PROGRAMA DE DOCTORADO
«LA CONFIGURACIÓN DEL
SUJETO MODERNO»

Curso de 3 créditos:
"La teoría del sujeto creativo de Brouwer: una semántica para la matemática intuicionista"

Gustavo Fernández Díez Picazo

Curso 2006—2007

Universidad de Murcia

Programa del curso

I. Objetivos

La teoría del sujeto creativo de Brouwer es la explicación que se da, dentro de la concepción intuicionista de la matemática, al proceso creativo del sujeto o comunidad científica en el ámbito de las ciencias exactas. El objetivo de este Curso es presentar los fundamentos de dicha teoría a través de una de las cuestiones donde principalmente se manifiesta: en la interpretación de los operadores lógicos (conectivas y cuantificadores) desde el punto de vista intuicionista.

II. Temario

1. La interpretación de la lógica intuicionista.
2. Modelos de Kripke: definición.
3. Modelos de Kripke: discusión.
4. La interpretación de Heyting.
5. La decidibilidad de la relación de prueba.
6. La interpretación de Kreisel.
7. Los enunciados atómicos.
8. Pruebas canónicas.
9. Pruebas con premisas.
10. Recapitulación.

Metodología y normas de evaluación

1. Las sesiones consistirán en una exposición de los temas por parte del profesor, combinada permanentemente con la discusión y puesta en común con los alumnos de los distintos problemas que se vayan tratando.

2. Para su evaluación, los alumnos deberán entregar al profesor soluciones escritas a 5 de los Problemas propuestos al final del Curso (véase p. 29).

3. Como medida opcional, para aquellos alumnos que desconozcan la lógica moderna, bastará con entregar un ensayo sobre cualquier tema relacionado con la filosofía de la matemática, de una extensión de entorno a 5.000 palabras (unas 15 páginas a doble espacio, en letra de tamaño 12pt). A tal efecto se recomiendan los libros de ALCOLEA, CAÑÓN LOYES, KLINE, KRIPKE, MOSTERÍN y WITTGENSTEIN de la Bibliografía. [PERFILAR ESTAS REFERENCIAS Y COMPLETAR LA BIBLIOGRAFÍA CON ELLAS.]

4. No se tendrán en cuenta para la evaluación otros aspectos, como la asistencia o inasistencia a las clases.

5. Los ensayos y las soluciones a los Problemas se entregarán por escrito, no aceptándose correos electrónicos ni discos de ordenador. En el caso de las soluciones a los Problemas, se entregarán preferentemente *a mano*.

6. Los alumnos que no puedan entregar su trabajo escrito personalmente, tienen la opción de hacerlo llegar al casillero del profesor en la Conserjería del Edificio Luis Vives, bajo su propia responsabilidad en caso de extravío o retraso.

7. El límite para la entrega de los ensayos y las soluciones a los Problemas será el día 22 de junio de 2007 (para la Convocatoria de junio), y el día 14 de septiembre de 2007 (para la Convocatoria de septiembre).

1. La interpretación de la lógica intuicionista

La lógica intuicionista como un cálculo deductivo formal está perfectamente fijada desde el año 1930, año en que Heyting elaboró la primera axiomatización completa para la lógica intuicionista de predicados de primer orden. Desde entonces se han diseñado muchas otras versiones equivalentes a aquélla, en formatos axiomáticos, de deducción natural y de árboles, pero no se ha propuesto ninguna modificación importante. Los matemáticos intuicionistas y los estudiosos del intuicionismo en general están de acuerdo en que la lógica intuicionista está representada de una manera exacta por el cálculo de Heyting, es decir: que dicho cálculo, o cualquiera de sus equivalentes, representa de forma adecuada las reglas del razonamiento deductivo que subyacen a la matemática intuicionista.

Otro asunto es si las demás corrientes de la matemática constructiva, y en especial el llamado "constructivismo ruso", que difiere del intuicionismo sobre la aceptación de algunos principios importantes, están igualmente representadas por el sistema de Heyting, como comúnmente se supone. Esto es algo sobre lo que he expresado algunas dudas en mi artículo "The logic of constructivism" ("La lógica del constructivismo", 2002), pero tiene un interés más lateral, y no debe apartarnos de nuestro principal objetivo en este Curso.

El caso es que, como decía, la lógica intuicionista está perfectamente fijada en cuanto al cálculo formal se refiere, es decir, en su vertiente sintáctica. Pues bien: no ocurre lo mismo en la vertiente semántica, aquella destinada a proporcionar *interpretaciones*, tanto de los términos y fórmulas del lenguaje, como del sentido o coherencia de las propias reglas del sistema deductivo.

En este segundo aspecto, aunque la investigación comenzó casi al mismo tiempo que en el aspecto sintáctico, el problema a resolver ha resultado ser mucho más arduo, y los progresos conseguidos, más lentos y titubeantes. De hecho, hoy en día sigue siendo esencialmente un problema abierto, sobre el cual hay diversas perspectivas planteadas y parcialmente desarrolladas, todas ellas con algún defecto o inconveniente serio, y sin que sea fácil optar por una de ellas en concreto, ni haya una opinión unánime al respecto.

En fin, todo esto será lo que expongamos y tengamos amplia ocasión de comprobar durante el desarrollo de este Curso.

Y para ello, vamos a empezar considerando, en primer lugar, aquellas interpretaciones de la lógica intuicionista que se hallan más desarrolladas desde un punto de vista matemático o técnico, es decir: que han sido definidas con el más alto grado de rigor y exactitud. Y las vamos a llamar interpretaciones "no genuinas" (en inglés, *"unintended"*, *no deseadas*), porque ninguna de ellas como veremos, refleja suficientemente el significado que subyace a la estructura lógica de los enunciados matemáticos intuicionistas. Es decir: ninguna de ellas constituye una auténtica explicación del significado sobrentendido o genuino que el matemático intuicionista tiene la intención de transmitir.

Se trata, por el contrario, de estructuras matemáticas, más o menos artificiosas, que están ingeniosamente diseñadas para adaptarse al cálculo formal intuicionista de primer orden y servir como modelos abstractos para estudiar desde una perspectiva semántica la deducción en dicho cálculo, aunque no signifiquen nada, o lo que signifiquen no coincida, o no coincida del todo, con lo que la filosofía intuicionista de la matemática dicta.

Estas interpretaciones son extraordinariamente importantes, además de por sus aplicaciones fuera del ámbito del intuicionismo, que las tienen, porque, mientras que las teorías sobre la interpretación sobrentendida o genuina no alcancen un grado de rigor y precisión mucho mayor del que hasta ahora tienen, son las únicas disponibles para efectuar estudios metateóricos sobre el cálculo intuicionista, como las pruebas de corrección y completud, o en general las de inderivabilidad, consistencia e independencia.

En efecto, la lógica intuicionista de predicados, al igual que la lógica clásica, es indecidible. Ello significa que, por ejemplo, mientras que para mostrar que una fórmula es deducible de otra basta con encontrar una deducción, cosa que se puede hacer mecánicamente por varios medios, para demostrar que no lo es, no existe ni puede existir un procedimiento mecánico, y hay que recurrir a la construcción de un modelo en el cual una de las fórmulas sea verdadera, y la otra, la presuntamente deducible, sea falsa.

En el caso de la lógica clásica la construcción de estos modelos se efectúa siguiendo la definición de interpretación de primer orden debida a Tarski. Pero esta noción, al menos bajo su lectura habitual, es totalmente inadecuada para la lógica intuicionista, ya que tiene como consecuencia inmediata la validez de leyes como la de tercio excluso o la de doble negación, echa por tierra el carácter constructivo de los cuantificadores, y en definitiva, no se ajusta en absoluto al cálculo formal intuicionista.

Es por ello que desde una temprana etapa varios autores empezaron a desarrollar distintos modelos matemáticos adecuados para el tratamiento semántico y metateórico de la lógica intuicionista, primero la proposicional y más tarde la de predicados. De todos esos modelos, los más conocidos y estudiados son los debidos a Kripke, que además constituyen dentro de este grupo, junto a los de Beth, los que mejor reflejan (aun sin llegar a captar del todo) la filosofía de la matemática que inspiró la creación de esta lógica.

A continuación nos dedicaremos a describir con algún detalle los modelos de Kripke para la lógica intuicionista, y a examinar hasta qué punto se acercan a la interpretación sobrentendida de las oraciones de la matemática intuicionista, y en qué otros aspectos difieren de ella. Todo lo que diremos será aplicable, mutatis mutandis, a los modelos de Beth, que son en buena medida similares a estos, así como a otras distintas versiones o presentaciones de los propios modelos de Kripke que pueden encontrarse en la literatura publicada.

En cuanto al resto de modelos matemáticos propuestos, su conexión con la filosofía intuicionista de la matemática es más lejana, y por lo tanto su plausibilidad como interpretaciones genuinas debe ser descartada de antemano.

2. Modelos de Kripke: definición

Empezaremos tomando un lenguaje formal de primer orden $\mathcal{L}$ adecuado para la lógica intuicionista, es decir, con las cuatro conectivas básicas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ y $\rightarrow$) y los dos cuantificadores ($\exists$, $\forall$), ninguno de los cuales son definibles, dentro de esta lógica, en términos de los operadores restantes. $\mathcal{L}$ será un lenguaje carente del símbolo de igualdad, y en consecuencia, carente también de símbolos funcionales distintos de las constantes individuales: ello simplificará notablemente el tratamiento, y ayudará a centrar la atención sobre el principal problema que estamos estudiando, tanto en esta sección como en el resto del Curso. Por lo demás, $\mathcal{L}$ tendrá una secuencia infinita de variables (como es preceptivo), más un conjunto contable de constantes individuales, y un conjunto contable de símbolos relacionales de cada aridad, empezando por la monaria, y de los que podrán ser vacíos todos menos uno.

En estas condiciones, un modelo de Kripke $\mathfrak{K}$ adecuado a $\mathcal{L}$ es una quinterna ordenada $(\mathcal{U}, \mathcal{S}, \leqslant, \mathfrak{f}, \mathfrak{g})$, donde:

- $\mathcal{U}$ es un conjunto no vacío, que llamaremos el *"universo"* de $\mathfrak{K}$;
- $\mathcal{S}$ es un conjunto no vacío a cuyos miembros llamaremos los *"estadios"* de $\mathfrak{K}$;
- $\leqslant$ es un orden parcial en $\mathcal{S}$;
- $\mathfrak{f}$ es una función monaria que asigna, a cada constante c de $\mathcal{L}$, un elemento de $\mathcal{U}$ que denotaremos como "$c^{\mathfrak{K}}$"; y
- $\mathfrak{g}$ es una función binaria que asigna, a cada símbolo relacional n-ario R de $\mathcal{L}$ y estadio $s \in \mathcal{S}$, un subconjunto de $\mathcal{U}^n$, es decir: un conjunto de n-tuplas de miembros de $\mathcal{U}$, que denotaremos como "$R_s^{\mathfrak{K}}$", y de tal manera que para cualesquiera $s, t \in \mathcal{S}$, si $s \leqslant t$ entonces $R_s^{\mathfrak{K}} \subseteq R_t^{\mathfrak{K}}$.

Naturalmente, para que todo esto sea aceptable a los ojos del intuicionista, la teoría de conjuntos de fondo ha de ser intuicionista también. Así por ejemplo, los conjuntos corresponden a lo que tradicionalmente se llamó "especies" (del inglés *"species"*), y se determinan intensional, y no extensionalmente. Es decir: cada conjunto corresponde a una propiedad que haya sido definida constructivamente, y no se identifica sin más con la totalidad de sus elementos, a menos que el conjunto en cuestión sea finito, y dichos elementos hayan sido a su vez construidos de antemano.

De igual forma, el hecho de que un conjunto sea no vacío (en la terminología tradicional "habitado", del inglés *"inhabited"*), significa, no que podamos probar en abstracto que tiene que tener elementos, sino que sabemos de hecho cómo construir uno en concreto. Como quiera que sea, nada de esto tiene por qué preocuparnos especialmente aquí, porque los ejemplos de modelos de Kripke que vamos a manejar van a ser en cualquier caso muy sencillos.

Desde un punto de vista intuitivo, podemos imaginar que los estadios de $\mathcal{S}$ representan la progresiva sucesión de etapas del conocimiento matemático. Dado un símbolo relacional n-ario R y un estadio s, el conjunto $R_s^{\mathfrak{K}}$ es el conjunto de n-tuplas del universo $\mathcal{U}$ de las cuales *sabemos*, en ese estadio, que están en la relación correspondiente a R. Es decir: el conjunto de n-tuplas de $\mathcal{U}$ que la comunidad matemática ha conseguido, en el estadio s, verificar (probar) que están en la relación correspondiente a R.

De cada una de las restantes n-tuplas de $\mathcal{U}$ puede ser que *se sepa*, en el estadio s, que *no* están en la relación correspondiente a R, o puede ser que en el estadio s aún no se sepa si están o no están en dicha relación, esto es: que la cuestión esté por decidir. La diferencia entre estas dos posibilidades no se reflejará en el modelo como tal, aunque sí será recogida después por la relación de *forzamiento*.

La condición de motononía con respecto a $\mathfrak{g}$

$$s \leqslant t \implies R_s^{\mathfrak{K}} \subseteq R_t^{\mathfrak{K}}$$

establece, obviamente, el carácter acumulativo del conocimiento matemático: de acuerdo con esta condición, una vez que se ha demostrado en un estadio que cierta n-tupla pertenece a determinada relación, ese conocimiento se preservará en todos los estadios posteriores.

Pues bien, a la noción de *modelo de Kripke* añadimos inmediatamente la de *evaluación.* Una *evaluación* ε basada en un modelo de Kripke $\mathfrak{K}$ para $\mathcal{L}$ es una función que asigna a cada variable x de $\mathcal{L}$ un elemento del universo $\mathcal{U}$, elemento que denotaremos como "x^{ε}". Y nótese que como el universo $\mathcal{U}$ ha de ser no vacío, y eso significa que sabemos cómo construir al menos un elemento suyo, $u \in \mathcal{U}$, también sabemos cómo construir al menos una evaluación basada en $\mathfrak{K}$, a saber: aquella que asigne a todas las variables de $\mathcal{L}$ el elemento u.

Además, cualquier evaluación ε asignará a cada constante c de $\mathcal{L}$ el mismo valor que reciba c bajo el modelo $\mathfrak{K}$ en que ε esté basada: $c^{\varepsilon} = c^{\mathfrak{K}}$. Y si ε es una evaluación cualquiera basada en un modelo $\mathfrak{K}$, y u es cualquier elemento del universo $\mathcal{U}$ de $\mathfrak{K}$, entonces $\varepsilon[x/u]$ será aquella evaluación también basada en $\mathfrak{K}$, que asigne a la variable x el objeto u y sea en todo lo demás idéntica a ε.

A partir de aquí definimos la noción semántica básica de los modelos de Kripke, que es la noción de *forzamiento* (del inglés *"forcing"*). Para ello tomamos un modelo de Kripke $\mathfrak{K}$ con universo $\mathcal{U}$, una evaluación ε basada en $\mathfrak{K}$ y una fórmula cualquiera α de $\mathcal{L}$. Y a continuación estipulamos las condiciones bajo las cuales α es *forzada* por la evaluación ε en el estadio s (abreviadamente, "$\varepsilon \Vdash_s \alpha$"), por inducción fuerte sobre el grado lógico de α, distinguiendo los siete casos correspondientes a la definición de "fórmula de $\mathcal{L}$":

1. Si α es una fórmula atómica $Rt_1 \ldots t_n$, entonces:

$$\varepsilon \Vdash_s Rt_1 \ldots t_n \text{ si } (t_1{}^{\varepsilon}, \ldots, t_n{}^{\varepsilon}) \in R_s^{\mathfrak{K}}$$

2. Si α es una negación $\neg\beta$, entonces:

$$\varepsilon \Vdash_s \neg\beta \text{ si para todo } t \geqslant s \text{ tenemos } \varepsilon \nVdash_t \beta$$

3. Si α es una conjunción $\beta \wedge \gamma$, entonces:

$$\varepsilon \Vdash_s \beta \wedge \gamma \text{ si suceden a la vez } \varepsilon \Vdash_s \beta \text{ y } \varepsilon \Vdash_s \gamma$$

4. Si α es una disyunción $\beta \vee \gamma$, entonces:

$$\varepsilon \Vdash_s \beta \vee \gamma \text{ si sucede o bien } \varepsilon \Vdash_s \beta \text{ o bien } \varepsilon \Vdash_s \gamma$$

5. Si α es una fórmula condicional $\beta \to \gamma$, entonces tenemos:

$$\varepsilon \Vdash_s \beta \to \gamma \text{ si sucede } \varepsilon \Vdash_t \gamma \text{ en cualquier } t \geqslant s \text{ tal que } \varepsilon \Vdash_t \beta$$

6. Si α es una cuantificación existencial $\exists x\beta$, entonces:

$$\varepsilon \Vdash_s \exists x\beta \text{ si hay algún } u \in \mathcal{U} \text{ tal que } \varepsilon[x/u] \Vdash_s \beta$$

7. Y finalmente, si se trata de una cuantificación universal $\forall x\beta$, entonces tenemos:

$$\varepsilon \Vdash_s \forall x\beta \text{ si para todo } u \in \mathcal{U} \text{ tenemos } \varepsilon[x/u] \Vdash_s \beta$$

Volviendo al punto de vista intuitivo, esto quiere decir que una fórmula atómica $Rt_1 \dots t_n$ será forzada por la evaluación ε en el estadio s si sucede que en ese estadio *se sabe* que los objetos que ε asigne a los términos $t_1 \dots t_n$ están, por ese orden, en la relación correspondiente a R. En el caso de una negación, ésta será forzada por ε en el estadio s si sucede que la fórmula negada, esto es, β, no será forzada, es decir, *descubierta*, en ningún estadio posterior a s, ni lo ha sido tampoco, por supuesto, en el propio s. En otras palabras: que en s sabemos algo que nos indica que jamás encontraremos una demostración de la fórmula negada.

Si se trata de una conjunción, la cosa es muy sencilla: una conjunción es forzada en un estadio cuando los dos conyuntos son forzados en ese estadio. Y una disyunción, por su parte, requiere para ser forzada en un estadio que al menos uno de los dos disyuntos sea forzado en ese estadio. Es decir: que sólo podemos conocer, desde el punto de vista intuicionista, la verdad de una disyunción, si conocemos la verdad de uno de los dos disyuntos en concreto.

La definición del condicional implica que conocemos la verdad de una fórmula condicional desde el momento en que sabemos que, en cualquier estadio posterior en que consigamos demostrar el antecedente, adquiriremos de inmediato el conocimiento del consecuente.

Y para terminar, una cuantificación existencial resulta forzada, es decir, descubierta, o conocida, cuando hemos podido verificar una instancia particular suya, y por tanto estamos en condiciones de dar un ejemplo concreto; y una cuantificación universal resulta forzada, o conocida, cuando a su vez están forzadas todas sus posibles instancias.

Ésta es en esencia la definición de un modelo de Kripke. Utilizándola, es inmediato describir la *consecuencia lógica intuicionista* como la propiedad de aquellas inferencias en las cuales la conclusión resulta forzada en cualquier evaluación de Kripke en la que estén forzadas todas las premisas. Y se da el caso de que la relación de consecuencia así descrita viene a ser coextensa a su vez con la relación de deducibilidad en el cálculo intuicionista de predicados en cualquiera de sus versiones, como muestran las correspondientes pruebas de corrección y completud, que son bien conocidas (la segunda, con las salvedades técnicas habituales según se desarrolle ella misma en un contexto metateórico intuicionista o clásico).

También es fácil comprobar que el valor de una oración (es decir, "forzada" o "no forzada") en un estadio de un modelo de Kripke, es invariante con respecto a todas las evaluaciones basadas en ese modelo, y por lo tanto podemos definir directamente el *forzamiento* de una oración por un estadio de un modelo, como el forzamiento en ese estadio por cualquier evaluación basada en dicho modelo. Y de forma similar, describir la *consecuencia lógica intuicionista* para inferencias compuestas únicamente de oraciones, por referencia a un modelo de Kripke sin más.

3. Modelos de Kripke: discusión

Como acabamos de comprobar, la estructura de los modelos de Kripke es bastante cercana a la filosofía intuicionista de la matemática, y recoge no pocas de las claves de esta filosofía con respecto a su concepción del conocimiento matemático, y en particular a su modo de creación y crecimiento, según la teoría del sujeto creativo de Brouwer que está en el trasfondo de nuestra discusión. (Para un repaso de la posición intuicionista pueden consultarse "El intuicionismo de Brouwer", de Jesús Alcolea, en su libro *Logicismo, formalismo, intuicionismo*, pp. 111–146, y "Lógica intuicionista", de Alfonso García Suárez, en M. Garrido (ed.), *Lógica y lenguaje*, pp. 178–189.)

¿Qué nos impide entonces, en definitiva, considerar que la semántica de Kripke *es* la semántica sobrentendida o genuina de la lógica intuicionista? En otras palabras: ¿qué le falta a esta semántica para reflejar perfectamente lo que el matemático intuicionista tiene la intención de transmitir?

Para responder a esta pregunta vamos a comenzar razonando a través de un ejemplo. Consideremos la oración

$$\neg\,\forall x\,(\,P(x) \vee \neg P(x)\,)$$

donde P es un símbolo predicativo y x una variable cualquiera de $\mathcal{L}$. Esta oración sería inconsistente en lógica clásica, pero no lo es dentro del cálculo intuicionista, ya que en este cálculo la ley de tercio excluso no es válida, y por lo tanto la fórmula $P(x) \vee \neg P(x)$ no es un teorema del cálculo, ni tampoco su generalización universal.

Consecuentemente, la oración escogida es "satisfacible", es decir, "forzable" por un modelo de Kripke. En otras palabras: existe un modelo de Kripke en el cual la oración $\neg\,\forall x\,(\,P(x) \vee \neg P(x)\,)$ es forzada en un determinado estadio.

Y en realidad es muy fácil construir tal modelo: tomando como universo el conjunto N de los números naturales, y como conjunto de estadios una secuencia linear isomorfa a N:

$$\mathcal{S} = \{\, s_0, s_1, s_2, \ldots \} \qquad \text{donde } s_0 < s_1 < s_2 \ldots$$

ponemos, para cada estadio s_n,

$$P^{\,\mathfrak{K}}_{s_n} = \{\, 0, 1, 2, \ldots, \, n \,\}$$

Es decir: $P^{\,\mathfrak{K}}_{s_0} = \{\, 0 \,\}$, o lo que es lo mismo, en el estadio s_0 averiguamos que el 0 tiene la propiedad correspondiente a P; a continuación, $P^{\,\mathfrak{K}}_{s_1} = \{\, 0, 1 \,\}$, esto es, en el estadio s_1 averiguamos que también la tiene el 1; y así sucesivamente. Al modelo de Kripke definido de esta manera lo llamaremos "$\mathfrak{J}$".

El resultado es el siguiente. Tomemos un $n \in N$ cualquiera, y una evaluación ε basada en este modelo, que asigne a la variable x el valor $n+1$. Naturalmente, $n+1 \notin P^{\,\mathfrak{K}}_{s_n}$, y por lo tanto la fórmula $P(x)$ no será forzada en el estadio s_n:

$$\varepsilon \nVdash_{s_n} P(x)$$

Por otra parte, como $P(x)$ sí será forzada en el estadio siguiente, $n+1$, tenemos

$$\varepsilon \nVdash_{s_n} \neg P(x)$$

Y en definitiva,

$$\varepsilon \nVdash_{s_n} P(x) \vee \neg P(x)$$

de lo cual se sigue de inmediato que

$$\varepsilon \nVdash_{s_n} \forall x\, (\, P(x) \vee \neg P(x)\,)$$

Más en general, para cualquier estadio $s_m \in \mathcal{S}$, se puede repetir punto por punto el razonamiento tomando la evaluación $\varepsilon[x/m+1]$, y obteniendo así:

$$\varepsilon[x/m+1] \nVdash_{s_m} P(x) \vee \neg P(x)$$

Y por consiguiente

$$\varepsilon \nVdash_{s_m} \forall x\, (\, P(x) \vee \neg P(x)\,)$$

para cualquier $s_m \in \mathcal{S}$

Lo cual demuestra a su vez

$$\varepsilon \Vdash_{s_m} \neg \forall x\, (\, P(x) \vee \neg P(x)\,)$$

para cualquier $s_m \in \mathcal{S}$. Es decir: la fórmula $\neg \forall x\, (\, P(x) \vee \neg P(x)\,)$ es forzada por la evaluación ε en *todos* sus estadios. Y como esta fórmula es una oración, podemos omitir la referencia a la evaluación, y considerar directamente que la oración es forzada en todos sus estadios por el modelo $\mathfrak{J}$ sin más.

Este sencillo argumento muestra que la oración escogida es forzable por la semántica de Kripke, y por lo tanto es consistente en el cálculo intuicionista de predicados, teniendo en cuenta la adecuación existente entre dicha semántica y el mencionado cálculo. La sencillez del argumento es una buena ilustración de las cualidades que posee la semántica de Kripke desde el punto de vista técnico, es decir, como instrumento metateórico para explorar propiedades del cálculo, como en este caso la consistencia (o lo que es lo mismo, la inderivabilidad de una contradicción desde la oración en cuestión).

Pero esa misma sencillez ilustra también las desventajas que posee esta semántica en cuanto a ser considerada la interpretación genuina de la lógica intuicionista. Porque, después de describir en todos sus detalles un modelo donde la oración escogida resulta forzable (satisfacible), nos deja sin tener ni idea de lo que esa oración significa o puede significar.

En particular, el modelo no asigna ningún significado específico al símbolo predicativo P. Ha de ser un predicado numérico, puesto que el universo del modelo es el conjunto de los números naturales. Pero el modelo $\mathfrak{J}$, no da ninguna pista acerca de qué predicado numérico es, ni de cómo construirlo, ni siquiera de que tenga que existir necesariamente un predicado con esas características.

Todo lo que el modelo da, son, por así decirlo, ciertas condiciones “externas” en las cuales podría transcurrir la investigación matemática acerca de ese predicado, con la consecuencia de que la oración en cuestión resultase forzada, a saber: que primero se descubriese que vale del 0, después del 1, y así sucesivamente en estadios discretos contiguos. Esta situación, además de irreal o poco creíble, es totalmente ajena a la determinación del contenido del predicado en cuestión.

En general, si repasamos las cláusulas de la definición de Kripke, encontramos en varias de ellas este mismo carácter “externo”: parecen expresar *consecuencias* del significado de las distintas constantes lógicas, más que dicho significado propiamente. Así, la cláusula para la negación nos viene a decir que al demostrar $\neg\beta$ adquirimos la certeza de que nunca en el futuro demostraremos β, lo cual es correcto. Pero seguramente el significado intuicionista de $\neg\beta$ es algo más concreto que la idea de que β *nunca será demostrada*; y la idea de que β nunca será demostrada deberá deducirse, a su vez, de dicho significado.

Exactamente lo mismo pasa con las cláusulas para $\rightarrow$ y $\forall$. La cláusula para el condicional nos indica que el conocimiento (o descubrimiento) de $\beta \rightarrow \gamma$ equivale a la certeza de que si en el futuro conseguimos descubrir o verificar β, adquiriremos automáticamente el conocimiento de γ. Pero esta “certeza” tendrá que cifrarse en algo concreto, en algún tipo de relación descubierta entre β y γ (o entre nuestro conocimiento de una y otra), y seguramente será esa relación la que tenga como *consecuencia* el que, en cualquier estadio en que hayamos verificado β y $\beta \rightarrow \gamma$, estemos en condiciones de verificar inmediatamente γ.

Y nótese que decimos aquí, “estemos en condiciones de verificar γ”, porque tampoco es aceptable, como se infiere de la cláusula, que el conocimiento de β y de $\beta \rightarrow \gamma$ produzca en nosotros un conocimiento instantáneo o automático de γ. Ello nos comprometería con una omnisciencia lógica, que es inadmisible desde el punto de vista intuicionista, igual que desde el punto de vista clásico. Una vez verificadas β y $\beta \rightarrow \gamma$, el matemático intuicionista tendrá que percatarse de la relación existente entre ambas (lo que puede no ser tan fácil, si β y γ son suficientemente complicadas, y hay muchos otros enunciados involucrados), efectuar la deducción correspondiente por modus ponens, y sólo entonces estará en condiciones de aseverar fundadamente γ. Es justo esa relación entre β y $\beta \rightarrow \gamma$, de la que el matemático tiene que percatarse (y que le permitirá efectuar la deducción por modus ponens), la que tiene que ser descrita y clarificada, cosa que la semántica de Kripke no hace.

Otro tanto cabe decir, mutatis mutandis, con respecto a $\forall$, mientras que la situación es muy distinta, por su parte, por lo toca al resto de operadores lógicos: $\wedge$, $\vee$ y $\exists$. En efecto, las cláusulas de éstos últimos se encuentran exentas de los defectos que acabamos de mencionar, y de hecho resultan ser estructuralmente similares a las de interpretaciones genuinas, como vamos a comprobar enseguida. Pero eso es algo que, en cualquier caso, no basta para salvar a la interpretación de Kripke en su conjunto con respecto a los objetivos que estamos considerando aquí.

En definitiva, y para decirlo con palabras de Kreisel, que es uno de los mayores expertos y contribuidores al intuicionismo,

> “La interpretación de Kripke no se considera una explicación o “reducción”, sino la expresión de propiedades de estas operaciones lógicas, obtenidas como consecuencia de una reflexión acerca de su significado.” (Kreisel (1971, p. 146).)

Y esencialmente el mismo punto de vista se expresa en los manuales de referencia, como en el de Dummett, todo un clásico, recientemente reeditado, *Elements of Intuitionism* (2000, pp. 277–287), y en la abultada obra de Troelstra y van Dalen, *Constructivism in Mathematics: An Introduction* (1988, vol. 1, p. 75).

Lo que nos queda por tanto a partir de ahora, es ocuparnos de aquellos otros intentos efectuados de analizar de una forma precisa y sistemática la interpretación sobrentendida de la lógica intuicionista, es decir: de aquellos desarrollos teóricos que han tratado de estructurar la semántica de la lógica intuicionista de predicados, fijándose como primordial objetivo el reflejar fielmente las intenciones de los matemáticos intuicionistas en el uso de dicha lógica.

Como ya dije al principio, todos estos intentos son en alguna medida infructuosos, porque ninguno de ellos ha dado lugar hasta la fecha a una formulación que sea totalmente satisfactoria. Se trata por consiguiente de examinar las principales alternativas existentes, evaluando sus ventajas e inconvenientes, y las implicaciones filosóficas de las diferencias existentes entre ellas.

Para agilizar la discusión y hacerla menos engorrosa, y más fácilmente comprensible, vamos a adoptar en lo sucesivo un estilo de exposición más libre, analizando la interpretación de los enunciados intuicionistas directamente, sin especificar antes un lenguaje formal. Ello nos permitirá centrar mejor la atención en la sustancia de los problemas con los que nos vamos a enfrentar, y en cualquier caso, la manera de adaptar cualquiera de las formulaciones que veremos aquí a la interpretación de un lenguaje formal específico (como el definido en el apartado 2 de este Curso) es casi inmediata, y no ofrece ninguna dificultad importante, fuera de los propios problemas filosóficos que protagonizarán nuestra discusión.

4. La interpretación de Heyting

La interpretación de la lógica intuicionista que se suele denominar “interpretación de Heyting”, fue formulada por primera vez, de forma esencialmente independiente, por Heyting (1930), (1931, pp. 58–61), (1934, pp. 16–17, 21), (1956, pp. 97–102), Kolmogorov (1932) y Gentzen (1935, pp. 76–80). Hay algunas diferencias entre las versiones presentadas por cada uno, cuyos detalles y consecuencias exploro en mi artículo “Kolmogorov, Heyting and Gentzen on the intuitionistic logical constants” (“Las constantes lógicas intuicionistas según Kolmogorov, Heyting y Gentzen”, 2001), pero a nosotros no nos tienen que preocupar aquí, al menos de momento.

A su vez, todas estas versiones están inspiradas de una manera u otra en la obra de Brouwer, el fundador del intuicionismo y el principal creador (y primer usuario notable) de las constantes lógicas intuicionistas. El propio Brouwer, sin embargo, nunca se ocupó de elaborar un análisis sistemático acerca de su singular uso de las constantes lógicas, limitándose a comentarios esporádicos y a las explicaciones que acompañan las pruebas donde éstas son por él utilizadas. Para una visión de conjunto de la concepción de Brouwer sobre este particular, se puede consultar mi artículo “Brouwer’s understanding of the logical constants” (“La concepción de Brouwer de las constantes lógicas”, 2000).

La interpretación de Heyting toma como noción semántica básica la noción de *prueba*, que actúa como eje central de la definición. Así, el significado de un enunciado complejo se expresa especificando en qué consiste una *prueba* del enunciado en cuestión, en términos de *pruebas* de enunciados lógicamente más sencillos que ése. La estructura inductiva es ciertamente semejante a la de la definición semántica de Tarski, sólo que allí la noción central es la noción de *verdad*. Por esto mismo, igual que la semántica de Tarski, a la par que una interpretación de la lógica clásica, constituye también una definición de la noción (clásica) de *verdad*, aquí resultará a su vez definida la noción de *prueba*, o mejor dicho: la noción de *prueba matemática intuicionista*.

La siguiente presentación está tomada, con pequeñas modificaciones, del ya citado manual de Troelstra y van Dalen (1988, vol. 1, pp. 9-10). En la cláusula 4, el enunciado $\perp$ es cualquier enunciado absurdo, escogido al efecto de entre los enunciados atómicos del lenguaje en cuestión, y cuya prueba resulte obviamente imposible, como por ejemplo, en su caso, "$0 = 1$":

1. Una prueba de $A \wedge B$ es una prueba de A más una prueba de B.
2. Una prueba de $A \vee B$ es o bien una prueba de A o bien una prueba de B.
3. Una prueba de $A \rightarrow B$ es una construcción que, al ser aplicada a cualquier prueba de A, da como resultado una prueba de B.
4. Una prueba de $\neg A$ es una construcción que, si fuera aplicada a cualquier (hipotética) prueba de A, daría como resultado una prueba de $\perp$.
5. Una prueba de $\exists x A(x)$ consiste en la especificación de una construcción u del universo de interpretación, más una prueba de $A(u)$.
6. Una prueba de $\forall x A(x)$ es una construcción que, al ser aplicada a cualquier individuo (construcción) u del universo de interpretación, nos da como resultado una prueba de $A(u)$.

Las virtudes de esta interpretación residen en tres puntos básicos, que son los siguientes: primero, la simplicidad de las cláusulas, que utilizan conceptos muy elementales, combinados de una forma simple y natural; segundo, su "carácter inductivo", es decir: el hecho de que la prueba de cada enunciado complejo se defina en términos de pruebas de enunciados lógicamente más simples que él, lo que hace que la interpretación proporcione una elucidación progresiva del concepto de *prueba*, desde los enunciados lógicamente más sencillos hasta los más complejos. Y tercero, el hecho de que las diferencias entre las constantes lógicas intuicionistas y sus contrapartidas clásicas estén muy claramente representadas por lo que dicen las cláusulas; así por ejemplo, tomando el caso de la disyunción, en matemática clásica sucede *con frecuencia* que la prueba de un enunciado $A \vee B$ procede de manera indirecta, sin establecer cuál de los dos es el caso, y por consiguiente sin probar ni A ni B en concreto, cosa que de acuerdo con la cláusula 2 resulta claramente imposible dentro de la matemática intuicionista.

La elección del concepto de *prueba* (*verificación* o *justificación* en matemáticas), como eje central de la definición semántica intuicionista, es muy antigua y está muy arraigada, como también lo está la idea de que la estructura de la definición debe ser inductiva:

> "El significado de cada constante [lógica] se debe dar especificando, para una oración cualquiera en la que esa constante funcione como operador principal, en qué consiste una prueba de dicha oración, y ello asumiendo de antemano que ya sabemos en qué consisten las pruebas de sus oraciones constituyentes

[oraciones lógicamente más simples que la oración en cuestión].” (Dummett (2000, p. 8).)

Y en un sentido similar se manifiestan Heyting (1956, p. 97), Kreisel (1962, p. 201), y de una forma algo más vaga el propio Brouwer (1981, pp. 90–92). De ahí el nombre de “semántica verificacionista”, con el que se identifica habitualmente a este tipo de interpretación, incluso cuando se aplica fuera del contexto del intuicionismo y de la filosofía de la matemática (y en particular, como base de un proyecto general de semántica antirrealista para los lenguajes naturales).

Y es que, en efecto, la elección del concepto de *prueba* como eje central de este tipo de interpretación es particularmente acertada, porque de acuerdo con la filosofía intuicionista de la matemática, los objetos matemáticos no poseen una existencia independiente, sino que son meras construcciones de la mente humana: el universo matemático se va cimentando sobre el continuo esfuerzo creador del matemático, o de la comunidad matemática. De ahí también que el enfoque esté dirigido principalmente hacia el sujeto de conocimiento y hacia su actividad creadora, que consiste en el diseño de construcciones matemáticas y en el establecimiento de resultados acerca de esas construcciones. Y en consecuencia, lo adecuado que resulta la noción de *prueba*, que se refiere al resultado exitoso de una acción humana, frente al carácter descriptivo, impersonal y atemporal de la noción de *verdad*.

Claro que también podríamos utilizar el predicado “verdad” en el sentido intuicionista, como se hace de hecho con cierta frecuencia dentro de esta escuela, de forma que “verdadero” equivaliese a “verdadero desde el punto de vista intuicionista”, o lo que es lo mismo, “probado por medios constructivo-intuicionistas”. Pero si redactásemos la definición en esos términos, ésta perdería gran parte de su poder explicativo, además de convertirse en incomprensible para un matemático clásico no introducido previamente al constructivismo.

Hay que tener en cuenta el contexto filosófico en el que se encuadra nuestro problema: la filosofía intuicionista es un punto de vista minoritario, y si quiere hacer valer sus argumentos tendrá que esforzarse en presentarlos de la forma más transparente posible al no iniciado, es decir, a aquel que aún no ha sido convencido por ellos. Y no cabe duda que la explicación semántica del uso de las constantes lógicas constituye una ocasión decisiva donde las haya para concentrar dicho esfuerzo.

Por consiguiente, lo que se requiere de la definición es que en ella se enuncien los aspectos más importantes del uso intuicionista de las constantes lógicas, sirviendo como *elucidación* de dicho uso, es decir, como descripción explícita de la habilidad que consiste en usar correctamente estas constantes lógicas con sus peculiaridades características. Y es para esa descripción que el concepto de *verdad* resulta muy poco adecuado, mientras que sí lo es el de *prueba*, aunque éste tampoco haya de ser necesariamente, como vamos a ver, el único posible.

Por lo demás, el concepto de *prueba* y la definición que lo caracteriza, descansan a su vez sobre un concepto mucho más básico, que es el de *construcción matemática*, el concepto primitivo por excelencia en la matemática intuicionista. Sin entrar en explicaciones prolijas, que corresponderían más bien a una introducción general al intuicionismo, baste decir que este concepto va a ligado a objetos, a procedimientos e incluso a argumentos: así, a los números naturales se les asocia con una intuición básica, como por ejemplo, la de colocar sucesivamente cerillas alineadas; las operaciones con ellos se definen como manipulaciones sobre esas construcciones iniciales, y los argumentos (o pruebas) sobre esas operaciones, se definen a su vez como cadenas de manipulaciones, más o menos complejas, sobre las anteriores, que hagan evidente o reconocible un cierto resultado.

5. La decidibilidad de la relación de prueba

Georg Kreisel (1961, p. 107, nota al pie), (1962, p. 205), (1965, p. 128), fue el primero en notar que las cláusulas de las definiciones de $\rightarrow$, $\neg$ y $\forall$ tenían la desagradable consecuencia de que, de acuerdo con ellas, una construcción podía ser la prueba de un determinado enunciado sin que nosotros tuviéramos medios para reconocerlo así. Es decir: que a consecuencia de estas tres cláusulas, la relación de *prueba* caracterizada por la definición se convertía en una relación *no decidible.*

En efecto, supongamos que estamos tratando de probar constructivamente un enunciado de la forma $\forall x A(x)$, y que en un momento dado conseguimos diseñar una construcción c que, al menos en principio, *parece* transformar cualquier individuo u del universo en una prueba del enunciado $A(u)$. Si el universo es infinito, no podremos recorrerlo exhaustivamente para saber si nuestra construcción "funciona", en efecto, en todos los casos, esto es, para todos los individuos del universo. Y si a primera vista no es evidente que nuestra construcción "funcione" (ni tampoco lo contrario, es decir, que falle para algún individuo del universo), pues entonces tendremos que buscar una prueba adicional que establezca que la construcción c transforma, en efecto, *cualquier* individuo u del universo en una prueba de $A(u)$.

Suponiendo que finalmente elaboremos dicha prueba adicional, nos encontraremos con que hemos fabricado dos objetos, dispares entre sí: la construcción original que parecía transformar cualquier individuo u del universo en una prueba de $A(u)$, y la prueba supletoria obtenida después, que nos garantiza que, en efecto, la construcción previa transformará cualquier objeto u del universo en una prueba de $A(u)$, tal y como habíamos sospechado.

Esta dicotomía entre la construcción original y la prueba de que tal construcción "funciona", tiene un carácter muy general, y va anexa a cualquier procedimiento de computación diseñado con un determinado fin, siempre que no resulte evidente que el procedimiento es "correcto", es decir: siempre que no resulte evidente que el resultado de aplicar el procedimiento es en todos los casos el resultado deseado.

Por poner un ejemplo muy sencillo, podemos tomar la construcción euclídea para encontrar, dado un natural cualquiera n, un primo mayor:

- *Calcular el menor divisor propio del número* $n! + 1$.

En otras palabras: calcular el menor divisor de $n! + 1$ distinto de 1.

En este caso es bastante obvio que nuestra construcción, en efecto, funciona siempre: el resultado obtenido, digamos p, ha de ser primo, ya que si no lo fuese, tendría divisores propios, que también serían divisores de $n! + 1$, y p ya no sería el menor de ellos; y ha de ser mayor que n, pues de lo contrario $\frac{n!}{p}$ sería entero, y también habría de serlo $\frac{1}{p}$, lo cual es imposible dado que $p > 1$.

Por especialización obtenemos un ejemplo algo más complejo: una construcción para encontrar, dado un entero positivo n, un primo mayor que n que sea de la forma $4m - 1$:

- *Calcular el menor divisor de* $4n! - 1$ *que sea a su vez de la forma* $4m - 1$ *para algún entero positivo* m.

Aquí la tarea de verificación de que la construcción propuesta funciona siempre, sin llegar a ser en absoluto difícil, no es tampoco enteramente obvia, y requiere un razonamiento adicional bien distinto de la construcción en sí misma. Así se verá en la sección de Problemas, en la que dicha verificación es precisamente uno de los ejercicios propuestos.

Ahora bien, antes de continuar tenemos que hacernos una pregunta crucial en este punto: ¿por qué es tan importante que la relación de *prueba* resultante de la definición, sea decidible? Y la respuesta se basa esencialmente en dos razones: la primera es que parece exigido por la propia acepción intuitiva de este término ("prueba"), al menos en su uso más natural y extendido. En efecto, resulta muy extraño considerar que una construcción c pueda ser la *prueba* de un determinado enunciado sin que nosotros estemos en condiciones de decidir si lo es o no, y no porque c sea particularmente compleja o engorrosa, sino porque se necesite una prueba adicional (que puede requerir ingenio, y ser muy difícil de obtener), para establecer que c era, al fin y al cabo, una prueba del enunciado en cuestión.

Esto es algo inherente al concepto de *prueba* sin más, al margen de las distinciones entre la validez de las pruebas desde un punta de vista intuicionista o clásico, es decir, al margen de la distinción entre pruebas intuicionistas y pruebas clásicas en general. En cualquiera de los dos casos, la acepción intuitiva del término connota el que la prueba incluya todos los ingredientes necesarios para garantizar la validez del resultado obtenido, de forma que si a la prueba le falta un hueco por llenar, un paso esencial para la estructura de la misma y no trivial, entonces consideramos sencillamente que la prueba en tal situación está "incompleta", y que sólo se completará cuando se le adjunte el razonamiento correspondiente a dicho paso o hueco.

Y por otra parte, hay una segunda razón para desear que el concepto de *prueba* resultante de la definición sea decidible, y es que, a fin de cuentas, se trata del eje central de la definición semántica básica del intuicionismo, y dadas las características de esta filosofía de la matemática, con su énfasis en la actividad creadora de la comunidad matemática, y en que las entidades matemáticas, como he explicado antes, son simples productos de esa actividad, y no poseen existencia independiente, parece, en consecuencia, poco apropiado que en ese lugar tan importante y fundamental se halle un concepto indecidible.

En resumidas cuentas, lo que sucede es que si aceptamos la interpretación de Heyting, entonces tendremos que asumir la posibilidad de que una construcción c sea la prueba de un enunciado matemático (y al mismo tiempo, la materialización de su significado intuicionista), sin que nosotros estemos en condiciones de determinar si efectivamente es ése el caso o no.

En realidad, para ser exactos, mientras nosotros no podamos determinar si ése es el caso o no, tampoco podemos suponer que lo sea o no lo sea en abstracto, ya que dicha suposición se apoya implícitamente en la ley de tercio excluso, y es un ejemplo de platonismo, y por tanto contraria al espíritu intuicionista. Pero si en algún momento conseguimos demostrar que sí lo es, entonces tendremos que separar inmediatamente a

c de esa demostración, y considerar que c y sólo c es la prueba (y la materialización del significado) del enunciado en cuestión.

6. La interpretación de Kreisel

Kreisel, para evitar todo esto (y principalmente por la primera de estas razones, cf. (1965, p. 124)), propuso que el requerimiento de la prueba adicional fuera incorporado a la formulación de las cláusulas. Así, en el caso de la cuantificación universal, la cláusula quedaría:

- Una prueba de $\forall x A(x)$ es un par de construcciones (c_1, c_2), tales que: c_2, al ser aplicada a cualquier individuo u del universo, nos da como resultado una prueba de $A(u)$; y c_1 es a su vez es una prueba de que c_2 tiene en efecto esa propiedad.

O dicho de otro modo:

- Una prueba de $\forall x A(x)$ es un par de construcciones (c_1, c_2), donde c_1 es una prueba de que, al aplicar c_2 a cualquier individuo u del universo, se obtiene como resultado una prueba de $A(u)$.

La diferencia entre esta formulación y la formulación de Heyting estriba en que si, por ejemplo, hemos diseñado una construcción c que *parece* transformar cualquier individuo u del universo en una prueba de $A(u)$, pero somos incapaces de demostrar este hecho, entonces podemos concluir inmediatamente que *no tenemos*, de acuerdo con la interpretación de Kreisel, una prueba de $\forall x A(x)$. Sólo cuando encontremos dicha demostración adicional tendremos, según la interpretación de Kreisel, la prueba completa de $\forall x A(x)$, en la cual la demostración en cuestión actuará como primer componente.

De esta manera, según vemos, al exigir a la noción de *prueba intuicionista* este requisito adicional, conseguimos que la noción definida (que resulta ser más estricta o restrictiva) sí sea decidible, por oposición a la noción resultante de la interpretación de Heyting, que no lo era.

Y exactamente por las mismas razones (y con las mismas consecuencias), Kreisel propuso modificar también las cláusulas definitorias del condicional y de la negación, de forma que quedaran como sigue:

- Una prueba de $A \rightarrow B$ es un par de construcciones (c_1, c_2), donde c_1 es una prueba de que al aplicar c_2 a cualquier prueba de A, se obtiene como resultado una prueba de B.

- Una prueba de $\neg A$ es un par de construcciones (c_1, c_2), donde c_1 es una prueba de que si c_2 fuera aplicada a cualquier (hipotética) prueba de A, obtendríamos como resultado una prueba del enunciado absurdo escogido, $\perp$.

(cf. Kreisel (1962, p. 205)).

Por desgracia, sin embargo, la interpretación de Kreisel tiene un efecto negativo de extraordinaria importancia, y es que se pierde el "carácter inductivo" de las cláusulas en cuestión. Por ejemplo, volviendo al caso de la cuantificación universal, la interpretación de

Heyting define "prueba de $\forall x A(x)$" simplemente en términos de "pruebas de $A(u)$" para cada individuo u perteneciente al universo, mientras que la interpretación de Kreisel apela además a una "prueba de que cierta construcción c_2, al ser aplicada a cualquier individuo u del universo, da como resultado una prueba de $A(u)$". Este último es un hecho de carácter mucho más general, que no se reduce en absoluto a pruebas de enunciados lógicamente más sencillos que $\forall x A(x)$.

A consecuencia de esto, la interpretación de Kreisel no puede ser considerada como una definición inductiva del concepto de "prueba intuicionista", y ello hace que su capacidad como elucidación del significado intuicionista de las constantes lógicas sea mucho más pobre.

En efecto, para llegar a entender la interpretación de Heyting se requiere una comprensión del caso de los enunciados atómicos (que todavía no hemos descrito, pero que es muy sencillo), y a continuación, una comprensión "inductiva" de cada cláusula, es decir: suponiendo que sabemos lo que significa el concepto de *prueba* aplicado a enunciados de cierta complejidad, se describe en qué consiste la aplicación del concepto a enunciados más complejos, desglosada a su vez en términos de los primeros.

Sí que es cierto que las constantes lógicas usadas en el *explanans* de las cláusulas, destinadas, en la interpretación de un lenguaje formal, a aparecer en el metalenguaje, han de ser ya las constantes lógicas intuicionistas, por que si fueran las clásicas, en particular en el caso de los cuantificadores, la interpretación no sería válida; y en este sentido la interpretación de Heyting exige cierta comprensión previa de los mismos operadores que intenta explicar. Pero el concepto definido que actúa como eje de la definición, en este caso el concepto de "prueba", está sujeto estrictamente a la estructura inductiva de la misma.

Exactamente lo mismo pasa con la definición semántica de Tarski, que exige una comprensión previa de las constantes lógicas en el metalenguaje, esta vez en su sentido clásico, pero en la cual el concepto central definido ("verdad" o "satisfacción" en el lenguaje objeto) es sometido a su vez a una definición inductiva rigurosa.

Y eso es justo lo que se pierde en la interpretación de Kreisel. Su noción central sigue siendo la de "prueba intuicionista", esta vez sujeta a ciertas restricciones adicionales que la convierten en un concepto decidible, pero precisamente por culpa de esas restricciones, el concepto no es definido inductivamente por la interpretación, sino que se requiere una comprensión previa de dicho concepto en todo su alcance y extensión. Por lo tanto, se incumple el segundo punto que Dummett pedía en la cita que de él hacíamos, en el apartado 4 de este Curso (p. 13), y que era precisamente que la definición semántica de las constantes lógicas revistiese un carácter *inductivo*.

Éste fue, de hecho, el principal motivo por el que la interpretación de Kreisel, que inicialmente había sido aceptada por la mayor parte de los autores (cf. por ejemplo Troelstra (1969, p. 5), (1977, p. 977), van Dalen (1973, p. 24) o Dummett (1977, p. 399)), fuese objeto de discusiones (Scott (1970, pp. 261-262), Prawitz (1977, p. 27), Sundholm (1983, pp. 153–161) y Weinstein (1983, pp. 263–266), entre otros), y finalmente rechazada por muchos, incluyendo a varios de los que al principio la habían aceptado (cf. van Dalen (1983, p. 166), (1986, p. 231), Troelstra y van Dalen (1988, vol. 1, pp. 9–10)), Dummett (2000, pp. 273–274):

> "Debe señalarse, sin embargo, que la decidibilidad de la relación de prueba

> ha sido criticada, y que las cláusulas adicionales [de Kreisel] no son aceptadas universalmente.” (van Dalen (1986, pp. 232).)

Un detalle curioso en este punto, es que Troelstra introdujo primero la abreviatura “BHK” para denotar la interpretación sobreentendida de las constantes lógicas “según Brouwer, Heyting y Kreisel”, en un momento en que consideraba la contribución de Kreisel como una mejora neta sobre la interpretación de Heyting (cf. Troelstra (1977, p. 977), (1981, pp. 209–210)). Y después de eliminar las cláusulas adicionales de Kreisel y recuperar la interpretación original de Heyting tal cual, ha seguido usando exactamente la misma abreviatura (“BHK”), pero esta vez para referirse a “Brouwer, Heyting y Kolmogorov” (el último de los cuales, como hemos dicho, contribuyó también a formular esa definición, cf. una vez más Troelstra y van Dalen (1988, vol. 1, pp. 10 y 31–32)).

Yo por mi parte, en el contexto de este agitado debate, propongo en mi artículo “Five observations concerning the intended meaning of the intuitionistic logical constants” (“Cinco observaciones acerca del significado genuino de las constantes lógicas intuicionistas”, 2000a, cf. en esp. pp. 413–414), una solución que consiste hasta cierto punto en un acercamiento entre ambas interpretaciones. Se trata de reemplazar, dentro de la interpretación de Heyting, el concepto de *prueba* por otro distinto, que conserve su impronta constructiva u operacional, pero que no posea una connotación de decidibilidad.

Así, si utilizamos por ejemplo el concepto de *efectuación* (en inglés, *“performance”*), que es el que yo sugiero, la cláusula del universal nos quedaría:

- Una construcción c *efectúa* el enunciado $\forall x A(x)$ si sucede que, al ser aplicada a cualquier individuo u del universo, nos da como resultado una *efectuación* de $A(u)$.

Con lo cual sería posible, en principio, que una construcción efectuase $\forall x A(x)$ sin que nosotros lo detectásemos, pero ello no supone en este caso paradoja alguna. Y una modificación similar se aplicaría al resto de cláusulas de la definición, resultando lo que yo llamo en el mencionado artículo, *“interpretación operacional”*.

De este modo estableceríamos una clara distinción entre la construcción que *efectúa* un enunciado (es decir: la construcción que materializa el contenido constructivo-intuicionista básico que expresa dicho enunciado), y cualquier *prueba* que se pueda suministrar, de que verdaderamente dicha construcción efectúa el enunciado en cuestión.

Además, por razones que exceden al alcance de este Curso, propongo una modificación de la interpretación de Kreisel sobre la base de la interpretación operacional, de modo que el requisito adicional de la cláusula extraordinaria no sea exigido cláusula por cláusula (lo cual es en cierto modo redundante, como argumento allí, cf. op. cit., pp. 414–415), sino que consista simplemente en:

- una prueba de un enunciado A es un par de construcciones (c_1, c_2), donde c_1 es una prueba de que c_2 *efectúa* el enunciado A.

De este modo quedaría más clara la relación entre la interpretación de Heyting, inductiva pero no decidible, y cuyo concepto central es reemplazado, en la versión “operacional”, por el de *efectuación*, y la interpretación de Kreisel, decidible pero no inductiva, cuyo concepto central sí es el de *prueba intuicionista*, pero que tiene a la base esa misma definición operacional.

En fin, estas son ya cuestiones demasiado verdes todavía para una discusión en profundidad al nivel al que nos movemos en el presente Curso.

7. Los enunciados atómicos

Un aspecto que llevamos pendiente de las secciones anteriores es la interpretación de los enunciados atómicos. Si no la hemos tocado antes ha sido por conveniencia, pues ahora que comprendemos bien en qué consisten las interpretaciones de Heyting y Kreisel, es cuando estamos realmente en condiciones de entender cómo se ajusta el tratamiento de este tipo de enunciados a una y a otra.

La razón de que la interpretación de los enunciados atómicos no plantee grandes problemas se debe a las fuertes restricciones que el intuicionismo impone a la introducción de propiedades, relaciones y funciones básicas. No olvidemos que esta escuela adopta una perspectiva estrictamente intensional, y por lo tanto la definición de propiedades, relaciones y funciones tiene que señalar forzosamente un *contenido*, sujeto a determinadas especificaciones.

En particular, cualquier propiedad básica P ha de venir definida de tal modo que podamos reconocer, dado un individuo cualquiera u del universo, y una construcción c, si c es o no una prueba *canónica* de que u posee la propiedad P, es decir: si c es o no una prueba canónica del enunciado atómico $P(u)$. O dicho de otro modo: la definición de P debe proporcionarnos un procedimiento de decisión que, aplicado a cualquier individuo u del universo y construcción c, determine si c es o no una prueba canónica de $P(u)$. Y algo similar ocurre con las relaciones y con las funciones.

Decimos "prueba canónica", porque la especificación del significado de P se referirá exclusivamente al tipo de prueba más sencillo posible que quepa hacer de los enunciados atómicos en los que P intervenga. Es decir: el tipo de prueba que se ajuste más estrictamente al significado constructivo esencial de P. Después, es de suponer que habrá también pruebas indirectas, consistentes en argumentos más elaborados o complejos, que nos convenzan de que el enunciado en cuestión es correcto, es decir, aceptable desde el punto de vista intuicionista. Pero al significado básico de P no se le puede pedir que anticipe este tipo de pruebas.

Así por ejemplo, mientras una prueba canónica de

$$2 \cdot (3 + 4) \;=\; (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4)$$

consistirá en la realización completa de las operaciones indicadas y la comparación de los resultados, cosa que vendrá exigida por las definiciones básicas, puramente computacionales, de suma, producto, e igualdad entre naturales, el mismo enunciado admite también una prueba indirecta evidente, que es la que procede estableciendo primero en general la propiedad distributiva.

De este modo, tomando por ejemplo la interpretación de Heyting, la cláusula correspondiente a un enunciado atómico A dirá que una prueba de A es cualquier procedimiento efectivo para encontrar una prueba *canónica* de A, donde la determinación de qué sea una prueba *canónica* de A debe venir dada por la especificación del significado intuicionista de las propiedades, relaciones y funciones básicas que intervengan en A.

Y en cuanto a la interpretación de Kreisel, de acuerdo con el espíritu de ésta, si tenemos un procedimiento efectivo para encontrar una prueba canónica, pero no es evidente que la ejecución completa del procedimiento resulte en efecto en la obtención de dicha prueba, habrá que exigir también una prueba adicional que certifique que verdaderamente es así. Este requisito no es necesario, como acabamos de ver, para la interpretación de Heyting, por no resultar acorde con el resto de cláusulas de ésta.

En el caso del enunciado atómico "$2 \cdot (3+4) = (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4)$", al que nos acabamos de referir, la prueba indirecta que procede a partir de una prueba general de la propiedad distributiva de $\cdot$ respecto de $+$, vendría a funcionar precisamente como el argumento que nos garantiza que al efectuar completamente las operaciones indicadas, obtendremos el mismo resultado en uno y otro miembro. Es decir: el procedimiento efectivo para encontrar la prueba canónica consiste en llevar a cabo hasta el final dichas operaciones, y el argumento suministrado por la prueba indirecta, la de la propiedad distributiva, nos garantiza que siguiendo este procedimiento encontraremos en efecto la prueba canónica que buscamos, porque los resultados obtenidos en ambos casos coincidirán.

Ni qué decir tiene que para números suficientemente grandes (o, en general, entidades u operaciones suficientemente complejas), este tipo de razonamiento indirecto será el único viable en la práctica, es decir, el único que tengamos de hecho a nuestro alcance.

8. Pruebas canónicas

Por otra parte, si examinamos ahora el caso de las disyunciones y los enunciados existenciales, nos daremos cuenta de que en realidad se hallan en una situación muy parecida a la de los enunciados atómicos con respecto a este último punto que acabamos de tratar. En concreto, la prueba de una disyunción $A \vee B$ puede no consistir directamente en la producción de una prueba de A o de una prueba de B, sino tan sólo en la elaboración de un procedimiento efectivo para encontrar una de las dos. Y del mismo modo, la prueba de una cuantificación existencial $\exists x A(x)$ puede no consistir directamente en la producción de un elemento del universo que instancie la cuantificación, sino sólo en la producción de un procedimiento efectivo para encontrar uno.

El propio Brouwer era ya plenamente consciente de esta posibilidad:

> "El caso en que no se ha probado ni que A sea verdadero ni que sea absurdo, pero en que conocemos un algoritmo finito que conduce o bien al enunciado de que A es verdadero o bien al de que A es absurdo, es reducible obviamente a los dos primeros casos" (Brouwer, (1981, p. 92, nota al pie).)

Esto parece sugerir que la noción de *prueba canónica* sea aplicada también al resto de las cláusulas, obteniéndose así mediante las definiciones correspondientes, no el concepto de *prueba* sin más, sino sólo el de *prueba canónica*.

Si tomamos como base la interpretación de Heyting, obtendríamos, por ejemplo:

- Una prueba canónica de $A \wedge B$ es una prueba canónica de A más una prueba canónica de B;
- Una prueba canónica de $A \to B$ es una construcción que, al ser aplicada a cualquier prueba canónica de A, da como resultado una prueba canónica de B;

etcétera.

Y si tomamos como base la interpretación de Kreisel, tendríamos que cambiar las tres cláusulas pertinentes, que quedarían entonces:

- Una prueba canónica de $A \to B$ es un par de construcciones (c_1, c_2), donde c_1 es una prueba de que al aplicar c_2 a cualquier prueba canónica de A, se obtiene como resultado una prueba canónica de B;

- Una prueba canónica de $\forall x A(x)$ es un par de construcciones (c_1, c_2), donde c_1 es una prueba de que al aplicar c_2 a cualquier individuo u del universo, nos da como resultado una prueba canónica de $A(u)$;

y algo similar para la negación.

Nótese que, evidentemente, con esta nueva formulación la necesidad de las pruebas adicionales *no desaparece*: así por ejemplo, no hay razones para suponer que la construcción que transforma cualquier individuo u del universo en una prueba *canónica* de $A(u)$ tenga que exhibir dicha propiedad de forma más evidente que la construcción que lo transforma en una prueba cualquiera de este mismo enunciado.

Ahora bien, todo esto hace que nos planteemos una pregunta fundamental: dado un procedimiento para transformar pruebas *canónicas* de A en pruebas *canónicas* de B, y dada una prueba *no canónica* de A, ¿podremos transformarla también en una prueba de B, como quiera que ésta sea? En otras palabras: si la prueba canónica del condicional $A \to B$ sólo permite, en principio, obtener pruebas de B a partir de pruebas *canónicas* de A, ¿quien nos asegura que también podamos obtener pruebas de B (de cualquier tipo que sean) a partir de pruebas *arbitrarias* de A? Como hemos visto, la prueba canónica es un tipo especialmente restrictivo de prueba, pero seguirán existiendo argumentos indirectos, más complejos, suficientes para convencernos de que el enunciado en cuestión es correcto (constructivamente aceptable), pero que no se ajusten a esas restricciones especiales.

La cuestión es sumamente incisiva y muy importante, porque, como es fácil advertir, sólo una respuesta afirmativa a la misma garantiza la posibilidad de seguir aplicando libremente el modus ponens dentro de la matemática intuicionista.

Y la respuesta afirmativa a dicha cuestión depende a su vez de que estemos en condiciones de garantizar que *cualquier* prueba concebible de un enunciado se pueda reducir a otra en forma canónica, lo cual se conoce como “hipótesis de reducibilidad” (cf. Kreisel (1965, pp. 126–127), Goodman (1970, p. 111)). Dicha hipótesis, que resulta evidente para el caso de los enunciados atómicos, por la propia definición del concepto de *prueba* para estos enunciados, en relación al de *prueba canónica*, deja de serlo cuando se aplica a enunciados en general, de cualquier complejidad lógica. Hay evidencia a favor, como es el teorema de normalización para sistemas intuicionistas de deducción natural (Prawitz (1965)), y hay evidencia en contra, como es el primer teorema de incompletud de Gödel (cf. por ejemplo Dummett (1977, pp. 389–403), (1987), y Prawitz (1977, p. 29), (1987, pp. 156–164)). Lo que está claro es que cualquier intento riguroso de basar toda la interpretación semántica (y no sólo la de los enunciados atómicos) en el concepto de prueba canónica, debe empezar por establecer dicha hipótesis, lo cual no parece fácil. Para una discusión más en profundidad puede consultarse mi artículo “El concepto intuicionista de prueba canónica” (2000b), en el cual analizo además otras tres razones distintas que han motivado la introducción de este concepto.

Por lo demás, cabe utilizar otra estrategia para afrontar el problema de partida sin redefinir todas las cláusulas en términos de pruebas canónicas. Consiste en modificar exclusivamente las definiciones correspondientes a $\vee$ y a $\exists$, haciendo que la posibilidad de pruebas indirectas sea admitida de forma explícita en la formulación de las cláusulas en cuestión:

- Una prueba de $A \vee B$ es o bien una prueba de A, o bien una prueba de B, o bien un procedimiento efectivo que nos permita encontrar alguna de las dos.
- Una prueba de $\exists x A(x)$ consiste en la especificación de una construcción u del universo de interpretación más una prueba de $A(u)$, o bien en un procedimiento efectivo que nos permita encontrar ambas.

Esta formulación tendría, eso sí, el efecto de convertir a estas dos cláusulas en "no decidibles", ya que habrá veces en que se requiera una prueba adicional para verificar que una determinada construcción, de ser completamente efectuada, llevaría a una prueba del enunciado relevante. Y por lo tanto, si quisiéramos incrustar esta nueva formulación en la interpretación de Kreisel, tendríamos que añadir la exigencia de una prueba adicional en cada una, que verificase, en la opción ahora añadida sobre el procedimiento efectivo, que la construcción en cuestión se comporta en efecto como se espera de ella.

Cabe observar, para concluir, que desde el punto de vista de la interpretación operacional esta distinción entre pruebas canónicas y no canónicas es irrelevante, ya que el tipo de construcción que *efectúa* un determinado enunciado es siempre el "tipo canónico", es decir, el especificado por la definición inductiva, que en ese caso no deja lugar a rutas indirectas.

Así por ejemplo, la única manera de efectuar un enunciado $A \vee B$ es efectuando el enunciado A o efectuando el enunciado B. Un argumento para convencernos de que es posible efectuar uno de los dos enunciados (es decir, una *prueba* de $A \vee B$) podrá ser más o menos directo, según consista en mostrar sin más cómo se efectúa uno de los dos, o en un complejo razonamiento que termine con la conclusión de que uno de ellos es efectuable. Pero la construcción que efectúa $A \vee B$ no puede ser ella misma más compleja que lo que dicte la definición inductiva de acuerdo con la estructura interna de A y de B. Y exactamente lo mismo ocurre con los enunciados existenciales, así como, por su parte, con los enunciados atómicos.

9. Pruebas con premisas

Otra forma de afrontar los problemas en la definición del condicional es formular la cláusula directamente en términos de pruebas con premisas:

- Una prueba de $A \to B$ es una prueba de B con premisa A.

Esta definición se corresponde de hecho con la que dieron Kolmogorov y Gentzen, y en el caso de la negación, que tiene una formulación similar, también con la que dio Heyting (cf. una vez más mi artículo (2001)). Otros autores en que aparece son Bridges y Richman (1987, p. 11), Martin-Löf (1987, pp. 410–412), o Sundholm (1986, p. 490).

La diferencia entre esta interpretación y la interpretación de Heyting es muy sutil, hasta el punto de que en la práctica ha sido ignorada por la mayor parte de los autores, que las han considerado equivalentes. Ello se aplica al propio Heyting, entre otros muchos, aunque no, por ejemplo, a Dummett (cf. (2000, pp. 9–10)). En mi artículo *"Five observations ..."* (2000a) ya citado, analizo en profundidad la diferencia que, en efecto, existe entre ambas, y la llevo hasta sus últimas consecuencias (cf. en particular pp. 416–418).

Para empezar, es sorprendente que bajo esta formulación el problema de la decidibilidad suscitado por los enunciados condicionales parezca disolverse por completo. En efecto, no hay razones para suponer que no podamos reconocer que una construcción es una "prueba de B con premisa A", si podemos examinarla detenidamente y comprendemos de antemano el significado intuicionista de A y de B. Así pues, da la impresión de que la necesidad de las pruebas adicionales de Kreisel desaparece.

Sin embargo, el utilizar la noción de *pruebas con premisas* en las cláusulas correspondientes a $\rightarrow$ y $\neg$, nos obliga a redefinir todas las demás cláusulas también en esos términos. En el caso de un enunciado $C \rightarrow (D \vee E)$, por ejemplo, habrá que saber en qué consiste una prueba de la disyunción $D \vee E$ con premisa C. Y es ahí donde las dificultades comienzan de nuevo.

En primer lugar, no podemos admitir la definición:

(a) Una prueba de $D \vee E$ con premisa C es, o bien una prueba de D con premisa C, o bien una prueba de E con premisa C,

porque eso legitimaría la inferencia

$$C \rightarrow (D \vee E) \vDash (C \rightarrow D) \vee (C \rightarrow E)$$

(la ley distributiva de $\rightarrow$ respecto de $\vee$), que es válida (y deducible) en la lógica proposicional clásica, pero *no* en lógica intuicionista.

Por consiguiente, tenemos que conformarnos con la formulación:

(b) Una prueba de $D \vee E$ con premisa C es una prueba con premisa C de que podemos construir o bien una prueba de D o bien una prueba de E,

que es correcta desde el punto de vista intuicionista, pero resulta ser (qué casualidad) *no inductiva*, porque la "prueba de $D \vee E$ con premisa C" se define en términos de una prueba con premisas que tiene exactamente la misma complejidad lógica que la prueba que se trata de definir.

En efecto, tratándose de pruebas con premisas, el grado de complejidad lógica de cada prueba habrá que medirlo sumando los grados correspondientes a cada una de las premisas involucradas, más el grado del enunciado a probar. Es decir: considerando el número global de ocurrencias de conectivas y cuantificadores que hay entre el total de premisas y el enunciado a probar. Así por ejemplo, el grado (gr) de una "prueba de B con premisa A" será simplemente

$$gr\,(A) + gr\,(B),$$

mientras que el grado de una "prueba de $D \vee E$ con premisa C" será igual a

$$gr\,(C) + gr\,(D) + gr\,(E) + 1.$$

Por esta razón la cláusula (a) es claramente inductiva: la "prueba de $D \vee E$ con premisa C" se define en términos de dos pruebas con premisas, la "prueba de D con premisa C" y la "prueba de E con premisa C", siendo el grado de cada una de estas premisas al menos 1 unidad menor que el de la prueba definida. Y por esta razón también la cláusula (b) no lo es, ya que en ella la "prueba de $D \vee E$ con premisa C" se define en términos de una única prueba, la "prueba con premisa C de que podemos construir o bien una prueba de D o bien una prueba de E", que resulta algo más explícita o clarificadora que la prueba inicial, pero tiene exactamente la misma medida de complejidad lógica que la primera.

Habiendo dicho ya que la cláusula (a) es inaceptable como definición de la disyunción intuicionista, tenemos que conformarnos necesariamente con utilizar la cláusula (b), que es no inductiva. Y de este modo, sean cuales sean el resto de cláusulas correspondientes a los demás operadores lógicos, la definición en términos de pruebas con premisas será ya por fuerza no inductiva, tal y como le ocurría a la interpretación de Kreisel, y adolecerá del mismo defecto que ésta: su pobreza, o menor capacidad como elucidación del significado de las constantes lógicas definidas.

Ello no quiere decir que la definición en términos de pruebas con premisas deba ser necesariamente rechazada, como tampoco le ocurría a la interpretación de Kreisel, sino tan sólo que su virtud de eliminar el problema de la decidibilidad, en este caso de las pruebas de enunciados condicionales (y por ende, de las negaciones, que son un tipo particular de condicionales), tiene un precio considerable, cual es la pérdida del carácter inductivo de la definición.

Por lo demás, la cláusula correspondiente a las disyunciones no es la única que genera problemas en la interpretación en términos de pruebas con premisas, ya que una dificultad análoga se produce al formular la cláusula para el cuantificador existencial. Y en cualquier caso, de este modo sólo se atajarían los problemas de decidibilidad suscitados por $\rightarrow$ y $\neg$, quedando pendientes los del cuantificador universal. Resulta curioso comprobar que un intento parecido a éste, con la finalidad de eliminar los problemas de decidibilidad suscitados por los enunciados universales (la interpretación en términos de "pruebas con variables libres"), redunde igualmente en una pérdida del carácter inductivo de las cláusulas correspondientes a $\vee$ y a $\exists$. Pero estos son asuntos que, una vez más, exceden del alcance de este Curso introductorio, y que no vamos a tratar aquí (remito de nuevo a mi artículo (2000a), cf. especialmente pp. 417–418 para la primera de estas cuestiones, y pp. 418–420 para la segunda).

10. Recapitulación

En definitiva, tenemos que concluir que nuestro problema de partida, esto es, el problema de diseñar una interpretación rigurosa del cálculo intuicionista de predicados de primer orden, que refleje fielmente el significado sobrentendido de las constantes lógicas, y en consecuencia, de las reglas de deducción utilizadas en dicho cálculo y de la teoría del sujeto creativo de Brouwer que lo inspiró, es un problema que permanece hoy en día abierto, es decir, no resuelto.

A lo largo de este Curso hemos examinado las principales interpretaciones propuestas, en liza en el debate actual entre los especialistas, así como los defectos y virtudes más sobresalientes de unas y otras, quedando muy claro que no se ha propuesto todavía ninguna que sea completamente satisfactoria.

Bien es verdad que nuestro análisis ha permanecido en un nivel elemental, ajustado a las dimensiones y finalidad del propio Curso, y que en él hemos examinado tan sólo la información más importante, previamente seleccionada y simplificada. Restan todavía un sinfín de matices y de cuestiones pendientes, que se han quedado fuera de nuestro tratamiento (como el problema de la predicatividad, la distinción entre la construcción como objeto y como acto, las pruebas completamente analizadas de Brouwer, la naturaleza del enunciado absurdo $\perp$ usado en la definición de la negación, y un largo etcétera), para cuyo estudio el lector, el alumno, ha de ser remitido directamente a las fuentes bibliográficas que al final se enumeran. Tan sólo espero que, incluso a este nivel elemental, haya sido posible hacerse una idea fideligna de la naturaleza de los entresijos del problema y de la dificultad de resolverlos.

Es en este punto cuando adquieren toda su pertinencia dos sanas preguntas, que cualquier filósofo y cualquier investigador debieran tener siempre presentes, aunque en la práctica se ignoren con cierta frecuencia. La primera es: ¿en qué reside la importancia o trascendencia del problema? Es decir: ¿qué incidencia tendría una solución positiva a este problema sobre el resto de problemas filosóficos abiertos? Y la segunda: ¿se puede encontrar, en efecto, una solución positiva, o hay algo intrínseco a nuestro planteamiento que lo hace insoluble, que hace imposible encontrarle una solución satisfactoria? Vayamos por partes.

La tarea de diseñar una interpretación rigurosa de la lógica intuicionista que sea fiel al significado genuino de los operadores lógicos, tiene una importancia esencialmente filosófica. La investigación modelo teórica de los sistemas formales intuicionistas, empezando por las mismas pruebas de corrección y completud de la lógica de primer orden, puede desarrollarse perfectamente utilizando modelos como los de Kripke, que es lo que en la práctica se hace, y desde el punto de vista puramente técnico, no filosófico, nada hay que objetar.

La cosa cambia cuando nos planteamos que la interpretación de las constantes lógicas es uno de los pilares sobre los que se asienta la filosofía intuicionista de la matemática, y que por consiguiente, gran parte la plausibilidad de esta filosofía de la matemática en su conjunto puede depender de que seamos o no capaces de explicitar este significado de una forma clara y convincente. Como dice Dummett:

> "(...) es necesario por lo tanto, en primer lugar, preguntarse si estas explicaciones de las constantes lógicas son coherentes o no, si en verdad les confieren un significado inteligible; si esta cuestión se puede responder afirmativamente, todavía quedarán muchas cuestiones por ser planteadas (...); pero, si tiene que ser respondida negativamente, la concepción entera, inherente a la matemática intuicionista, acerca de cómo los enunciados matemáticos reciben significado, habrá resultado ser defectuosa." (Dummett (2000, p. 269).)

En efecto, lo que el propio Dummett defendió desde una temprana etapa, fue que el mejor argumento a favor de la matemática intuicionista venía precisamente de la teoría del significado, y más en concreto, de una reflexión acerca de cómo los enunciados matemáticos reciben significado de hecho: no por comparación con una "realidad matemática objetiva" que nos resulta imposible percibir, sino mediante las prácticas establecidas para probar o justificar enunciados por determinados medios, que es como realmente se transmite y se apuntala el correcto uso de estos enunciados (cf. Dummett (1959, pp. 184–185), (1975, pp. 97–98), (2000, pp. 3–5)).

En esta línea, lo que Dummett ha venido defendiendo en las últimas décadas es la elaboración de una teoría general del significado basada en "condiciones de justificación" (o "verificación"), alternativa por tanto a aquellas basadas en "condiciones de verdad", que forman la corriente dominante. Esta teoría, a su vez, cobraría un especial sentido al ser aplicada a posiciones filosóficas antirrealistas en cualquier ámbito, desde los enunciados acerca del pasado o del futuro, hasta las atribuciones de virtud o maldad ética, pasando por las entidades teóricas de la ciencia, la existencia de otras mentes, la existencia del mundo exterior y, por supuesto, por el propio ámbito de los enunciados matemáticos.

Pues bien, dicha teoría semántica, que se ha ido configurando como una de las principales alternativas a la teoría de "condiciones de verdad", y ha recibido una merecida atención por ello, descansa enteramente a su vez sobre la interpretación intuicionista de las constantes lógicas, dado que esta interpretación se encuentra llamada a articular esta teoría semántica como eje central, de un modo aproximadamente análogo a como lo hace la definición de verdad de Tarski en las semánticas realistas al uso.

Como parece completamente aceptado que las constantes lógicas intuicionistas son las apropiadas para este tipo de semántica (así como para cualquier teoría antirrealista, que presumiblemente usará estas constantes lógicas y estará regida por las leyes lógicas intuicionistas, incluyendo la invalidez del tercio excluso y demás), tenemos que concluir que la viabilidad del proyecto entero, y aún, en parte, la viabilidad metafísica del antirrealismo en su conjunto, se basa precisamente en la posibilidad de perfeccionar nuestra definición del significado de dichas constantes (véase por ejemplo Dummett (1976, pp. 110–114) y (1991, pp. 1–19)).

Pues bien, una vez examinadas la importancia y las consecuencias de nuestro problema filosófico, pasemos a plantear para concluir, la segunda pregunta de fondo que nos hacíamos al comienzo de esta sección recapitulatoria: ¿será posible sortear en algún momento las arduas dificultades encontradas, o hay algo intrínseco al problema mismo que hace imposible el resolverlo?

El propio Dummett nos exhorta, como no podía ser menos, a no desanimarnos:

> "Sería un error acobardarse ante estas consideraciones, y caer en un estado de desesperación respecto a las posibilidades de mostrar que la teoría intuicionista del significado es viable" (1977, p. 399),

Pero lo cierto es que hay toda una corriente de opinión según la cual la concepción de base que está detrás de las constantes lógicas intuicionistas, incluyendo la filosofía de la matemática que las inspira y da sentido, es una posición incoherente y falaz, que sólo cabe entender reconstruyéndola en el contexto de alguna teoría clásica, como pueda ser la traducción a la lógica modal epistémica, la propia semántica de Kripke elaborada en un contexto clásico, o alguna maniobra similar de las muchas que se han ensayado y se siguen ensayando.

Naturalmente, los intuicionistas rechazan este tipo de traducciones o reconstrucciones que, entre otras cosas, suponen la aceptación de la matemática clásica en cuyo seno están imbricadas, e ignoran los argumentos filosóficos del intuicionista en contra de la reificación que esta matemática conlleva y a favor de la matemática constructiva.

Ahora bien, aparte del debate general entre intuicionismo y matemática clásica, que también excede evidentemente del alcance de este Curso, lo que a nosotros nos interesa consignar aquí son aquellos trabajos que han criticado específicamente las explicaciones del significado de las contantes lógicas intuicionistas, intentando mostrar que las dificultades encontradas para precisar estas explicaciones son insuperables. Trabajos de esta índole son ya muchos menos, y la eficacia de sus argumentos mucho más discutible. Y, dado que sería muy largo entrar en un examen detallado de los mismos, voy a remitir al lector por última vez a un artículo mío, "Is the language of intuitionistic mathematics adequate for intuitionistic purposes?" ("¿Es el lenguaje de la matemática intuicionista adecuado para los propósitos intuicionistas?", 2003), en el cual analizo los principales ensayos en este sentido publicados en los últimos años, que son los debidos a Keith Hossack y a Geoffrey Hellman. Es mi opinión, argumentada en el citado artículo, que tales ensayos resultan en conjunto infructuosos, y que ninguna de las razones avanzadas en ellos basta para justificar el abandono definitivo del proyecto que nos ha ocupado.

Así pues, la elaboración de una semántica para la lógica intuicionista que sea fiel a su significado genuino, esto es, a la teoría del sujeto creativo de Brouwer, puede seguir considerándose un problema abierto. Un problema pendiente de solución, del que cabe esperar que se encuentre una solución satisfactoria algún día.

Problemas

1. ε es una evaluación basada en un modelo de Kripke, x una variable y u un objeto del universo. En estas condiciones:

$$\varepsilon[x/u] = \varepsilon \iff x^{\varepsilon} = u$$

   ¿Verdadero o falso? Razonar la respuesta.

2. Utilizando la semántica de Kripke, mostrar que la oración

$$\neg\,(\,\forall x \neg\neg P(x) \,\rightarrow\, \neg\neg\forall x P(x)\,)$$

   es consistente en el cálculo intuicionista de predicados.

3. Utilizando la interpretación de Heyting, mostrar la *invalidez* intuicionista de la ley distributiva de $\rightarrow$ en $\vee$:

$$C \rightarrow (A \vee B) \vDash (C \rightarrow A) \vee (C \rightarrow B)$$

   Es decir: mostrar que, de acuerdo con esta interpretación, una prueba de $C \rightarrow (A \vee B)$ no siempre se puede transformar en una prueba de $(C \rightarrow A) \vee (C \rightarrow B)$.

4. Demostrar que para todo natural $n \geqslant 1$, el menor divisor de $4n! - 1$ que es a su vez de la forma $4m - 1$ para algún $m \geqslant 1$, es un número primo y mayor que n.

5. De acuerdo con Dag Prawitz (1977, p. 27), la interpretación de Kreisel da lugar a un regreso al infinito, ya que en las cláusulas para $\rightarrow$, $\neg$ y $\forall$, al igual que la construcción c_1 prueba que c_2 tiene la propiedad requerida, haría falta una tercera construcción c_3 para probar que c_1 prueba esto, y a continuación una cuarta c_4 para probar lo propio de c_3, y así sucesivamente. Evaluar razonadamente este argumento.

6. Formular:

   a) la cláusula correspondiente a $\exists$ conforme a la interpretación operacional;

   b) la cláusula correspondiente a $\vee$ conforme a la interpretación de Heyting en términos de pruebas canónicas;

   c) la cláusula correspondiente a $\neg$ conforme a la interpretación de Kreisel en términos de pruebas canónicas.

7. Justificar la validez intuicionista de la *ley de triple negación*:

$$\neg\neg\neg A \vDash \neg A$$

   utilizando la interpretación en términos de pruebas con premisas.

Bibliografía

Alcolea Banegas, J., *Logicismo, formalismo, intuicionismo*, Nau Llibres, Valencia, 1985.

Bell, J. L. y M. Machover (1977): *A Course in Mathematical Logic* (reimp. 1986), North-Holland, Amsterdam.

Bridges, D. S., y F. Richman (1987): *Varieties of Constructive Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Brouwer, L. E. J. (1927): "Über Definitionsbereiche von Funktionen", *Mathematische Annalen* **97**, pp. 60–75. Extracto en inglés en J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: a Source Book in Mathematical Logic, 1897–1931*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1967, pp. 457–463.

Brouwer, L. E. J. (1975): *Collected Works, vol. 1: Philosophy and Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam.

Brouwer, L. E. J. (1981): *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, ed. por D. van Dalen, Cambridge University Press, Cambridge. Procedente de conferencias dadas en Cambridge entre 1946 y 1951.

Dalen, D. van (1973): "Lectures on Intuitionism", en A. R. D. Mathias y H. Rogers (eds.), *Cambridge Summer School of Mathematical Logic*, Springer, Berlín, pp. 1–94.

Dalen, D. van (1983): *Logic and Structure* (2ª ed. rev.), Springer, Berlín.

Dalen, D. van (1986): "Intuitionistic logic", en D. Gabbay y F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 3, Reidel, Dordrecht, pp. 225–339.

Dales, H. G., y G. Oliveri (eds.) (1998): *Truth in Mathematics: Papers from the Conference held in Mussomeli, September 13–20, 1995*, Clarendon Press, Oxford.

Deaño, A. (1979): *Las concepciones de la lógica*, Taurus, Madrid.

Dou, A. (1974): *Fundamentos de la matemática* (2ª ed.), Labor, Barcelona.

Dummett, M. A. E. (1959): "Wittgenstein's philosophy of mathematics", *Philosophical Review* **68**, pp. 342–348. Citado aquí según la reimp. en *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, Londres, 1978 (reimp. a su vez en Harvard University Press, Cambridge (MA.), 1981, y con trad. cast. en *La verdad y otros enigmas*, Fondo de Cultura Económica, Méjico, 1990).

Dummett, M. A. E. (1975): "The philosophical basis of intuitionistic logic", en H. E. Rose y J.C. Shepherdson (eds.), *Proceedings of the Logic Colloquium '73*, North-Holland, Amsterdam, pp. 5–40. Citado aquí según la reimp. en P. Benacerraf y H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (2ª ed. rev.), Cambridge University Press, Nueva York, 1983, pp. 97–129.

Dummett, M. A. E. (1976): "What is a theory of meaning? (II)", en G. Evans y J. McDowell (eds.), *Truth and Meaning*, Clarendon Press, Oxford, pp. 67–137.

Dummett, M. A. E. (1977): 1ª ed. de Dummett (2000).

Dummett, M. A. E. (1987): "Reply to Prawitz", en B. M. Taylor (ed.), *Michael Dummett: Contributions to Philosophy*, Nijhoff, Dordrecht, pp. 281–286.

Dummett, M. A. E. (1990): *La verdad y otros enigmas*, Fondo de Cultura Económica, Méjico, 1990.

Dummett, M. A. E. (1991): *The Logical Basis of Metaphysics*, Duckworth, Londres.

Dummett, M. A. E. (1994): "Replies to critics", en B. McGuinness y G. Oliveri (eds.), *The Philosophy of Michael Dummett*, Kluwer, Dordrecht, pp. 257–370.

Dummett, M. A. E. (2000): *Elements of Intuitionism* (2ª ed.), Clarendon Press, Oxford.

Fernández Díez, G. (2000): "Brouwer's understanding of the logical constants", *Indian Philosophical Quarterly* **27**, pp. 215–228.

Fernández Díez, G. (2000a): "Five observations concerning the intended meaning of the intuitionistic logical constants", *Journal of Philosophical Logic* **29**, pp. 409–424.

Fernández Díez, G. (2000b): "El concepto intuicionista de prueba canónica", *Agora* **28**, pp. 117–129.

Fernández Díez, G. (2001): "Kolmogorov, Heyting and Gentzen on the intuitionistic logical constants", *Crítica* **96**, pp. 43–57.

Fernández Díez, G. (2002): "The logic of constructivism", *Disputatio* **12**, pp. 37–42.

Fernández Díez, G. (2003): "Is the language of intuitionistic mathematics adequate for intuitionistic purposes?", *L&PS, Logic and Philosophy of Science* **1** (revista electrónica: http://www.units.it/ episteme/).

Fitting, M. C. (1969): *Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing*, North-Holland, Amsterdam.

Fletcher, P. (1998): *Truth, Proof and Infinity: A Theory of Constructions and Constructive Reasoning*, Kluwer, Dordrecht.

Gabbay, D. (1981): *Semantical Investigations in Heyting's Intuitionistic Logic*, Reidel, Dordrecht.

Garrido, M. (ed.) (1989): *Lógica y lenguaje*, Tecnos, Madrid.

Gentzen, G. (1935): "Untersuchungen über das logische Schliessen (I, II)", *Mathematische Zeitschrift* **39**, pp. 176–210. Citado aquí por la trad. inglesa en los *Collected Papers*, ed. por M. E. Szabo, North-Holland, Amsterdam, 1969, pp. 69-131.

Goodman, N. (1970): "A theory of constructions equivalent to arithmetic", en Myhill, Kino y Vesley (1970), pp. 101–120.

Haack, S. (1996): *Deviant Logic, Fuzzy Logic: Beyond the Formalism*, University of Chicago Press, Chicago (IL.) (trad. cast. parcial (de la ed. orig. más reducida, de 1974), en Paraninfo, Madrid, 1980).

Haack, S. (1978): *Philosophy of Logics*, Cambridge University Press, Cambridge (trad. cast. en Cátedra, Madrid, 1982).

Heyting, A. (1930): "Sur la logique intuitionniste", *Académie Royale de Belgique. Bulletin de la Classe des Sciences (5)* **16**, pp. 957–963.

Heyting, A. (1931): "Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik", *Erkenntnis* **2**, pp. 106–115. Citado aquí por la trad. inglesa en P. Benacerraf y H. Putnam (eds.), *Philosophy of Mathematics: Selected Readings* (2ª ed. rev.), Cambridge University Press, Nueva York, 1983, pp. 52–65.

Heyting, A. (1934): *Mathematische Grundlagenforschung: Intuitionism, Beweistheorie*, Springer, Berlín. Citado aquí por la ed. rev. y exp. en *Les Fondements des Mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la Démonstration*, Gauthier-Villars, París, 1955.

Heyting, A. (1956): *Intuitionism: an Introduction* (3ª ed. 1971), North-Holland, Amsterdam (trad. cast. en Tecnos, Madrid, 1976).

Kleene, S. C., y R. E. Vesley (1965): *The Foundations of Intuitionistic Mathematics: Especially in Relation to Recursive Functions*, North-Holland, Amsterdam.

Kolmogorov, A. N. (1932): "Zur Deutung der intuitionistischen Logik", *Mathematische Zeitschrift* **35**: 58–65.

Kreisel, G. (1961): "Set-theoretical problems suggested by the notion of potential totality", en *Infinitistic Methods: Proceedings of the Symposium of Foundations of Mathematics, Warsaw 2–9 September 1959*, Pergamon Press, Oxford, pp. 103–140.

Kreisel, G. (1962): "Foundations of intuitionistic logic", en E. Nagel, P. Suppes and A. Tarski (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, vol. 1, Stanford University Press, Stanford, CA, pp. 198–210.

Kreisel, G. (1965): "Mathematical logic", en T. L. Saaty (ed.), *Lectures on Modern Mathematics*, vol. 3, Wiley and Sons, Nueva York, pp. 95–195.

Kreisel, G. (1970): "Church's thesis: a kind of reducibility axiom for constructive mathematics", en J. Myhill, A. Kino y R. E. Vesley (eds.), *Intuitionism and Proof Theory*, North-Holland, Amsterdam, pp. 121–150.

Kreisel, G. (1971): "A survey of proof theory (II)", en J. E. Fenstad (ed.), *Proceedings of the Second Scandinavian Logic Symposium*, North-Holland, Amsterdam, pp. 109–170.

Kripke, S. (1965): "Semantical analysis of intuitionistic logic (I)", en J. N. Crossley y M. A. E. Dummett (eds.), *Formal Systems and Recursive Functions*, North-Holland, Amsterdam, pp. 92–130.

Krivtsov, V. N. (1999): "Note on extensions of Heyting's arithmetic by adding the creative subject", *Archive for Mathematical Logic*, **38**, pp. 145–152.

Martin-Löf, P. (1984): *Intuitionistic Type Theory: Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padova, June 1980*, Bibliopolis, Nápoles.

Martin-Löf, P. (1985): "On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws", en *Atti degli Incontri di Lògica Matemàtica*, vol. 2, Scuola di Specializzazione in Lògica Matemàtica, Dipartimento di Matemàtica, Università di Siena, pp. 203–281. Citado aquí por la reimp. en el *Nordic Journal of Philosophical Logic* **1** (1996), pp. 11–60.

Martin-Löf, P. (1987): "Truth of a proposition, evidence of a judgement, validity of a proof", *Synthese* **73**, pp. 407–420.

Martin-Löf, P. (1994): "Analytic and synthetic judgements in type theory", en P. Parrini (ed.), *Kant and Contemporary Epistemology*, Kluwer, Dordrecht, pp. 87–99.

Martin-Löf, P. (1998): "Truth and knowability: on the principles C and K of Michael Dummett", en H. G. Dales y G. Oliveri (eds.), *Truth in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, pp. 105–114.

Myhill, J. M., A. Kino y R. E. Vesley (eds.) (1970): *Intuitionism and Proof Theory*, North-Holland, Amsterdam.

Niekus, J. (1987): "The method of the creative subject", *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, **49**, pp. 431–443.

Nordström, B., K. Petersson y J. M. Smith (1990): *Programming in Martin-Löf's Type Theory: an Introduction*, Clarendon Press, Oxford.

Placek, T. (1999): *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity: A Critical Exposition of Arguments for Intuitionism*, Kluwer, Dordrecht.

Prawitz, D. (1965): *Natural Deduction: A Proof-Theoretic Study*, Almqvist and Wiskell, Estocolmo.

Prawitz, D. (1977): "Meaning and proofs: on the conflict between classical and intuitionistic logic", *Theoria* **43**, pp. 1–40.

Prawitz, D. (1985): "Remarks on some approaches to the concept of logical consequence", *Synthese* **62**, pp. 153–171.

Prawitz, D. (1987): "Dummett on a theory of meaning and its impact on logic", en B. M. Taylor (ed.), *Michael Dummett: Contributions to Philosophy*, Nijhoff, Dordrecht, pp. 117–165.

Prawitz, D. (1994): "Meaning theory and anti-realism", en B. McGuiness y G. Oliveri (eds.), *The Philosophy of Michael Dummett*, Kluwer, Dordrecht, pp. 292–298.

Scott, D. (1970): "Constructive validity", en M. Laudet, D. Lancombe, D. Nolin y M. Schüttzenberger (eds.), *Symposium on Automatic Demonstration. December 1970. Rocquencourt*, Springer, Berlín, pp. 237–275.

Sommaruga, G. (2000): *History and Philosophy of Constructive Type Theory*, Kluwer, Dordrecht.

Stigt, W. P. van (1990): *Brouwer's Intuitionism*, North-Holland, Amsterdam.

Sundholm, G. (1983): "Constructions, proofs and the meaning of the logical constants", *Journal of Philosophical Logic* **12**, pp. 151–172.

Sundholm, G. (1986): "Proof theory and meaning", en D. Gabbay y F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 3, Reidel, Dordrecht, pp. 471–506.

Sundholm, G. (1994): "Vestiges of realism", en B. McGuiness y G. Oliveri (eds.), *The Philosophy of Michael Dummett*, Kluwer, Dordrecht, pp. 137–165.

Sundholm, G. (1998): "Inference, consequence, implication: a constructivist's approach", *Philosophia Mathematica* **6**, pp. 178–194.

Tait, W. W. (1983): "Against intuitionism: constructive mathematics is part of classical mathematics", *Journal of Philosophical Logic* **12**, pp. 173–195.

Theoria. A Swedish Journal of Philosophy, **64**(2,3), Department of Philosophy of Stockholm University, Estocolmo, 1998. Volúmenes dedicados especialmente a la obra de Dag Prawitz.

Tieszen, R. L. (ed.) (1998): *Perspectives on Intuitionism*, University of Toronto Press, North-York (ON.). Es el nº **6** de *Philosophia Mathematica*.

Troelstra, A. S. (1969): *Principles of Intuitionism*, Springer, Berlín.

Troelstra, A. S. (1977): "Aspects of Constructive Mathematics", en K. J. Barwise (ed.), *Handbook of Mathematical Logic* (5ª reimp. 1991), North-Holland, Amsterdam, pp. 973–1052.

Troelstra, A. S. (1981): "The interplay between logic and mathematics: intuitionism", en E. Agazzi (ed.), *Modern Logic: a Survey*, Reidel, Dordrecht, pp. 197–221.

Troelstra, A. S. and D. van Dalen (eds.), *The L. E. J. Brouwer Centenary Symposium*, North-Holland, Amsterdam, 1982.

Troelstra, A. S. and D. van Dalen (1988): *Constructivism in Mathematics: an Introduction*, vols. 1 y 2, North-Holland, Amsterdam.

Usberti, G. (ed.) (1994): *Intuitionistic Truth*, Kluwer, Dordrecht. Es el nº **13**(2) de *Topoi*.

Vega Reñón, L. (1987): *El análisis lógico: nociones y problemas. Una introducción a la filosofía de la lógica*, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

Vega Reñón, L. (ed.) (1986): *Lecturas de lógica*, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

Weinstein, S. (1983): "The intended interpretation of intuitionistic logic", *Journal of Philosophical Logic* **12**, pp. 57–82.

Índice general