO DE CONSECUENCIA LÓGICA DESDE UN CONJUNTO DE PREMISAS

Es obvio que si una interpretación satisface la fórmula $Fa \vee Fb$, y además satisface la fórmula $\neg Fa$, entonces tiene que satisfacer la fórmula Fb.

Por consiguiente, la fórmula Fb es una consecuencia lógica de las fórmulas $Fa \vee Fb$ y $\neg Fa$. Y ello lo simbolizamos mediante el símbolo de consecuencia, poniendo:

$$Fa \vee Fb \,,\ \neg Fa \models_{\text{PRIM}} Fb$$

En esta relación de consecuencia, $Fa \vee Fb$ y $\neg Fa$ son las premisas y Fb es la conclusión.

§ 25.8. OTRO EJEMPLO DE CONSECUENCIA LÓGICA DESDE UN CONJUNTO DE PREMISAS

También es fácil razonar que si una interpretación satisface las fórmulas $\forall xFx$ y $\forall xGx$, entonces tiene que satisfacer la fórmula $Fa \wedge Ga$.

En efecto, para que una interpretación satisfaga las dos primeras fórmulas, todos los objetos del dominio deben cumplir las propiedades asociadas a F y a G. Y si ocurre eso, entonces la fórmula $Fa \wedge Ga$ tiene que ser verdadera en esa interpretación, sin más remedio.

Por consiguiente, la fórmula $Fa \wedge Ga$ es consecuencia de las fórmulas $\forall xFx$ y $\forall xGx$. Y ello lo simbolizamos mediante el símbolo de consecuencia, poniendo:

$$\forall xFx \,,\ \forall xGx \models_{\text{PRIM}} Fa \wedge Ga$$

En esta otra relación de consecuencia, $\forall x Fx$ y $\forall x Gx$ son las premisas y $Fa \wedge Ga$ es la conclusión.

§ 25.9. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de relación de consecuencia lógica desde un conjunto de dos premisas. Escribe tu respuesta de la siguiente manera: "$\forall x Fx$, $\forall x Gx$ $\models_{\text{PRIM}}$ $Fa \wedge Ga$" (pero reemplazando las fórmulas en cuestión por las que tú elijas). No se pide que razones tu respuesta; basta con des el ejemplo al modo que se pide.
2. Indica cuáles son las premisas de la relación de consecuencia lógica que acabas de proponer.
3. Indica cuál es la conclusión de dicha relación de consecuencia.

§ 25.10. EQUIVALENCIA LÓGICA

Si A y B son dos fórmulas de lenpred, decimos que A y B **"son lógicamente equivalentes"** cuando son satisfechas exactamente por las mismas interpretaciones.

Esto lo expresamos mediante la triple barra (al igual que hacíamos en logfor1, pero ahora con el subíndice "PRIM", para hacer referencia a la lógica de primer orden):

$$A \equiv_{\text{PRIM}} B$$

Obviamente, si A y B son equivalentes, entonces A será consecuencia lógica de B, y a la inversa. Es decir:

$$A \equiv_{\text{PRIM}} B \quad \text{si y solo si} \quad A \models_{\text{PRIM}} B \quad \text{y} \quad B \models_{\text{PRIM}} A$$

§ 25.11. UN EJEMPLO DE EQUIVALENCIA LÓGICA

En § **25.2**, recalcamos que cualquier interpretación que satisfaga Fa, también satisfará $\neg\neg Fa$.

Pues bien, la recíproca es igualmente válida: cualquier interpretación que satisfaga $\neg\neg Fa$, también satisfará Fa.

Por consiguiente, Fa y $\neg\neg Fa$ son satisfechas exactamente por las mismas interpretaciones. En otras palabras, estas dos fórmulas son lógicamente equivalentes:

$$Fa \equiv_{\text{PRIM}} \neg\neg Fa$$

§ 25.12. OTRO EJEMPLO DE EQUIVALENCIA LÓGICA

Ahora consideremos las fórmulas $\forall xFx$ y $\neg\exists x\neg Fx$.

Como ya hemos razonado varias veces, si una interpretación satisface la fórmula $\forall xFx$, es porque todos los objetos del dominio cumplen con la propiedad que dicha interpretación asigna al simpred monario F.

Por consiguiente, no puede haber ningún objeto en el dominio que no cumpla con dicha propiedad. Y ello implica que dicha interpretación tiene que satisfacer también la fórmula $\neg\exists x \neg Fx$, sin más remedio.

Lo mismo sucede a la inversa. En efecto, si una interpretación satisface la fórmula $\neg\exists x \neg Fx$, es porque no hay ningún objeto en su dominio que no cumpla con la propiedad que dicha interpretación asigna al simpred F.

Y por consiguiente, dicha interpretación satisfará la fórmula $\forall x Fx$.

En definitiva, hemos razonado que las fórmulas $\forall x Fx$ y $\neg\exists x \neg Fx$ son satisfechas exactamente por las mismas interpretaciones. Es decir, que estas dos fórmulas son lógicamente equivalentes:

$$\forall x Fx \equiv_{\text{PRIM}} \neg\exists x \neg Fx$$

§ 25.13. TERCER EJEMPLO DE EQUIVALENCIA LÓGICA

De un modo similar, es inmediato razonar que las fórmulas $\exists x \neg Fx$ y $\neg\forall x Fx$ son lógicamente equivalentes. En efecto, ambas serán satisfechas exactamente por aquellas interpretaciones en las que haya algún objeto del dominio que *no* cumpla con la propiedad asignada al simpred F.

Por consiguiente, podemos concluir:

$$\exists x \neg Fx \equiv_{\text{PRIM}} \neg\forall x Fx$$

§ 25.14. CUARTO EJEMPLO DE EQUIVALENCIA LÓGICA

La fórmula $\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ será satisfecha por aquellas interpretaciones en cuyo dominio haya un objeto que cumpla la propiedad asignada a F, pero no cumpla la propiedad asignada a G.

Naturalmente, la fórmula $\forall x(Fx \to Gx)$ *no* será satisfecha por tales interpretaciones. Y por consiguiente, sí será satisfecha la negación de esta fórmula (es decir, por la fórmula $\neg\forall x(Fx \to Gx)$).

Por consiguiente, las interpretaciones que satisfagan $\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ no satisfarán $\forall x(Fx \to Gx)$, y por tanto sí satisfarán la fórmula $\neg\forall x(Fx \to Gx)$.

Por otro lado, es inmediato darse cuenta de que si una interpretación satisface la fórmula $\neg\forall x(Fx \to Gx)$, es porque tiene al menos un objeto en el dominio que cumple la propiedad asignada a F, pero no cumple la propiedad asignada a G.

Y por consiguiente, esas interpretaciones tendrán que satisfacer necesariamente la fórmula $\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$.

En definitiva, hemos razonado que las fórmulas $\exists x(Fx \wedge \neg Gx)$ y $\neg\forall x(Fx \to Gx)$ son satisfechas exactamente por las mismas interpretaciones.

Por consiguiente, se trata de dos fórmulas lógicamente equivalentes.

Esto es:

$$\exists x(Fx \wedge \neg Gx) \quad \equiv_{\text{PRIM}} \quad \neg\forall x(Fx \rightarrow Gx)$$

§ 25.15. QUINTO EJEMPLO DE EQUIVALENCIA LÓGICA

Ahora consideremos las fórmulas $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ y $\forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$.

Para empezar, es claro que si una interpretación satisface la fórmula $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$, entonces cualquier objeto de su dominio que cumpla con la propiedad asignada a F — si los hay — tendrá que cumplir también con la propiedad asignada a G .

Pero esto es equivalente a decir que *si un objeto cualquiera del dominio no cumple la propiedad asignada a* G *, entonces tampoco cumplirá la propiedad asignada a* F .

Y es así como se razona que estas dos fórmulas son satisfechas exactamente por las mismas interpretaciones. En otras palabras, que se trata de fórmulas lógicamente equivalentes:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \quad \equiv_{\text{PRIM}} \quad \forall x(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$$

§ 25.16. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de relación de equivalencia lógica entre dos fórmulas. Escribe tu respuesta de este modo: “ Fa $\equiv_{\text{PRIM}}$ $\neg\neg Fa$ ” (pero reemplazando las fórmulas Fa y $\neg\neg Fa$ por las que tú elijas).

2. Razona brevemente por qué las dos fórmulas que has propuesto son lógicamente equivalentes, a imitación de como se hace en **§ 25.11** , **§ 25.12** , etc.

§ 25.17. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 26

Equivalencia – Corroboración empírica – Argumentos no proposicionales

§ 26.1. SÍMBOLOS PARA LA NO CONSECUENCIA Y LA NO EQUIVALENCIA

Cuando queramos expresar que no se da la relación de consecuencia lógica en un caso concreto, o que no se da la relación de equivalencia lógica, utilizaremos los signos respectivos, pero tachados:

$$\not\models_{\text{PRIM}} \qquad\qquad \not\equiv_{\text{PRIM}}$$

Así por ejemplo, es obvio que una interpretación puede satisfacer la fórmula Fa, y no satisfacer la fórmula Fb. Por consiguiente, ni Fb es una consecuencia lógica de Fa, ni estas dos fórmulas son lógicamente equivalentes.

Y por lo tanto, pondremos:

$$Fa \not\models_{\text{PRIM}} Fb \qquad\qquad Fa \not\equiv_{\text{PRIM}} Fb$$

§ 26.2. OTRO EJEMPLO DE NO EQUIVALENCIA

A continuación, veremos otro ejemplo de *no equivalencia lógica*, ligeramente más sofisticado que el anterior.

En **§ 25.4**, razonamos que $\forall x(Fx \wedge Gx) \models_{\text{PRIM}} \forall x(Fx \rightarrow Gx)$. Pues bien, ahora vamos a demostrar que la conversa no es cierta, esto es que: $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \not\models_{\text{PRIM}} \forall x(Fx \wedge Gx)$.

Por consiguiente, se seguirá que esas dos fórmulas no son lógicamente equivalentes.

Para demostrar que $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \not\models_{\text{PRIM}} \forall x(Fx \wedge Gx)$, basta con tomar cualquier interpretación cuyo dominio tenga solo un objeto que cumpla las propiedades asignadas a F y G, y muchos otros objetos que no cumplan ninguna de estas dos propiedades.

Obviamente, una interpretación así tiene que satisfacer la fórmula $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$, ya que el único objeto de su dominio que cumple la propiedad asignada a F, también cumple la propiedad asignada a G. Pero esa interpretación no satisfará la fórmula $\forall x(Fx \wedge Gx)$, al haber muchos objetos que no cumplen ninguna de estas dos propiedades.

Por consiguiente, las fórmulas $\forall x(Fx \wedge Gx)$ y $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ no son lógicamente equivalentes. Es decir:

$$\forall x(Fx \wedge Gx) \not\equiv_{\text{PRIM}} \forall x(Fx \rightarrow Gx)$$

§ 26.3. CUESTIONES

1. Pon dos fórmulas que *no* sean lógicamente equivalentes. Escribe tu respuesta de este modo: "Fa $\not\equiv_{\text{PRIM}}$ Fb" (pero reemplazando las fórmulas Fa y Fb por las que tú elijas).
2. Razona brevemente por qué las dos fórmulas que has propuesto no son lógicamente equivalentes, a imitación de como se hace en **§ 26.1** y **§ 26.2** .

§ 26.4. VERDAD Y FALSEDAD DE UN UNIVERSAL CONDICIONAL BAJO UNA INTERPRETACIÓN

Como vimos en **§ 11.3** , a una fórmula como

$$\forall x(Fx \to Gx) \tag{1}$$

la llamamos **"universal condicional"**.

Evidentemente, para que esta fórmula sea $\mathbb{V}$ en una interpretación, tiene que ocurrir que cualquier objeto del dominio que cumpla con la propiedad asignada a F , cumpla también con la propiedad asignada a G .

De ahí se sigue que si en una interpretación hay un objeto del dominio que cumple con la propiedad asignada a F y no cumple con la propiedad asignada a G , entonces la fórmula (1) será $\mathbb{F}$ en esa interpretación.

Por consiguiente, si la fórmula $Fa \wedge \neg Ga$ es $\mathbb{V}$ en una interpretación, entonces la fórmula $\forall x(Fx \to Gx)$ será $\mathbb{F}$ en esa interpretación.

Por último, para que $\forall x(Fx \to Gx)$ sea $\mathbb{V}$ en una interpretación, la fórmula $Fa \wedge Ga$ tendrá que ser $\mathbb{V}$, cualquiera que sea el objeto del dominio asignado a a.

Puesto en otras palabras: para que (1) sea $\mathbb{V}$ en una interpretación I, la fórmula $Fa \wedge Ga$ tendrá que ser $\mathbb{V}$ en cualquier interpretación símil de I bajo a.

§ 26.5. APARENTE ASIMETRÍA ENTRE LA VERIFICACIÓN Y FALSACIÓN DE GENERALIZACIONES UNIVERSALES

El fenómeno que se acaba de describir se traduce en una **aparente asimetría entre la verificación y la falsación de las leyes científicas**.

En efecto, podría parecer que para falsar una generalización universal basta con encontrar una sola instancia que la refute, mientras que verificación por medio de casos favorables nunca es definitiva del todo.

Así por ejemplo, podría parecer que para refutar la generalización

Todos los cuervos son negros (2)

basta con encontrar un solo cuervo que no sea negro. Y que por el contrario, para verificar concluyentemente esta hipótesis, habría que observar uno por uno todos los cuervos habidos y por haber, lo cual es imposible.

Sin embargo, esta visión es demasiado simplista, como vamos a explicar a continuación.

§ 26.6. LA INTERPRETACIÓN DE LAS OBSERVACIONES CIENTÍFICAS

Lo cierto es que, como observamos en §11.10 de logfor1, las hipótesis científicas se contrastan siempre en conjunción con muchos supuestos. Y además, la búsqueda de correlaciones empíricas se conjuga con la búsqueda de mecanismos subyacentes que las expliquen, y con el conjunto de la ciencia disponible.

Por todo ello, ningún resultado observacional, favorable o adverso a una hipótesis, constituye por sí solo una verificación o una falsación definitiva de la misma: **siempre hay que interpretarlo, teniendo en cuenta las circunstancias y el conjunto de nuestro conocimiento**.

Así por ejemplo, no basta con un único avisamiento de un cuervo blanco para dar por refutada la hipótesis (2). Es preciso realizar observaciones repetidas y sistemáticas (como ocurrió con el famoso *Cuervo blanco de Anchorage*, en Alaska). Y además, es importante que la ciencia avale la existencia de un posible mecanismo que explique esa singularidad — en este caso, una mutación genética.

Del mismo modo, para refutar la generalización

Toda carga en movimiento genera un campo magnético (3)

no basta con una sola observación que parezca desmentir esta ley. Haría falta describir una situación relativamente en la cual, de manera más o menos sistemática, se verificara que una carga eléctrica está en movimiento (medido desde un marco de referencia), y no tiene un campo magnético alrededor (medido desde ese mismo marco).

Y aún así, habría una gran resistencia a admitir tal resultado observacional, por cuanto supondría renunciar a (3), y ello echaría por tierra gran parte de la física. En particular, tal resistencia sería especialmente aguda mientras no dispusiéramos de teorías alternativas plausibles, que explicaran el fallo de (3) en esas condiciones de observación.

§ 26.7. APARENTE ASIMETRÍA ENTRE LA VERIFICACIÓN Y FALSACIÓN DE HIPÓTESIS EXISTENCIALES

Algo similar cabe decir, recíprocamente, respecto a la verificación o falsación de hipótesis existenciales, como por ejemplo:

Hay un cuervo blanco (4)

o

Hay una carga en movimiento en una zona libre de campo (5)

En efecto, si atendemos exclusivamente a la forma lógica de estas proposiciones, podría parecer que es mucho más sencillo verificarlas que falsarlas.

Así, podría parecer que para verificar (4) y (5) basta con encontrar una única instancia que las confirme (esto es, un único cuervo blanco, o una única carga en movimiento sin campo magnético alrededor).

Y paralelamente, podría parecer que falsar estas hipótesis es mucho más difícil que verificarlas. En efecto, podría parecer que para falsar estas hipótesis tendríamos que examinar el universo entero en toda su historia, hasta asegurarnos de que no se ha dado ningún caso de un cuervo blanco, o de una carga en movimiento en una zona libre de campo.

Sin embargo, una vez más, tenemos que decir que tal visión es marcadamente ingenua. Las condiciones de verdad de una hipótesis bajo una semántica formal no reflejan la complejidad de la corroboración por la evidencia. En todo caso, el estudio de los mecanismos de confirmación científica no corresponde a esta asignatura, sino a la *Filosofía de la ciencia*.

§ 26.8. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de generalización universal, del tipo que sea.
2. Explica con tus propias palabras la aparente asimetría entre las condiciones de verificación y falsación de dicha generalización.
3. Explica con tus propias palabras por qué esa asimetría es engañosa, a pesar de las apariencias.
4. Haz lo mismo respecto de un ejemplo de hipótesis existencial que se te ocurra.

§ 26.9. FORMALIZACIÓN DE UN ARGUMENTO DE PRIMER ORDEN NO PROPOSICIONAL

Como explicamos en **§ 1.8** , hay muchos argumentos deductivos que no se pueden formalizar en el lenguaje de la lógica proposicional.

Un ejemplo de ello lo vimos en **§ 1.10** :

Todos los seres humanos son mortales.
Sócrates es un ser humano. (6)
Por tanto, Sócrates es mortal.

Sin embargo, es claro que el lenguaje de la lógica de primer orden (lenpred) sí nos permite formalizar este argumento.

En efecto, para ello basta con adoptar la siguiente tabla de convenciones simbólicas:

a : Sócrates

F : *ser un ser humano*

G : *ser mortal*

Y sobre la base de esa tabla, es claro que la formalización de la primera premisa (*Todos los seres humanos son mortales*) será la fórmula $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$, la formalización de la segunda premisa (*Sócrates es un ser humano*) será la fórmula Fa , y la formalización de la conclusión (*Sócrates es mortal*) será la fórmula Ga .

§ 26.10. VALIDACIÓN SEMÁNTICA DE UN ARGUMENTO DE PRIMER ORDEN NO PROPOSICIONAL

Además, también es bastante obvio que la semántica de primer orden (semprim) nos permite mostrar que (6) es un argumento deductivo válido — es decir, nos permite mostrar que *cualquier interpretación que haga satisfaga las premisas, satisface la conclusión*:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \,,\; Fa \models_{\text{PRIM}} Ga$$

Para ver esto, basta con razonar que si una interpretación satisface $\forall x(Fx \to Gx)$, es porque cualquier objeto de su dominio que cumpla con la propiedad asignada a F, cumple con la propiedad asignada a G. Y por consiguiente, si el objeto asignado a la constante a cumple con la propiedad asignada a F, también tiene que cumplir con la propiedad asignada a G.

Con ello hemos mostrado que el argumento (6), aun siendo un argumento deductivo no proposicional, sí se puede formalizar en el lenguaje de la lógica de primer orden (lenpred), y su validez se puede demostrar con la semántica de primer orden (semprim).

Por consiguiente, podemos decir que (6) es un **argumento de primer orden no proposicional**.

§ 26.11. OTRO EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN DE UN ARGUMENTO DE PRIMER ORDEN NO PROPOSICIONAL

Otro ejemplo de argumento deductivo no proposicional, que vimos en **§ 1.13**, es siguiente:

Mulhacén y Veleta son picos de Granada de más de 3.000 m.
Por tanto, en Granada hay picos de más de 3.000 m. (7)

Naturalmente, este argumento también se puede formalizar en lenpred y validar en semprim.

Para mostrar esto, empezamos por adoptar la correspondiente tabla de conveciones simbólicas:

a : Mulhacén

a : Veleta

F : *ser un pico de Granada de más de 3.000 m*

Sobre la base de esa tabla, es obvio que la formalización de la primera premisa (*Mulhacén y Veleta son picos de Granada de más de 3.000 m.*) es la fórmula $Fa \wedge Ga$, y la formalización de la conclusión (*En Granada hay picos de más de 3.000 m.*) es la fórmula $\exists x(Fx \wedge Gx)$.

Y también es obvio que esa conclusión es consecuencia lógica de la premisa:

$$Fa \wedge Ga \models_{\text{PRIM}} \exists x(Fx \wedge Gx)$$

En efecto, si una interpretación satisface la fórmula $Fa \wedge Ga$, es porque el objeto que esa interpretación asigna a la constante a, cumple con las propiedades que asigna a F y a G. Y por consiguiente, esa interpretación tiene que satisfacer la fórmula $\exists x(Fx \wedge Gx)$, sin más remedio.

Por todo ello, también en este caso podemos decir que (7) es un argumento de primer orden no proposicional.

§ 26.12. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de argumento de primer orden no proposicional.
2. Formalízalo, estableciendo previamente la correspondiente tabla de convenciones simbólicas.

3. Demuestra razonadamente que se trata de un argumento deductivo válido, a imitación de como se hace en **§ 26.10** y en **§ 26.11** .

§ 26.13. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 27

Dednatprim: reglas de eliminación del universal y de introducción del existencial

§ 27.1. HITOS DE LOGFOR2

A grandes rasgos, toda la asignatura logfor2 se puede describir como una ampliación de logfor1, destinada a cubrir los que hemos llamado "argumentos de primer orden no proposicionales".

En particular, a partir de **§ 2.5** fuimos introduciendo un nuevo lenguaje formal (lenpred), al objeto de formalizar tales argumentos. Y a partir de **§ 15**, fuimos introduciendo una nueva semántica formal (semprim), para analizar la relación de consecuencia lógica que subyace a los mismos.

Pues bien, a continuación nos vamos a ocupar de introducir un nuevo **cálculo deductivo**, que nos permitará ratificar la validez de dichos argumentos paso por paso, siguiendo un repertorio de reglas fijas.

§ 27.2. ÁRBOLES Y TABLAS DE VERDAD

Como anticipamos en **§ 2.3** , no hay ninguna forma de adaptar el método de tablas de verdad, para que cubra los argumentos deductivos de primer orden no proposicionales. Por esta razón, las tablas de verdad no tienen cabida en la lógica de primer orden, así que no las volveremos a mencionar.

Por su parte, el método de árboles que estudiamos en logfor1 sí se puede ampliar para que cubra los argumentos de primer orden. El resultado es el **método de árboles para la lógica de primer orden**.

Sin embargo, a fin de no sobrecargar excesivamente los contenidos de este curso, vamos a dejar ese método fuera del mismo. Quien tenga interés, lo puede consultar, entre otros muchos sitios, en:

R. Jeffrey, *Formal Logic: Its Scope and Limits*

(libro que circula en pdf por internet, en varias ediciones).

§ 27.3. EL CÁLCULO DE DEDUCCIÓN NATURAL PARA LA LÓGICA DE PRIMER ORDEN

Así pues, a partir de ahora nos centraremos en la ampliación del **cálculo de deducción natural** que estudiamos en logfor1.

En concreto, vamos a complementar dicho cálculo con cuatro reglas, que unidas a las que vimos en logfor1, serán suficientes para validar todos los argumentos deductivos de primer orden.

Dichas reglas son las siguientes:

- **La regla de eliminación del universal (E∀)**.
- **La regla de introducción del existencial (I∃)**.
- **La regla de introducción del universal (I∀)**.
- **La regla de eliminación del existencial (E∃)**.

Al cálculo resultante de añadir a dednatprop estas cuatro reglas, lo llamaremos **"cálculo de deducción natural para la lógica de primer orden"** (abreviadamente, **"dednatprim"**).

Y para expresar que una fórmula es derivable de otras en este nuevo cálculo, utilizaremos el mismo símbolo que en en logfor1 (la puerta giratoria sencilla), pero cambiando el subíndice:

$$\vdash_{\text{DNPRIM}}$$

Dicho todo esto, ahora conviene repasar individualmente los temas 11 a 17 de logfor1. Así tendremos dednatprop más o menos fresco en la cabeza, a la hora de combinarlo con las reglas suplementarias.

§ 27.4. LA REGLA DE ELIMINACIÓN DEL UNIVERSAL

Empecemos pues estudiando la **regla de eliminación del universal** (abreviadamente, **"E∀"**). Esta regla es sumamente sencilla.

Imaginemos que en una línea de una deducción, aparece una cuantificación universal, con una variable v:

$$\forall v A(v)$$

Pues bien, en cualquier momento posterior, podemos introducir la instanciación de esta fórmula en cualquier constante k que queramos:

$$A(k)$$

Al introducir esta fórmula, pondremos a la derecha la inscripción "E∀", seguida por el número de línea de la fórmula $\forall vA(v)$. Y en este contexto, diremos que hemos **eliminado el universal** $\forall vA(v)$ **en favor de** la constante k.

Esquemáticamente:

E∀

(...) $\forall vA(v)$

$\overline{}$

$A(k)$ E∀ *núm. de línea de* $\forall vA(v)$

Requisito:

- k reemplaza **todas** las apariciones de v en $\forall vA(v)$.

§ 27.5. EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA E∀

Como primer ejemplo de uso de esta regla, vamos a construir una derivación para demostrar que:

$$\forall xFx \quad \vdash_{\text{DNPRIM}} \quad Fa$$

Pues bien, para ello bastan dos líneas. En la primera línea, introducimos la única premisa de esta derivación. Y en la segunda línea aplicamos la regla E∀, que directamente nos permite obtener la conclusión deseada:

(1) $\forall x Fx$ Pr

(2) Fa E∀ 1

§ 27.6. SEGUNDO EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA E∀

Como segundo ejemplo de uso de la regla E∀, vamos a construir una derivación para demostrar que:

$$\forall x(Fx \to Gx) \vdash_{\text{DNPRIM}} Fa \to Ga$$

Aquí bastan dos líneas también, de forma enteramente similar a la anterior:

(1) $\forall x(Fx \to Gx)$ Pr

(2) $Fa \to Ga$ E∀ 1

§ 27.7. TERCER EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA E∀

Como tercer ejemplo de uso de la regla E∀, vamos a considerar una derivación con dos premisas:

$$\forall x(Fx \to Gx) \quad Fa \vdash_{\text{DNPRIM}} Ga$$

Este caso es sencillo también, aunque no tanto como los anteriores.

En efecto, tras introducir las dos premisas en las líneas 1 y 2 de la derivación, procedemos a eliminar la cuantificación universal en favor de la constante a.

Y a continuación, obtenemos la conclusión deseada por MP (es decir, por la regla **modus ponens**, que introdujimos en §11.6 de logfor1).

El resultado será:

(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Pr
(2)	Fa	Pr
(3)	$Fa \rightarrow Ga$	E∀ 1
(4)	Ga	MP 2,3

§ 27.8. CUARTO EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA E∀

Nuestro último ejemplo de uso de la regla E∀ contiene tres premisas, y se complica un poco más que los tres anteriores, aunque tampoco demasiado:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \;,\; \forall x(Gx \rightarrow Hx) \;,\; \forall x \neg Hx \vdash_{\text{DNPRIM}} \neg Fa$$

En este caso, tenemos que empezar por hacer uso de la regla E∀ tres veces, una por cada premisa.

Y a continuación, tenemos que aplicar dos veces MT (es decir, la regla **modus tollens**, que introdujimos en §11.19 de logfor1).

Así obtendremos la conclusión deseada:

(1)	$\forall x(Fx \to Gx)$	Pr
(2)	$\forall x(Gx \to Hx)$	Pr
(3)	$\forall x \neg Hx$	Pr
(4)	$Fa \to Ga$	E$\forall$ 1
(5)	$Ga \to Ha$	E$\forall$ 2
(6)	$\neg Ha$	E$\forall$ 3
(7)	$\neg Ga$	MT 5,6
(8)	$\neg Ha$	MT 4,7

§ 27.9. CUESTIONES

1. Elabora una derivación formal que demuestre:

$$\forall x(Fx \wedge Gx) \vdash_{\text{DNPRIM}} Fa$$

2. Elabora una derivación formal que demuestre:

$$\forall x(Fx \to \neg\neg Gx)\ ,\ Fa \vdash_{\text{DNPRIM}} Ga$$

§ 27.10. LA REGLA DE INTRODUCCIÓN DEL EXISTENCIAL

A continuación, vamos a estudiar la **regla de introducción del existencial** (abreviadamente, **“I$\exists$”**), que es muy sencilla también.

Imaginemos que en una línea de una deducción, aparece una fórmula cualquiera, que contiene una constante k:

$$A(k)$$

A continuación, sea v una variable **nueva** en $A(k)$, esto es, una variable que no aparezca ya en dicha fórmula. Y sea $A(v)$ el resultado de reemplazar v por k, en **al menos una** de sus apariciones en la fórmula $A(k)$.

Pues bien, en estas condiciones, podemos introducir en la derivación la cuantificación existencial $\exists v A(v)$.

Al introducir esta fórmula, pondremos a su derecha la inscripción "I$\exists$", seguida por el número de línea de la fórmula $A(k)$. Y en este contexto, diremos que hemos **introducido el existencial** $\exists v A(v)$ **sobre** la constante k.

Esquemáticamente:

I$\exists$

(. . .) $A(k)$

$\exists v A(v)$ I$\exists$ *núm. de línea de* $A(k)$

Requisitos:

1. v **no aparece** en $A(k)$;
2. v reemplaza **al menos una** de las apariciones de k en $A(k)$.

§ 27.11. EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA I$\exists$

Como primer ejemplo de uso de esta regla, vamos a construir una derivación para demostrar que:

$$Fa \vdash_{\text{DNPRIM}} \exists x Fx$$

Pues bien, para ello bastan dos líneas. En la primera línea, introducimos la única premisa de esta derivación. Y en la segunda línea aplicamos la regla I$\exists$, obteniendo la conclusión deseada:

(1) Fa Pr

(2) $\exists x Fx$ I$\exists$ 1

§ 27.12. SEGUNDO EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA I∃

Como segundo ejemplo de uso de la regla I∃, vamos a construir una derivación para demostrar que:

$$Fa \rightarrow Ga \quad \vdash_{\text{DNPRIM}} \quad \exists x(Fx \rightarrow Gx)$$

Aquí bastan dos líneas también, de forma muy similar a la anterior:

(1)	$Fa \rightarrow Ga$	Pr
(2)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	I∃ 1

§ 27.13. TERCER EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA I∃

Como tercer ejemplo de uso de la regla I∃, vamos a construir una derivación para demostrar que:

$$\forall x(Fx \rightarrow Hax) \quad \vdash_{\text{DNPRIM}} \quad \exists y \forall x(Fx \rightarrow Hyx)$$

Aquí bastan también dos líneas, pero hay que tener en cuenta un detalle importante, que es el siguiente. Como la premisa ($\forall x(Fx \rightarrow Hax)$) ya contiene una variable, entonces, a la hora de aplicarle la regla I∃, tenemos que reemplazar la constante a por una variable **nueva**, que no sea la propia x .

En nuestro caso, elegiremos la variable y , y el resultado será:

(1)	$\forall x(Fx \to Hax)$	Pr
(2)	$\exists y \forall x(Fx \to Hyx)$	I$\exists$ 1

§ 27.14. CUARTO EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA I$\exists$

Finalmente, como último ejemplo de uso de la regla I$\exists$, vamos a construir una derivación para demostrar que:

$$\forall x Fx \ , \ Ga \ \vdash_{\text{DNPRIM}} \exists x(Fx \wedge Ga)$$

En este caso, tenemos que empezar aplicando la regla E$\forall$ a la primera premisa, para obtener la fórmula Fa. A continuación, uniremos esta fórmula por conjunción a la segunda premisa, obteniendo la fórmula $Fa \wedge Ga$.

Y finalmente, aplicaremos la regla I$\exists$ a la fórmula $Fa \wedge Ga$, para obtener la conclusión deseada, $\exists x(Fx \wedge Ga)$.

Respecto a este último paso, es importante darse cuenta de dos cosas:

- Al aplicar la regla I$\exists$ a la fórmula $Fa \wedge Ga$, podemos usar la variable x, puesto que es una variable nueva en dicha fórmula.
- Al introducir el existencial en la fórmula $Fa \wedge Ga$, no reemplazamos las dos apariciones de la constante a, sino solamente la primera, a fin de obtener la conlcusión deseada.

En definitiva, el resultado será:

(1)	$\forall x Fx$	Pr
(2)	$\forall x Ga$	Pr
(3)	$\forall x Fa$	E$\forall$ 1
(4)	$Fa \wedge Ga$	I$\wedge$ 2,3
(5)	$\exists x(Fx \wedge Ga)$	I$\exists$ 4

§ 27.15. CUESTIONES

1. Elabora una derivación formal que demuestre:

$$Fa \wedge Ga \quad \vdash_{\text{DNPRIM}} \quad \exists x(Fx \wedge Gx)$$

2. Elabora una derivación formal que demuestre:

$$\forall x Fx \ , \ Fa \wedge \neg\neg Ga \quad \vdash_{\text{DNPRIM}} \quad \exists x Gx$$

§ 27.16. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 28

Dednatprim: regla de introducción del universal y ejemplos de argumentos

§ 28.1. LA REGLA DE INTRODUCCIÓN DEL UNIVERSAL

A continuación, vamos a estudiar la **regla de introducción del universal** (abreviadamente, "I$\forall$"), que es algo más compleja que las dos anteriores.

Imaginemos que en una línea de una deducción, aparece una fórmula que contiene una constante k:

$$A(k)$$

Además, supongamos que la constante k no aparece en ninguna de las premisas de la deducción. Y supongamos que la fórmula $A(k)$ no está dentro de una bandera en cuyo supuesto aparezca k. (Si se diera alguno de esos dos casos, entonces la regla I$\forall$ no podría aplicarse sobre esa constante.)

A continuación, sea v una variable **nueva** en $A(k)$, esto es, una variable que no aparezca ya en dicha fórmula. Y sea $A(v)$ el resultado de reemplazar v por k, en **todas** sus apariciones, en la fórmula $A(k)$.

Pues bien, en estas condiciones, podemos introducir en la derivación la cuantificación universal $\forall v A(v)$.

Al introducir esta fórmula, pondremos a su derecha la inscripción "I$\forall$", seguida por el número de línea de la fórmula $A(k)$.

En este contexto, diremos que hemos **introducido el universal** $\forall v A(v)$ **sobre** la constante k. Y a dicha constante la llamaremos la **"constante crítica"** de la aplicación de la regla I$\forall$.

Esquemáticamente:

I∀

(. . .) $A(k)$

$\forall v A(v)$ I∀ *núm. de línea de* $A(k)$

Requisitos:

1. k no aparece en las premisas de la deducción;
2. $A(k)$ no está dentro de una bandera en cuyo supuesto aparezca k;
3. v no aparece en $A(k)$;
4. v reemplaza **todas** las apariciones de k en $A(k)$.

§ 28.2. EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA I∀

Como primer ejemplo de uso de esta regla, vamos a construir una derivación para demostrar que:

$$\forall x Fx \vdash_{\text{DNPRIM}} \forall y Fy$$

Para hacerlo, bastan tres líneas, que vamos a describir en detalle antes de mostrar la deducción completa.

Como primera línea, colocamos la única premisa de esta derivación, esto es, la fórmula $\forall x Fx$.

A continuación, procedemos a eliminar el universal de dicha fórmula, en favor de la constante a. Esto lo hacemos mediante la regla E$\forall$, que fue la primera de las reglas de cuantificación que introdujimos.

Naturalmente, obtendremos como resultado la fórmula Fa, la cual colocamos como segunda línea de nuestra derivación.

Y por último, procedemos a introducir el universal $\forall y$ sobre la constante a, utilizando la regla I$\forall$ que acabamos de describir en la sección anterior.

Mediante esta regla obtendremos la fórmula $\forall y Fy$, que es la conclusión que queríamos alcanzar.

Obsérvese que también podríamos haber aplicado la regla con la variable x. Pero de hacerlo así, habríamos obtenido la fórmula $\forall x Fx$, que es la premisa de la derivación, en vez de obtener la conclusión a la que queremos llegar.

En definitiva, la derivación nos queda de este modo:

(1)	$\forall x Fx$	Pr
(2)	Fa	E$\forall$ 1
(3)	$\forall y Fy$	I$\forall$ 2

Por último, conviene reseñar que, al aplicar la regla I$\forall$, hemos respetado todos los requisitos de la misma, tal como aparecen en el cuadro del final de **§ 28.1** :

- la constante crítica, a, no aparece en la única premisa de esta deducción;
- la fórmula Fa no está dentro de ninguna bandera, por lo que no tenemos que preocuparnos por el requisito 2;
- la variable y no aparece en la fórmula Fa;
- y reemplaza todas las apariciones de la constante crítica en Fa.

§ 28.3. SEGUNDO EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA I∀

A continuación, vamos a construir una derivación para demostrar que:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx) \ , \ \forall x(Gx \rightarrow Hx) \ \vdash_{\text{DNPRIM}} \forall x(Fx \rightarrow Hx)$$

En este caso, empezamos introduciendo las dos premisas. Y justo después aplicamos la regla E∀ a cada una de ellas, con una misma constante: a.

Como resultado, obtendremos las fórmulas $Fa \rightarrow Ga$ y $Ga \rightarrow Ha$.

A continuación, aplicamos a estas dos fórmulas la regla Tr→ (es decir, la regla **transitiva del condicional**, que introdujimos en §16.5 de logfor1, entre las **reglas derivadas**).

Como resultado, obtendremos la fórmula $Fa \rightarrow Ha$.

Y finalmente, aplicamos la regla I$\forall$ a esta última fórmula, obteniendo como resultado $\forall x(Fx \to Hx)$, que es la conclusión deseada.

En definitiva, la derivación nos quedará:

(1)	$\forall x(Fx \to Gx)$	Pr
(2)	$\forall x(Gx \to Hx)$	Pr
(3)	$Fa \to Ga$	E$\forall$ 1
(4)	$Ga \to Ha$	E$\forall$ 2
(5)	$Fa \to Ha$	Tr$\to$ 3,4
(6)	$\forall x(Fx \to Hx)$	I$\forall$ 5

También aquí conviene hacer notar que, al aplicar la regla I$\forall$, hemos respetado todos los requisitos de la misma, tal como aparecen en el cuadro del final de **§ 28.1** :

- la constante crítica, a, no aparece en las premisas de la deducción;
- la fórmula $Fa \to Ha$ no está dentro de ninguna bandera, por lo que no tenemos que preocuparnos por el requisito 2;
- la variable x no aparece en la fórmula $Fa \to Ha$;
- x reemplaza todas las apariciones de la constante crítica en $Fa \to Ha$.

§ 28.4. TERCER EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA I∀

Como último ejemplo de uso de la regla I∀, vamos a construir una derivación para demostrar que:

$$\forall(Fx \to Gx) \quad \vdash_{\text{DNPRIM}} \forall xFx \to \forall xGx$$

En este caso, empezamos introduciendo la única premisa de esta derivación, es decir, la fórmula $\forall x(Fx \to Gx)$.

A continuación, aplicamos la regla E∀ a esta fórmula con la constante a, obteniendo como resultado la fórmula $Fa \to Ga$.

A continuación, nos fijamos en que la conclusión a la que queremos llegar es una fórmula condicional: $\forall xFx \to \forall xGx$. Por lo tanto, vamos a intentar obtenerla mediante la regla PCo (es decir, mediante la **prueba condicional**, que introdujimos en §12.7 de logfor1).

A tal efecto, abriremos una bandera, cuyo supuesto inicial será la fórmula $\forall xFx$, y cuyo target será la fórmula $\forall xGx$.

A continuación, aplicamos la regla E∀ a la fórmula $\forall xFx$ en favor de la constante a, obteniendo como resultado la fórmula Fa.

A continuación, aplicamos el modus ponens con la fórmula $Fa \to Ga$ que ya teníamos, obteniendo como resultado la fórmula Ga.

A continuación, aplicamos la regla I∀ a la fórmula Ga, obteniendo la fórmula $\forall xGx$.

Y como $\forall xGx$ era justamente el target de nuestra bandera, al obtener esta fórmula, la bandera queda cerrada.

Finalmente, aplicamos la regla PCo, para obtener la fórmula condicional $\forall xFx \to \forall xGx$, ya fuera de la bandera. Esta última fórmula es la conclusión a la que queríamos llegar, con lo cual nuestra derivación termina ahí.

En definitiva, la derivación nos quedará:

(1)	$\forall x(Fx \to Gx)$	Pr
(2)	$Fa \to Ga$	E$\forall$ 1
(3)	$\boxed{\forall xFx}$	S to $\forall xGx$
(4)	Fa	E$\forall$ 3
(5)	Ga	MP 2,4
(6)	$\forall xGx$	I$\forall$ 5
(7)	$\forall xFx \to \forall xGx$	PCo 3,6

Conviene hacer notar, una vez más, que al aplicar la regla I$\forall$, hemos respetado todos los requisitos de la misma:

- la constante crítica, a, no aparece en las premisas de la deducción;
- la fórmula Ga está dentro de una bandera, pero la constante a no aparece en el supuesto de la misma;
- la variable x no aparece en la fórmula Ga;

- x reemplaza todas las apariciones de la constante crítica en Ga .

§ 28.5. CUESTIONES

1. Elabora una derivación formal que demuestre:

$$\forall x \neg\neg Fx \quad \vdash_{\text{DNPRIM}} \quad \forall x Fx$$

2. Elabora una derivación formal que demuestre:

$$\forall x (Fx \wedge Gx) \quad \vdash_{\text{DNPRIM}} \quad \forall x Fx$$

Solamente se piden las derivaciones correspondientes — no hace falta que las acompañes de ninguna explicación.

§ 28.6. EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN Y DERIVACIÓN EN DEDNATPRIM CON LA REGLA E∀

A continuación, vamos a ver algunos ejemplos de formalización de argumentos, y su derivación en dednatprim con las tres reglas para los cuantificadores que hemos visto hasta este momento.

Comenzaremos con el siguiente argumento:

Todos los seres humanos son mortales.
Sócrates es un ser humano.
Por lo tanto, Sócrates no es inmortal.

Empezamos estableciendo la correspondiente tabla de convenciones simbólicas:

a : Sócrates

F : *ser un ser humano*

G : *ser mortal*

A continuación, procedemos a la formalización del argumento, que obviamente nos quedará:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx)\ ,\ Fa\ \vdash_{\text{DNPRIM}} \neg\neg Ga$$

Y por último, procedemos a construir la derivación de dicho argumento:

(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	Pr
(2)	Fa	Pr
(3)	$Fa \rightarrow Ga$	E$\forall$ 1
(4)	Ga	MP 2,3
(5)	$\neg\neg Ga$	DN 5

(Nótese que DN es la regla de **doble negación**, que introdujimos en §12.3 de logfor1.)

§ 28.7. CUESTIONES

Siguiendo el ejemplo anterior, formaliza y construye una derivación para el siguiente argumento:

Todo lo que se puede comprar, se puede vender.
Murcia no se puede vender.
Por lo tanto, Murcia no se puede comprar.

§ 28.8. EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN Y DERIVACIÓN EN DEDNATPRIM CON LA REGLA I∀

A continuación, vamos a formalizar el siguiente argumento:

Natalia Gutman es violoncelista.
Natalia Gutman es rusa.
Por lo tanto, hay violoncelistas rusas.

Para ello, empezamos estableciendo la correspondiente tabla de convenciones simbólicas:

a : Natalia Gutnam

F : *ser violoncelista*

G : *ser rusa*

A continuación, procedemos a formalizar el argumento:

$$Fa \ , Ga \vdash_{\text{DNPRIM}} \exists x(Fx \wedge Gx)$$

Y por último, procedemos a construir una derivación del mismo:

(1)	Fa	Pr
(2)	Ga	Pr
(3)	$Fa \land Ga$	I$\land$ 1,2
(4)	$\exists x(Fx \land Gx)$	I$\exists$ 3

(Nótese que I$\land$ es la regla de **intro de la conjunción**, que presentamos en §13.1 de logfor1.)

§ 28.9. CUESTIONES

Siguiendo el ejemplo anterior, formaliza y construye una derivación en dednatprim para el siguiente argumento:

Flipper es un delfín.
Todos los delfines son mamíferos marinos.
Por lo tanto, hay mamíferos marinos.

§ 28.10. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 29

Dednatprim: más ejemplos de argumentos y regla de eliminación del existencial

§ 29.1. EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN Y DERIVACIÓN EN DEDNATPRIM CON LA REGLA I∀

A continuación, vamos a formalizar el siguiente argumento:

Todo es posible o deseable.
Por lo tanto, todo es deseable o posible.

Empezamos estableciendo la correspondiente tabla de convenciones simbólicas:

F : *ser posible*

G : *ser deseable*

A continuación, procedemos a formalizar el argumento:

$$\forall x(Fx \vee Gx) \quad \vdash_{\text{DNPRIM}} \forall x(Gx \vee Fx)$$

Y por último, procedemos a construir una derivación de dicho argumento en dednatprim:

(1)	$\forall x(Fx \vee Gx)$	Pr
(2)	$Fa \vee Ga$	E∀ 1
(3)	$Ga \vee Fa$	Cm∨ 2
(4)	$\forall x(Fx \vee Gx)$	I∀ 3

(Nótese que Cm∨ es la regla **conmutativa de la disyunción**, que introdujimos en §16.4 de logfor1.)

§ 29.2. CUESTIONES

Siguiendo el ejemplo anterior, formaliza y construye una derivación en dednatprim para el siguiente argumento:

Todo es relativo y efímero.
Por lo tanto, todo es efímero y relativo.

§ 29.3. LA REGLA DE ELIMINACIÓN DEL EXISTENCIAL

A continuación, vamos a estudiar la **regla de eliminación del existencial** (abreviadamente, **"E∃"**). Esta es la regla que más complejidad entraña de las cuatro reglas cuantificacionales, aunque aquí solo la vamos a aplicar en casos muy sencillos, para no complicarnos la vida.

Para empezar, imaginemos que en una línea de una deducción, aparece una fórmula existencial $\exists v A(v)$, donde v es cualquier variable.

A continuación, tenemos que advertir de que aunque esta regla se llama “eliminación del existencial” **la regla no consiste en eliminar el cuantificador existencial directamente de la fórmula**. Su mecanismo es bastante más intrincado que eso.

Pues bien, si en una línea de una derivación aparece una cuantificación existencial $\exists v A(v)$, lo primero que tenemos que hacer es elegir una constante k que sea nueva para esa fórmula (es decir, que no aparezca en ella), y que tampoco aparezca en las líneas anteriores de la deducción. (Si k no cumple estos dos requisitos, entonces la regla E$\exists$ no se puede aplicar en favor de esa constante.)

Una vez hecho esto, **abrimos una bandera**, y en su **supuesto incial** introducimos la fórmula $A(k)$ (es decir, la **instanciación** de la fórmula $\exists v A(v)$ en la constante k).

En este momento, quien necesite refrescar el funcionamiento de la **regla de supuestos** y su engranaje con las **banderas**, debe releer las secciones §§12.5–12.8 de logfor1.

Como **target** de dicha bandera hay que elegir una fórmula, a la que llamaremos “B”. B ha de ser una fórmula que nos interese obtener en la derivación, y que tampoco contenga la constante k.

A continuación, procedemos a aplicar las reglas que veamos pertinentes, hasta obtener la fórmula B.

Cuando hayamos obtenido la fórmula B, cerramos la bandera.

Y justo a continuación, **volvemos a introducir la misma fórmula B, pero esta vez fuera de la bandera**. Y a la derecha de esta última fórmula, ponemos la inscripción "E∃", seguida por el número de línea de la fórmula $\exists vA(v)$, el número de línea del supuesto inicial y el número de línea de la última fórmula de la bandera.

En este contexto, diremos que hemos **eliminado el existencial** $\forall vA(v)$ **en favor de** la constante k. Y a dicha constante la llamaremos la **"constante crítica"** de la aplicación de la regla E∃.

Esquemáticamente:

E∃

$$
\begin{array}{lll}
(\dots) & \exists v A(v) & \\
(\dots) & \boxed{A(k)} & \text{S hacia } B \\
(\dots) & \dots & \\
(\dots) & B & \\
\hline
(\dots) & B & \text{E}\exists \ \textit{núms. de línea de } \exists v A(v),\ A(k) \textit{ y } B
\end{array}
$$

Requisitos:

1. k no aparece $\exists v A(v)$;
2. k no aparece en la deducción con anterioridad a $\exists v A(v)$;
3. k no aparece B;
4. $A(k)$ reemplaza **todas** las apariciones de v en $A(v)$.

§ 29.4. EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA E∃

Como primer ejemplo de uso de esta regla, vamos a construir una derivación para demostrar que:

$$\exists x Fx \ \vdash_{\text{DNPRIM}} \exists y Fy$$

Para hacerlo, comenzamos por introducir la premisa, como primera línea de la deducción.

A continuación, comenzamos una bandera, en cuyo supuesto inicial colocaremos la fórmula Fa (es decir, la instanciación de $\exists x Fx$ con la constante a, que es totalmente nueva hasta este punto).

Como target de dicha bandera, colocamos la fórmula $\exists y Fy$, que es a donde queremos llegar.

A continuación, aplicamos la regla I∃ a la fórmula Fa, pero con la variable y. Naturalmente, el resultado será la fórmula $\exists y Fy$. Y con esa fórmula, cerraremos la bandera.

Y ya por último, aplicaremos la regla E∃, a fin repetir esta última fórmula (es decir, $\exists y Fy$), pero ya fuera de la bandera. Con lo cual, habremos terminado la derivación.

A este respecto, es importante recordar que **ninguna derivación que contenga banderas puede terminar hasta que se hayan cerrado todas ellas**, como explicamos en §12.6 de logfor1.

En definitiva, la derivación nos quedará:

(1)	$\exists x Fx$	Pr
(2)	$\boxed{Fa}$	S hacia $\exists y Fy$
(3)	$\exists y Fy$	I∃ 2

(4) $\exists yFy$ E∃ 1,2,3

§ 29.5. CUESTIONES

Elabora una derivación formal que demuestre:

$$\exists xFx \quad \vdash_{\text{DNPRIM}} \exists x\neg\neg Fx$$

§ 29.6. SEGUNDO EJEMPLO DE DERIVACIÓN CON LA REGLA E∃

Nuestro siguiente ejemplo de uso de esta regla consiste en construir una derivación para demostrar que:

$$\exists xFx \quad \vdash_{\text{DNPRIM}} \neg\forall x\neg Fx$$

Para ello, comenzamos por introducir la premisa $\exists xFx$, e inmediatamente después abrimos una bandera, instanciando esta fórmula con la constante a.

El resultado será la fórmula Fa, que ocupará la línea 2 de la deducción.

Y como target de esta bandera, vamos a colocar la conclusión a la que queremos llegar con esta derivación, esto es, la fórmula $\neg\forall x\neg Fx$.

A continuación, dado que la conclusión a la que queremos llegar es una fórmula de negación, vamos a intentar obtenerla por la regla

RA (esto es, la regla de **reducción al absurdo**, que introdujimos en §14.4 de logfor1).

A tal efecto, abrimos una nueva bandera, dentro de la anterior. En logfor1 vimos algunos ejemplos de **banderas anidadas**, el primero de ellos en §15.3.

Pues bien, en el supuesto inicial de esta segunda bandera, colocamos la fórmula a la que queremos llegar, pero sin la negación. Es decir, ponemos la fórmula $\forall x \neg Fx$. Y como target, vamos a poner la fórmula $Fa \wedge \neg Fa$.

A continuación, aplicamos la regla E$\forall$ a la fórmula $\forall x \neg Fx$, sobre la constante a. Esto lo podemos hacer sin problemas, ya que dicha regla no tenía requisitos especiales.

De este modo, obtendremos la fórmula $\neg Fa$, que ocupará la cuarta línea de la derivación.

A continuación, aplicaremos la regla I$\wedge$ a las líneas 2 y 4, para unirlas por conjunción, de lo cual obtendremos la fórmula $Fa \wedge \neg Fa$.

Como dicha fórmula es una contradicción, con ella cerraremos nuestra segunda bandera, correspondiente a la regla RA. Y a continuación aplicaremos dicha regla, poniendo la negación de su supuesto inicial (esto es, la fórmula $\neg \forall x \neg Fx$).

En ese momento, nos damos cuenta de que la fórmula que acabamos de obtener es justamente el target de nuestra primera bandera. Y por lo tanto, con esta fórmula se cierra a su vez nuestra primera bandera.

Sin embargo, todavía queda un paso más, y es repetir de nuevo esta última fórmula, $\neg\forall x \neg Fx$, pero ya fuera de todas las banderas. Solo entonces podremos dar por terminada la derivación.

En definitiva, la derivación nos quedará:

(1)	$\exists x Fx$	Pr
(2)	$\boxed{Fa}$	S hacia $\neg\forall x \neg Fx$
(3)	$\boxed{\forall x \neg Fx}$	S hacia $Fa \wedge \neg Fa$
(4)	$\neg Fa$	E$\forall$ 3
(5)	$Fa \wedge \neg Fa$	I$\wedge$ 2,4
(6)	$\neg\forall x \neg Fx$	RA 3,5
(7)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	E$\exists$ 1,2,6

§ 29.7. EJEMPLO DE FORMALIZACIÓN Y DERIVACIÓN EN DEDNATPRIM CON LA REGLA E$\exists$

A continuación, vamos a formalizar el siguiente argumento:

Hay algo que es efímero pero valioso.
Por lo tanto, hay algo que es valioso y efímero.

Empezamos estableciendo la correspondiente tabla de convenciones simbólicas:

F : *ser efímero*

G : *ser valioso*

A continuación, procedemos a formalizar el argumento:

$$\exists x(Fx \wedge Gx) \quad \vdash_{\text{DNPRIM}} \exists x(Gx \wedge Fx)$$

Y por último, procedemos a construir una derivación de dicho argumento en dednatprim:

(1)	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	Pr
(2)	$\boxed{Fa \wedge Ga}$	S hacia $\exists x(Gx \wedge Fx)$
(3)	$\quad Ga \wedge Fa$	Cm$\wedge$ 2
(4)	$\quad \exists x(Gx \wedge Fx)$	I$\exists$ 3
(5)	$\exists x(Gx \wedge Fx)$	E$\exists$ 1,2,4

(Nótese que Cm$\wedge$ es la regla **conmutativa de la conjunción**, que introdujimos en §16.2 de logfor1.)

§ 29.8. CUESTIONES

Siguiendo el ejemplo anterior, formaliza y construye una derivación en dednatprim para el siguiente argumento:

Hay algo que es posible y deseable.
Por lo tanto, hay algo que es deseable.

§ 29.9. BALANCE

Decía Capablanca, que aprendía más de una partida perdida que de cien ganadas. (Mencionamos a Capablanca en **§ 16.3**).

A mí me gusta recibir elogios, como a todo el mundo. Pero también me gusta recibir **críticas constructivas**, porque me ayudan a mejorar, como profesional y como persona. Las críticas constructivas me ayudan a encontrar estrategias para manejarme con más salud, con más paz y con más equilibrio — en mi trabajo y fuera de él, en la relación con otras personas y en la relación comigo mismo.

A punto de terminar la docencia de esta asignatura, llega el momento de hacer balance, y para eso necesito tu colaboración.

Por ello, **es obligatorio responder a todas las preguntas de § 29.10 , si quieres obtener la puntuación correspondiente a este tema.** En cambio, las cuestiones de la sección siguiente (§29.11) son opcionales.

§ 29.10. CUESTIONES

1. Respecto a la **materia** que hemos estudiado en esta asignatura (es decir, la *Lógica de primer orden*, como disciplina académica), y su presencia en el Grado de Filosofía:

   a) Haz una observación favorable.

   b) Haz una observación crítica.

   c) Haz una sugerencia de mejora.

2. Responde a esas mismas tres cuestiones, respecto de este **manual de curso**, como material didáctico.

3. Responde a esas mismas tres cuestiones, respecto a la **metodología docente** utilizada en esta asignatura.

4. Responde a esas mismas tres cuestiones, respecto del **procedimiento de evaluación** empleado en esta asignatura.

5. Responde a esas mismas tres cuestiones, respecto a mi **actitud como profesor** de esta asignatura.

§ 29.11. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.

Tema 30

Metateoría – Resultados limitativos – Lógica de orden superior

§ 30.1. METATEORÍA DE DEDNATPRIM: CORRECCIÓN Y COMPLETITUD

En §18.6 de logfor1, explicamos en qué consisten las **tres principales propiedades metateóricas de los sistemas formales: corrección, completitud y decidibilidad**.

A continuación, en §18.7, indicamos que el cálculo de deducción natural proposicional (**dednatprop**) era **correcto y completo**, respecto de la **semántica veritativo-funcional**.

A su vez, en el Tema 23 de logfor1, no solo *indicamos*, sino que **demostramos** que el método de árboles para la lógica proposicional (**arprop**) era asimismo correcto y completo, respecto de la semántica veritativo-funcional.

Pues bien, aquí en logfor2, la corrección y completitud hay que investigarlas respecto de la semántica de primer orden (**semprim**) y las interpretaciones de primer orden (**intpred**).

Y a tal efecto, podemos indicar (aunque no nos vamos a detener a demostrarlo) que nuestro cálculo deductivo, **dednatprim**, es también **correcto y completo** respecto de dicha semántica.

En otras palabras: podemos afirmar que una fórmula A es **derivable** de un conjunto de fórmulas D en dednatprim, si y solo si es **consecuencia lógica** de ese conjunto, respecto de las interpretaciones de primer orden:

$$D \vdash_{\text{DNPRIM}} A \qquad \text{si y solo si} \qquad D \models_{\text{PRIM}} A$$

Y lo mismo podemos decir de la extensión del método de árboles para la lógica de primer orden. Aunque aquí no hemos estudiado este cálculo, conviene reseñar que también es correcto y completo en relación a la semántica de primer orden.

§ 30.2. EL TEOREMA DE CHURCH

Sin embargo, ni dednatprim ni la extensión del método de árboles para la lógica de primer orden son **decidibles**.

En el caso de dednatprim, esto no debería sorprendernos, ya que dednatprim es una extensión de dednatprop, y este cálculo no era decidible, como explicamos en §18.8 de logfor1.

Sin embargo, el caso de los de árboles es distinto, porque arprop *sí* era decidible. Y por consiguiente, el hecho de que la extensión de este cálculo para la lógica de primer orden no lo sea, marca una diferencia importante entre la lógica proposicional y la lógica de primer orden.

Pues bien, de acuerdo con el **teorema de Church** (demostrado en 1936), **ningún cálculo deductivo para la lógica de primer orden es decidible**.

En otras palabras: *es imposible diseñar un cálculo de reglas algorítmicas, que permita decidir de forma mecánica y en un número finito de pasos, si una fórmula es o no derivable de un conjunto finito de fórmulas.*

El teorema de Church evidencia que la argumentación de primer orden es esencialmente más compleja que la argumentación proposicional, por cuanto la primera se puede resolver mediante cálculos decidibles (como eran las tablas de verdad, o arprop), pero la segunda no.

En consecuencia, *nunca existirá una forma de automatizar totalmente el razonamiento deductivo de primer orden.* Y en particular, *nunca existirá una forma de automatizar totalmente el razonamiento matemático.*

Ello afecta a los programas de *inteligencia artificial*. En efecto, de acuerdo con el teorema de Church, por muy potentes y sofisticados que sean estos programas, siempre estarán basados en estrategias particulares, que conseguirán resolver algunos casos, pero no todos.

Eso no significa que los ordenadores no puedan llegar a superar al ser humano en cuanto a su capacidad para encontrar pruebas ingeniosas de teoremas matemáticos. Significa que, ni para los ordenadores ni para el ser humano, puede elaborarse un método determinista (totalmente predecible y resolutivo) que encuentre las pruebas en cualquier caso que se le pudiera pedir.

§ 30.3. CUESTIONES

Explica con tus propias palabras por qué dednatprim no es un cálculo decidible, mientras que las tablas de verdad sí lo eran.

§ 30.4. LOS TEOREMAS DE INCOMPLETITUD DE GÖDEL

Al *shock* que supuso el teorema de Church, se añadieron otros **resultados negativos** (o **limitativos**), descubiertos más o menos por la misma época. Y entre esos resultados, destacan los dos *teoremas de incompletitud de Gödel*, demostrados en 1931.

Se requeriría un curso más avanzado para formular exactamente estos resultados, y mucho más para abordar su demostración. Pero conviene comentarlos aquí, aunque sea de modo superficial, porque son la *"joya de la corona"* de toda la lógica formal — es decir, su descubrimiento más profundo, relevante y sofisticado.

Pues bien, como anticipamos en §9.3 de logfor1, el **primer teorema de incompletitud de Gödel** establece que **la aritmética elemental no es completamente formalizable**.

La aritmética elemental es la teoría más sencilla y básica del edificio de las matemáticas. Esta teoría trata de los números naturales, que ya conocemos, así como de las relaciones de orden y las operaciones entre ellos. Ello incluye el estudio de los *números primos*, por ejemplo, de los que hablamos en §24.6 de logfor1.

Pues bien, el primer teorema de incompletitud establece que cualquier formalización de los **axiomas** de esta teoría (es decir, de las propiedades esenciales de los números naturales, de las cuales se deriva lo demás) es necesariamente incompleta. Ello implica que habrá fórmulas verdaderas acerca de los números naturales, que no serán derivables de los axiomas de la teoría.

Y por su parte, el **segundo teorema de incompletitud de Gödel** (incluido en el mismo artículo de 1931), establece que **no se puede probar la consistencia de los axiomas de la aritmética, por medios puramente formales**.

Conjuntamente, estos dos teoremas suponen un serio obstáculo a la capacidad de la lógica formal para representar, de un modo exacto y completo, el razonamiento matemático.

§ 30.5. PROPIEDADES DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN

Otro desarrollo importante que va a quedar fuera del presente curso es la llamada **"lógica de orden superior"**.

Como hemos ido viendo hasta ahora, la lógica de primer orden contempla propiedades y relaciones de los objetos individuales, así como la cuantificación (universal y existencial) sobre objetos individuales.

Así por ejemplo, cuando afirmamos que

$$\textit{Este coche es rojo} \tag{1}$$

estamos atribuyendo la propiedad de *ser rojo* a un objeto individual, este coche.

Por ello, decimos que *ser rojo* es una **"propiedad de primer orden"**, en cuanto que se aplica a objetos individuales, como puedan ser coches, flores, insectos, etc.

Ahora bien, el lenguaje natural también nos permite atribuir propiedades a las propiedades mismas. Por ejemplo, cuando afirmamos que:

$$\textit{Rojo es un color} \tag{2}$$

estamos atribuyendo una propiedad a la propiedad misma de *ser rojo*.

Y por ello, decimos que la propiedad *ser un color* es una **"propiedad de segundo orden"**, en cuanto que no se aplica a objetos individuales, sino a otras propiedades (y más concretamente, a propiedades de primer orden, como *ser rojo*, *ser azul*, etc).

§ 30.6. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de propiedad de primer orden.
2. Pon un ejemplo de propiedad de segundo orden, que se aplique a la propiedad de primer orden que acabas de proponer.

§ 30.7. PROPIEDADES DE TERCER ORDEN, ETC

Ahora bien, el lenguaje natural no se queda ahí, sino que también nos permite atribuir propiedades a las propiedades de segundo orden, como *ser un color*.

Así por ejemplo, es sabido que lo que consideramos *color* está restringido por las limitaciones perceptivas humanas. En concreto, ni al *infrarrojo* ni al *ultravioleta* les consideramos colores (ni identificamos colores diferenciados dentro de estas franjas de longitud de onda), sencillamente porque no son perceptibles a simple vista.

Naturalmente, esta es una característica humana, dado que hay otras especies animales que sí perciben la luz infrarroja, o la luz ultravioleta, y las utilizan para orientarse.

Pues bien, en función de todo ello podemos afirmar que:

Ser un color es una propiedad antropológica (3)

Con ello estamos diciendo que la propiedad de *ser un color* (es decir, lo que se consideran colores en las distintas lenguas, como el rojo, el azul, el amarillo, etc) está ligada a la fisiología de la percepción humana.

Ahora bien, al decir esto, estamos atribuyendo una propiedad a la propiedad de segundo orden de *ser un color*. Y por esta razón, decimos que la propiedad de *ser antropológica* tiene el rango de **"propiedad de tercer orden"**.

Por el mismo razonamiento, si a una propiedad de tercer orden le atribuimos a su vez una propiedad, esta tendrá el rango de **propiedad de cuarto orden**. Y así sucesivamente.

§ 30.8. CUANTIFICACIÓN DE PRIMER ORDEN

Por otra parte, cuando afirmamos que:

Hay un coche rojo (4)

estamos afirmando la existencia de un objeto individual que cumple con dos propiedades, *ser coche* y *ser rojo*. Naturalmente, tanto la propiedad de *ser coche* como la propiedad de *ser rojo* son propiedades de primer orden, porque se aplican a objetos individuales como los coches.

Pues bien, a una cuantificación existencial como (4), que afirma la existencia de un objeto individual, la llamamos **"cuantificación de primer orden"**.

Y otro tanto cabe decir de las cuantificaciones universales aplicadas a objetos individuales. Por ejemplo, cuando decimos:

Todos los coches de esta calle son rojos (5)

también estamos haciendo una *cuantificación de primer orden*, por cuanto estamos afirmando una generalidad acerca de objetos individuales (concretamente, de los coches de esta calle).

A lo largo de este curso, la cuantificación que hemos aprendido a manejar (tanto la existencial como la universal) es la cuantificación de primer orden. De ahí que el sistema que hemos estudiado se llame **"lógica de primer orden"**.

§ 30.9. CUANTIFICACIÓN DE SEGUNDO ORDEN, DE TERCER ORDEN, ETC

Sin embargo, una vez más, el lenguaje natural nos permite ir más allá. En concreto, el lenguaje natural nos permite hacer afirmaciones de existencia o generalidad sobre las propiedades mismas.

Así por ejemplo, cuando afirmamos que:

Hay alguna propiedad de este coche que me gusta (6)

estamos afirmando la **existencia de una propiedad** (en concreto, la existencia de una propiedad que posee este coche, y que a mí me gusta).

Naturalmente, como esa propiedad que me gusta la tiene el coche, que es un objeto individual, se tiene que tratar de una propiedad de primer orden. Y por esta razón, decimos que (6) es una **"cuantificación existencial de segundo orden"**, porque predica la existencia de una propiedad de primer orden.

Por su parte, cuando afirmamos que:

Me gustan todas las propiedades de este coche (7)

estamos afirmando, a su vez, una **generalización universal sobre propiedades**. Más concretamente, estamos diciendo que cualquier propiedad que posea este coche, es una propiedad que me gusta.

Una vez más, podemos subrayar que todas las propiedades que posee el coche son necesariamente propiedades de primer orden, puesto que las posee el coche, que es un objeto individual. Y por esta razón, decimos que (7) es una **"cuantificación universal de segundo orden"**, porque afirma un hecho general sobre un conjunto de propiedades de primer orden.

§ 30.10. CUESTIONES

1. Pon un ejemplo de cuantificación existencial de segundo orden.
2. Pon un ejemplo de cuantificación universal de segundo orden.

§ 30.11. LA LÓGICA DE SEGUNDO ORDEN Y LA LÓGICA DE ORDEN SUPERIOR

Pues bien, la **lógica de segundo orden** consiste en ampliar el sistema lógico que hemos visto en este curso, incorporando la posibilidad de atribuir propiedades a las propiedades de primer orden (como en (2)), así como la posibilidad de hacer cuantificaciones existenciales o universales sobre las propiedades de primer orden (como en (6) y (7)).

Y la llamada **"lógica de orden superior"** incluye tanto la lógica de segundo orden, como otros sistemas aún más complejos, que permiten formalizar afirmaciones como (3), en las que atribuimos propiedades a una propiedad de segundo orden.

Sin embargo, se ha demostrado que ni la lógica de segundo orden ni ningún otro sistema de orden superior más complejo son **axiomatizables**, en el sentido que explicamos en §23.1 de logfor1. Es decir, que no puede existir ningún cálculo deductivo que sea correcto y completo para la lógica de segundo orden, ni para ninguna otra lógica de orden superior.

Por esta razón, así como por las consecuencias de la paradoja de Russell que vamos a ver a continuación, el **paradigma de la lógica deductiva** sigue siendo la **lógica de primer orden**.

En consecuencia, la lógica de segundo orden, así como la lógica de orden superior en su conjunto, se tratan como teorías más marginales, o en estado embrionario, a pesar de que se empezaron a estudiar en el mismo momento que la lógica de primer orden, con la obra de G. Frege. Pero nunca se han llegado a incorporar al paradigma principal.

Ahora bien, quizá por ese origen histórico, ni la lógica de segundo orden ni la lógica de orden superior se suelen catalogar como *lógicas no clásicas*, de las que hablamos en el Tema 24 de logfor1. Por consiguiente, no suelen aparecer en los manuales de lógicas no clásicas, y hay que estudiarlas en bibliografía específica (que la hay, y mucha, principalmente sobre la lógica de segundo orden, que es con diferencia la más importante, y la que más atención ha recibido).

§ 30.12. LA PARADOJA DE RUSSELL

Como última explicación de este curso, expondremos la curiosa **paradoja de Russell**, que surge precisamente en el contexto de la lógica de orden superior.

Al menos a primera vista, algunas propiedades parecen aplicarse a sí mismas, mientras que otras no. Así por ejemplo, la propiedad de *ser una propiedad antropológica*, que mencionamos en **§ 30.7** , parece ser ella misma una propiedad antropológica.

Y por su parte, la propiedad de *ser una propiedad* también parece ser ella misma una propiedad, claramente.

Sin embargo, la propiedad de *ser rojo* no es, ella misma, roja. Y la propiedad de *ser un color* no es ella misma un color (la propiedad de *ser un color* no aparece en ningún lugar del arco iris, por ejemplo).

Pues bien, llamemos **"autoaplicables"** a las propiedades que se aplican a sí mismas, como *ser antropológica*, o *ser una propiedad.*

Y llamemos **"no autoaplicables"** a las propiedades que no se aplican a sí mismas, como *ser rojo*, o *ser un color.*

Y finalmente, definamos R como la propiedad de *ser una propiedad no autoaplicable.*

A partir de aquí, la paradoja consiste en razonar que R es una propiedad autoaplicable si y solo si **no** es autoaplicable.

En efecto, si suponemos que R es autoaplicable, entonces se le aplicaría su propia definición. Pero ello implica que no es autoaplicable.

Y si suponemos que no es autoaplicable, entonces es que *no* se le aplicaría su propia definición, con lo cual debería ser autoaplicable.

§ 30.13. CUESTIONES

Algunas palabras se aplican a sí mismas, mientras que otras no. Así por ejemplo, la palabra "esdrújula" es esdrújula; la palabra "sustantivo" es un sustantivo; y la palabra "palabra" es, obviamente, una palabra.

Sin embargo, la palabra "aguda" no es aguda, sino llana; la palabra "verbo" no es ella misma un verbo, sino un sustantivo; y la palabra "planeta" no es ella misma un planeta, sino una palabra.

Pues bien, llamemos **homológicas** a todas aquellas palabras que se aplican a sí mismas (como "esdrújula", "sustantivo" y "palabra"). Y llamemos **heterológicas** a todas aquellas palabras que *no* se aplican a sí mismas (como "aguda", "verbo" y "planeta").

A partir de aquí, e inspirándote en la paradoja de Russell que acabamos de ver, **razona si, en tu opinión, la palabra "heterológica" es ella misma homológica o heterológica**. (Este problema se conoce como **"Paradoja de Grelling-Nelson"**.)

§ 30.14. SOLUCIONES A LA PARADOJA DE RUSSELL

Para evitar la paradoja de Russell, se han explorado dos caminos o vías principales.

La primera vía consiste en *regimentar* (es decir, *estratificar rígidamente*) todas las propiedades. Al hacer esto, obligamos a que cada propiedad pertenezca únicamente a un tipo lógico (ya sea primer orden, segundo orden, etc), y a que solo se pueda aplicar a propiedades de tipo inferior.

Así bloqueamos la definición de R de **§ 30.12** , ya que en dicha definición no vinculaba tal propiedad a ningún tipo lógico en particular.

Y además, si una propiedad solo se puede aplicar a propiedades de nivel inferior, entonces está descartado, de entrada, que ninguna propiedad se pueda aplicar a sí misma.

Sin embargo, todo ello tiene consecuencias contraintuitivas.

Así por ejemplo, esta estratificación no permite representar la propiedad de *ser una propiedad*, en abstracto. Ni siquiera permite expresar que

"*ser una propiedad* es una propiedad"

porque al decir eso no estamos indicando a qué tipo lógico pertenece *ser una propiedad*, y por tanto estamos rompiendo con la estratificación en tipos.

La segunda vía de solución a la pardoja de Russell es la llamada **"teoría axiomática de conjuntos"**. En esta teoría no hay una estratificación en tipos lógicos, pero también tiene consecuencias contraintuitivas importantes, relacionadas con la elección de los axiomas en los que se basa dicha teoría.

§ 30.15. RECOMENDACIONES BIBLIOGRÁFICAS

Para terminar, recopilo las recomendaciones bibliográficas que hice en el Tema 24 de logfor1, junto con la que he hecho aquí en **§ 27.2** , y un último añadido que viene al caso:

- M. Machover, *Set theory, logic and their limitations* (ahora es relevante el libro entero, y no solo el capítulo 7, como en logfor1);
- G. Priest, *An Introduction to Non-Classical Logic*;
- C. Madrid, *Filosofía de la inteligencia artificial*;
- R. Jeffrey, *Formal Logic: Its Scope and Limits*;
- S. Shapiro, *Foundations without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*

Todos estos libros están disponibles en la Biblioteca Luis Vives. Y todos, salvo el de Shapiro, circulan ampliamente por internet.

§ 30.16. CUESTIONES FINALES

Opcionalmente, si te sobra tiempo, indica:

1. Qué es lo que más te ha interesado de este tema.
2. Qué es lo que más te ha costado entender.
3. Cualquier errata o desajuste que hayas detectado.
4. Cualquier otra sugerencia de mejora o comentario relevante, sobre el manual o sobre la asignatura.