SEMINARIO DE LÓGICA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA III

Teoría de conjuntos

Prof. Gustavo Fernández Díez

Curso 2010—2011
Segundo Cuatrimestre

Universidad de Murcia

Índice abreviado

MÓDULO 0

Información académica

Ficha técnica

§ 0.1. Datos de la asignatura.

Nombre	Seminario de Lógica y Filosofía de la Ciencia III (Teoría de conjuntos)
Código	08L8
Créditos	6 créditos ECTS
Tipo	Optativa
Docencia	Impartida exclusivamente en el Campus Virtual SUMA
Duración	Cuatrimestral
Centro al que pertenece	Facultad de Filosofía
Titulación	Licenciado en Filosofía (Cursos 4º y 5º)
Otras titulaciones	Cualquiera que permita asignaturas de libre elección

§ 0.2. Datos del profesor.

Profesor	Gustavo Fernández Díez
Categoría	Profesor Titular de Universidad
Centro	Facultad de Filosofía (Campus de Espinardo)
Departamento	Filosofía
Área de conocimiento	Lógica y Filosofía de la Ciencia
Despacho	3.65 (Facultad de Filosofía, Edif. Luis Vives, 3ª planta)
Teléfono	868.887.753 (hay contestador automático)
Correo electrónico	gfdezdp@um.es
Horario de atención presencial	Lunes lectivos, de 11:00 a 14:00 horas
Atención virtual a estudiantes	Por correo electrónico o Tutoría de SUMA (respuesta en máximo de 2 días lectivos)

§ 0.3. Presentación.

El contenido de esta asignatura corresponde a una introducción a la teoría de conjuntos que, partiendo de cero, llega a un nivel de profundidad intermedio. La presentación es axiomática, a partir de los axiomas de Zermelo-Fraenkel, pero no formalizada. Esto es: se utilizan los símbolos matemáticos habituales, pero sin introducir un lenguaje lógico completamente formalizado. Incluye la definición rigurosa de ordinales y cardinales, el axioma de elección y la hipótesis del continuo.

Como asignatura ofertada por la Facultad de Filosofía, se hace especial hincapié en aquellos conceptos y resultados que tienen mayor interés para la lógica y la filosofía de la matemática.

§ 0.4. Conocimientos previos.

Esta asignatura no requiere ningún tipo de conocimientos previos, fuera de los adquiridos en la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Programa

§ 0.5. Objetivos.

<u>Conceptuales</u>: familiarizarse con la teoría axiomática de conjuntos de Zermelo-Fraenkel en una versión no formalizada; identificar aquellos conceptos y resultados que tienen una mayor relevancia para la lógica y la filosofía de la matemática contemporáneas.

<u>Procedimentales</u>: adquirir un dominio básico del lenguaje conjuntista y de sus métodos de prueba y de definición de conceptos; reforzar la capacidad de comprensión de un lenguaje simbólico así como del razonamiento apoyado en ese tipo de lenguaje.

<u>Actitudinales</u>: incrementar el interés por el estudio de los fundamentos de la matemática; incrementar el interés por la aplicación del razonamiento simbólico al análisis de problemas filosóficos.

§ 0.6. Programa de Teoría.

1. GENERALIDADES

— Introducción.
— Convenciones metalingüísticas previas.

2. PRIMEROS AXIOMAS

— El axioma de extensionalidad.
— Clases y conjuntos.
— Los axiomas de emparejamiento y separación.
— El axioma de la unión.
— Los axiomas de infinitud y del conjunto potencia.

3. RELACIONES Y FUNCIONES

— El producto cartesiano.
— Relaciones y funciones.
— El axioma de reemplazo.
— Relaciones de orden.

4. ORDINALES. EL AXIOMA DE ELECCIÓN
— La definición de ordinal.
— La clase de todos los ordinales.
— Ordinales sucesores y ordinales límite.
— Los principios de inducción.
— Panorama de los números ordinales.
— El axioma de fundamentos y el axioma de elección.
5. CARDINALES. LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO
— La definición de cardinal.
— El teorema de Cantor y la hipótesis del continuo.

§ 0.7. Programa de Prácticas.

Las Prácticas se repartirán en 13 Unidades, correspondientes a cada una de las semanas lectivas del Cuatrimestre a excepción de la primera, que no tendrá actividades asignadas. A efectos indicativos se han marcado con asterisco aquellas Prácticas que pueden revestir una mayor dificultad.

La sección § 0.11 indica el procedimiento para el envío de las Prácticas, y en § 0.12 se hallará el *Cronograma*, con todas las actividades correspondientes a cada Unidad y sus plazos de entrega.

§ 0.8. Bibliografía básica.

Alonso Jiménez, J. A., J. Borrego Díaz, M. J. Pérez Jiménez y J. L. Ruiz Reina, *Curso práctico de teoría de conjuntos*, Sevilla: Ediciones la Ñ, 2000.

Fernández Laguna, V., *Teoría básica de conjuntos*, Madrid: Anaya, 2004.

Halmos, P. R., *Teoría intuitiva de los conjuntos*, México D.F.: Editorial Continental, 1984.

Machover, M., *Set Theory, Logic and their Limitations*, Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

Plan docente

§ 0.9. Metodología.

La metodología docente para esta asignatura se encuentra adaptada simultáneamente a la enseñanza no presencial y al Sistema Europeo de Créditos ECTS.

El principal material de trabajo será el presente Manual, que contiene íntegramente tanto la parte teórica de la asignatura como las Prácticas obligatorias diseñadas para su correcto seguimiento.

La impartición de la asignatura está distribuida en Unidades Didácticas Semanales, correspondientes a cada una de las semanas lectivas de que consta el Cuatrimestre. Al comienzo de cada semana el profesor hará una presentación de la Unidad, resaltando aquellas partes a las que los estudiantes deban prestar especial atención y recordando las actividades a realizar. A continuación se dará paso al Foro de debate, moderado por el profesor, para exponer comentarios y dificultades surgidos en relación con esa Unidad.

§ 0.10. Manejo del Manual del Curso.

Este Manual ha sido confeccionado con el editor de textos LaTeX 2_ε, y la versión electrónica del mismo ha sido obtenida mediante el programa PDFLaTeX. Hay que advertir que el buscador de Acrobat® Reader™ no reconoce correctamente los acentos del archivo. Por ello, para intentar localizar una palabra acentuada, se debe introducir en la utilidad de búsqueda algún fragmento relevante de la misma que no contenga acentos (por ejemplo "filosof" para buscar "filosofía").

El profesor recomienda que cada estudiante lleve el archivo a una fotocopiadora (en un CD o lápiz de memoria), y se haga una copia encuadernada. Ésta debe imprimirse "a doble cara", que es para lo que está diseñada la maquetación de las páginas. El coste aproximado es de 9 euros.

En cuanto a la estructura interna del Manual del Curso, está dividido en distintos Módulos. El Módulo 0 corresponde a la información académica, y los Módulos 1–5 corresponden a los contenidos de la asignatura. Cada Módulo va subdividido en Secciones cortas, marcadas con "§", y numeradas por relación al Módulo y a su lugar de orden dentro de éste.

Asimismo, los Módulos están distribuidos en varios Apartados de mediana extensión, como por ejemplo el Apartado dedicado al *Plan docente* en el que estamos ahora. Dichos Apartados no van numerados, ni afectan a la numeración correlativa de Secciones dentro del Módulo.

A continuación de los Módulos hay una *Bibliografía general*, que amplía sustancialmente la escueta *Bibliografía básica* de § 0.8. Por último, el Manual incluye también dos Índices de contenidos: el *Índice abreviado*, colocado al principio, y el *Índice general*, situado al final, en el que aparecen los números de página de todas las Secciones numeradas de los distintos Módulos.

§ 0.11. Uso de SUMA.

<u>Manual del Curso</u>.

El presente Manual está depositado en SUMA, dentro de la página web correspondiente a la asignatura, en *Contenidos — Documentos*.

<u>Teoría</u>.

El profesor presentará cada Unidad Didáctica Semanal mediante un mensaje en el *Tablón*, y a continuación dará paso al *Foro*, para debatir cuestiones relacionadas con esa Unidad. Ello incluye las cuestiones puramente académicas, que están comprendidas en la Unidad 1.

Además de participar en el *Foro*, los estudiantes pueden plantear sus dudas de forma individualizada, mediante la herramienta *Tutoría*, o en el horario de atención presencial del profesor indicado en § 0.2. También pueden consultar la sección de *Faqs* (Preguntas más frecuentes), que contiene la información más básica sobre el seguimiento de la asignatura.

<u>Prácticas</u>.

Las Prácticas se pueden entregar, bien en fichero informático a través de SUMA, o bien en papel, depositándolas en el casillero del profesor en Conserjería del Edificio Luis Vives.

Para depositar las Prácticas en SUMA se debe confeccionar un archivo titulado "Semana *X*" (donde "*X*" es el número de la semana correspondiente), y colgarlo a través de la ruta: *Contenidos — Administrar Mis Documentos — Subir archivo*. Dichos archivos se almacenarán automáticamente en una carpeta individualizada para cada estudiante, a la que sólo tiene acceso el profesor.

Para confeccionar el archivo informático con las soluciones a las Prácticas, se puede utilizar un editor de textos como MS Word® u otro, o bien escanear directamente una hoja manuscrita.

Los signos que no se encuentren en el editor de textos se pueden sustituir por otros a voluntad, señalando la correspondencia al principio de la práctica (por ejemplo: "utilizaré el signo «∼» para denotar la pertenencia"). Otra opción es reemplazar el signo correspondiente por su forma de lectura en voz alta, que viene siempre indicada en el Manual del Curso (poniendo, por ejemplo: "x pertenece a y" en lugar de: "$x \in y$").

Durante la siguiente semana lectiva tras la entrega de las Prácticas, el profesor realizará una valoración individualizada de las mismas. Junto a dicha valoración indicará la puntuación obtenida de cara a la evaluación de la asignatura, así como su recomendación sobre el seguimiento de la asignatura a la vista de las Prácticas recibidas.

§ 0.12. Cronograma.

Unidad Didáctica Semanal		*Contenidos teóricos*	*Prácticas obligatorias*	*Plazo de entrega*
1	07 feb.—11 feb.	§ 0.1 —§ 0.19	————————	————
2	14 feb.—18 feb.	§ 1.1 —§ 1.14	§ 1.10; § 1.13; § 1.15	18.02.2011
3	21 feb.—25 feb.	§ 1.16—§ 1.23	§ 1.17; § 1.20; § 1.22; § 1.24	25.02.2011
4	28 feb.—04 mar.	§ 2.1 —§ 2.31	§ 2.4; § 2.7; § 2.10; § 2.22; § 2.30	04.03.2011
5	07 mar.—11 mar.	§ 2.32—§ 2.62	§ 2.46; § 2.51; § 2.57	11.03.2011
6	14 mar.—18 mar.	§ 2.64—§ 2.86	§ 2.66; § 2.71; § 2.78; § 2.83	18.03.2011
7	21 mar.—25 mar.	§ 2.87—§ 3.8	§ 2.88; § 2.91; § 3.7	25.03.2011
8	28 mar.—01 abr.	§ 3.9 —§ 3.24	§ 3.10; § 3.13; § 3.17; § 3.19; § 3.22	01.04.2011
9	04 abr.—08 abr.	§ 3.25—§ 3.48	§ 3.29; § 3.42; § 3.44; § 3.49	08.04.2011
10	11 abr.—14 abr.*	§ 3.50—§ 4.4	§ 3.52; § 3.54	14.04.2011
11	03 may.—06 may.*	§ 4.5 —§ 4.13	§ 4.6; § 4.11	06.05.2011
12	09 may.—13 may.	§ 4.14—§ 4.41	§ 4.15	13.05.2011
13	16 may.—20 may.	§ 4.42—§ 5.9	§ 4.45; § 5.7	20.05.2011
14	23 may.—27 may.	§ 5.10—§ 5.24	§ 5.14	27.05.2011

* Semanas de 4 días lectivos, por festividades varias: 15 de abril, Fiesta patronal de Filosofía; 2 de mayo, lunes siguiente a la Fiesta del Trabajo.

§ 0.13. Dedicación estimada.

Las Unidades Didácticas Semanales han sido diseñadas para una dedicación estimada de 8 horas de estudio. Esas horas pueden distribuirse, a título orientativo, de la siguiente manera:

- 3 horas dedicadas a la lectura comprensiva de los Contenidos teóricos de la Unidad (unos 20 minutos por página, aproximadamente);
- 3 horas dedicadas a la realización de las Prácticas;
- 2 horas dedicadas la lectura del Tablón, así como a Tutorías y al Foro.

Se ha intentado que las distintas Unidades didácticas estén equilibradas en cuanto a la carga de trabajo que suponen. Para ello se ha tenido en cuenta no sólo el número de páginas del Manual del Curso que comprenden, sino también la densidad del contenido, y la cantidad y dificultad de las Prácticas asignadas. Una pequeña reducción se ha efectuado en la asignación de trabajo a las primeras semanas lectivas del cuatrimestre, así como a aquellas que, por festividades varias, constan de menos de 5 días lectivos.

El Real Decreto 1125/2003 del Sistema Europeo de Créditos, fija en 60 créditos la carga anual para los diferentes Planes de Estudio. Ello equivale a 5 asignaturas como ésta por Cuatrimestre. Suponiendo que todas exijan una dedicación similar (incluyendo las horas de asistencia a clase en las asignaturas presenciales), obtenemos un total de 40 horas semanales. Esto es, el estándar de jornada laboral a tiempo completo.

El estudiante que cumpla este horario de trabajo rigurosamente de lunes a viernes, no tiene por qué utilizar en absoluto los fines de semana, o los periodos vacacionales como Navidad y Semana Santa.

Por último, la preparación de la evaluación de la asignatura se estima en unas 30 horas de trabajo adicional. Éstas deben ubicarse preferentemente en el período de exámenes, una vez acabada la docencia efectiva.

Evaluación

§ 0.14. Fechas de examen (calendario provisional).*

Convocatoria	*Fecha*	*Hora*	*Edificio*	*Planta*	*Aula*
Febrero	25.01.2011	09:00	Luis Vives (Punto 12 del Campus)	–1	4
Junio	20.06.2011	12:00	"	"	a.d.†
Septiembre	02.09.2011	12:00	"	"	"

* El calendario oficial se anunciará previamente a cada convocatoria.

† A determinar.

§ 0.15. Evaluación de la Teoría.

1. La evaluación de la presente asignatura se basará fundamentalmente en la presentación de un trabajo, más la realización de un examen escrito presencial de 2 horas de duración. Cada uno de esos dos elementos serán calificados independientemente de 0 a 5 puntos, y la suma de ambos (suma aritmética, no suma ponderada) repercutirá hasta un tope máximo de 8.5 puntos en la calificación final de la asignatura.

2. El trabajo consistirá en elaborar individualmente soluciones escritas a 5 de los 10 *Problemas propuestos* cuyo listado aparece en § 0.17. Los problemas se valorarán sobre 1 punto cada uno, y su fecha límite de entrega coincidirá con el momento del examen de la convocatoria en curso. También se podrán presentar con anterioridad, por cualquiera de los procedimientos indicados en § 0.11 para la entrega de las Prácticas.

3. El examen constará de 10 preguntas de respuesta breve, a elegir 5. Serán preguntas relacionadas con los contenidos del presente Manual del Curso, y se valorarán sobre 1 punto cada una. En § 0.18 se encontrará un *Modelo de examen*, a fin de orientar sobre el tipo de cuestiones que se pueden plantear y su nivel de dificultad.

4. En la calificación tanto del trabajo como del examen se valorará, por este orden: la adecuación a lo preguntado, el conocimiento de la materia, la perspicacia demostrada y la claridad expositiva.

§ 0.16. Evaluación de las Prácticas.

1. De acuerdo con el sistema de créditos ECTS, se establece como condición obligatoria para poder superar esta asignatura la realización en los plazos estipulados de 8 de las 13 Unidades semanales de asignación de tareas.

2. Los estudiantes que por motivos justificados se vean imposibilitados de cumplir el requisito de entrega de las Prácticas, podrán solicitar una dispensa al Departamento de Filosofía (tel. 868.883.451). En caso de obtenerla no se les asignará tarea alternativa alguna, concurriendo directamente a la evaluación en igualdad de condiciones que el resto de sus compañeros.

3. Además de su carácter obligatorio para poder superar la asignatura, cada asignación de Prácticas será evaluada con hasta 0.2 puntos, y la suma de todas ellas (suma aritmética, no suma ponderada) repercutirá hasta un tope máximo de 1.5 puntos en la calificación final de la asignatura.

§ 0.17. Problemas propuestos. (Véase § 0.15, Puntos 1 y 2.)

1. Sea U el conjunto unitario del conjunto vacío: $U = \{\varnothing\}$ Y sea $V = \{\varnothing, U\}$.
   (a) Mostrar que V es un par, de acuerdo con la Definición § 2.37.
   (b) Apoyándose en (a), mostrar que V es distinto a $\varnothing$ y a U.
   (c) Mostrar que V es un conjunto.

2. Sean C y D clases. Mostrar que si C es un conjunto, también lo es $C \cap D$.

3. Sea C cualquier conjunto no vacío. Mostrar que también $\bigcap C$ constituye un conjunto.

4. Probar el segundo lema del producto cartesiano, § 3.33 (p. 66): *si C y D son conjuntos no vacíos, entonces $C \times D$ también es un conjunto.*

5. Sea S_3 la clase de todos los conjuntos de números naturales cuya suma de elementos es exactamente igual a 3:

$$S_3 = \{\{0,1,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{3\}\}$$

   Y sea T la clase de todos los conjuntos finitos de números naturales.

   (a) Definir una función inyectiva $f : \omega \longrightarrow T$.
   (b) Definir una función sobreyectiva $g : \omega \longrightarrow S_3$
   (c) Indicar cómo se podría definir una función biyectiva $h : \omega \longrightarrow T$.
   (d) Demostrar que tanto las funciones f, g y h, como las propias clases S_3 y T, son todas ellas conjuntos.

6. Desarrollar detalladamente la prueba del Teorema § 3.45, atendiendo a las indicaciones suministradas para ello en su momento (cf. p. 70).

7. Probar el Teorema § 3.59 (p. 73): *todo buen orden es un orden total estricto.*

8. Probar el Corolario § 4.17, o paradoja de Burali-Forti (p. 82): $\mathscr{W}$ *no es un conjunto.*

9. Probar el Lema § 4.26 (p. 84): *si α es un ordinal, también lo es el conjunto* $\alpha \cup \{\alpha\}$.

10. Completar la segunda parte de la prueba del Lema § 5.16 (p. 102), demostrando que si C y D son conjuntos cualesquiera, y existe una función inyectiva de C a D, entonces $|C| \leqslant |D|$.

§ 0.18. Modelo de examen.

EXAMEN DEL SEMINARIO DE LÓGICA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA III

Universidad de Murcia

- Deberá contestar a **5** preguntas, de forma breve y concisa.
- La duración máxima de este examen es de 2 horas.
- Las Soluciones (así como las fechas de calificación y revisión) podrán consultarse una vez finalizado el examen, en SUMA, dentro del *Tablón* de la asignatura.

1. Indicar en qué casos es verdadero un enunciado disyuntivo, cuando está formado mediante la llamada *"disyunción inclusiva"*.
2. Definir las nociones de *conjunto* y *clase propia*, y dar un ejemplo de esta última.
3. Indicar cuál es la diferencia entre el conjunto vacío y el conjunto unitario del conjunto vacío. Esto es: entre los conjuntos $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$.
4. Sea C cualquier clase que contenga al menos un individuo. Explicar sucintamente por qué $\bigcap C = \varnothing$.
5. Definir la imagen $f[C]$ de una clase C bajo la función f.
6. Enunciar el axioma de reemplazo. Explicar por qué se sigue de este axioma que si el dominio de una función es un conjunto, también la misma función ha de ser un conjunto.
7. Sea D una clase bien ordenada por $\in$, y sea C una subclase no vacía de D. Probar que existe un $u \in C$, que es un individuo o un conjunto tal que $u \cap C = \varnothing$.
8. Demostrar que la intersección de dos ordinales es un conjunto transitivo.
9. Sabiendo que la clase de todos los ordinales finitos, ω, es un ordinal, mostrar que es infinito, y en particular el menor de los ordinales finitos.
10. Enunciar el teorema de Cantor, la paradoja de Cantor y la hipótesis del continuo.

§ 0.19. Soluciones al Modelo de examen.

EXAMEN DEL SEMINARIO DE LÓGICA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA III

Soluciones orientativas

(Entre paréntesis se indican las páginas del Manual del Curso donde se pueden consultar más ampliamente las respuestas.)

1. En cualquier caso en que sea verdadero al menos uno de los disyuntos (p. 20).

2. Un *conjunto* es una clase de objetos que, considerada como un todo, forma a su vez un nuevo objeto (p. 31). Una *clase propia* es una clase de objetos que no se puede considerar en sí misma como un nuevo objeto (p. 32). Un ejemplo notable de clase propia notable es la llamada "clase de Russell", formada por todos aquellos conjuntos que no son miembros de sí mismos (p. 32).

3. $\varnothing$ no tiene ningún elemento, mientras que $\{\varnothing\}$ tiene uno: el propio $\varnothing$ (p. 43).

4. Porque los individuos no tienen elementos. Con lo cual es imposible, ya de antemano, que objeto alguno pueda pertenecer a *todos* los elementos de C (p. 48).

5. $f[C]$ es sencillamente la clase de todos los valores que toma f para objetos de C: $f[C] =_{def.} \{ y : y = f(x) \text{ para algún } x \in C \}$ (p. 63).

6. El axioma de reemplazo dice que si el dominio de una función es un conjunto, también lo es su rango (p. 68). Como, por otro lado, sabemos que una función es un conjunto si y sólo si lo son tanto su dominio como su rango, aplicando el axioma de reemplazo el resultado pedido se sigue de inmediato (p. 68).

7. Por el lema del buen orden por $\in$, C tendrá un elemento mínimo con respecto a $\in$, digamos u. Si se trata de un individuo no hay nada más que probar. En caso contrario, basta con tomar cualquier $y \in C$: como u es el elemento mínimo de C, tendremos $u \in y$; y por antisimetría estricta (dado que D está bien ordenada por $\in$), podemos concluir $y \notin u$. Con lo que queda claro $u \cap C = \varnothing$ (p. 76).

8. Sean γ y δ dos ordinales cualesquiera, y pongamos $\alpha = \gamma \cap \delta$. Ahora, si $x \in \alpha$, entonces forzosamente $x \in \gamma$ y $x \in \delta$. Y siendo γ y δ transitivos, ello implica $x \subseteq \gamma$ y $x \subseteq \delta$. De lo que se deduce $x \subseteq \alpha$. Por consiguiente, también α es un conjunto transitivo (p. 81).

9. Siendo la clase de todos los ordinales finitos, si el propio ω fuese finito tendríamos $\omega \in \omega$, contrariamente al buen orden por $\in$ de todos los ordinales. Y además, dado cualquier ordinal $\alpha < \omega$ tendremos también evidentemente $\alpha \in \omega$, con lo que α resulta ser finito. Por ello ω es el menor de los ordinales infinitos (p. 89).

10. El teorema de Cantor establece que la cardinalidad de cualquier conjunto es estrictamente menor que la de su conjunto potencia (p. 104). La paradoja de Cantor es la constatación de que la clase de todos los ordinales es una clase propia (p. 105). La hipótesis del continuo dice que $|\mathscr{P}(\aleph_0)| = \aleph_1$ (p. 106).

MÓDULO 1

Generalidades

Introducción

§ 1.1. Observación (La teoría de conjuntos). La *teoría de conjuntos* es aquella disciplina que estudia las nociones de *conjunto* y *pertenencia*, esto es, la conexión que existe entre un objeto, y aquellos grupos de objetos de los que forma parte.

Una tarea aparentemente tan sencilla reviste gran importancia, porque como se ha comprobado, la práctica totalidad de los objetos matemáticos pueden ser representados en términos de conjuntos y combinaciones de conjuntos. Y análogamente, la práctica totalidad de los teoremas matemáticos pueden ser probados a partir de las leyes o axiomas de la teoría de conjuntos. Este hecho coloca a la teoría de conjuntos en una posición fundamental dentro del edificio de la matemática moderna.

§ 1.2. Observación (La teoría de conjuntos y la lógica formal). Otra disciplina de capital importancia para el estudio filosófico de las matemáticas es la *lógica formal*, que se encarga de analizar las condiciones de validez del llamado *"razonamiento deductivo"*. El razonamiento deductivo es aquel tipo de razonamiento en el cual la verdad de las premisas implica necesariamente la verdad de la conclusión.

El ejemplo de razonamiento deductivo por antonomasia es:

> "Todos los hombres son mortales
> Sócrates es un hombre
> *Por lo tanto:*
> Sócrates es mortal"

En efecto, resulta inconcebible, como podemos comprobar, que siendo verdaderas las premisas, no lo sea también la conclusión. En otras palabras: si es verdad que todos los hombres son mortales, y también que Sócrates es un hombre, entonces tiene que ser verdad también, necesariamente, que Sócrates sea mortal.

Pues bien, este tipo de razonamiento es el característico y habitual de las matemáticas, también conocidas como "ciencias exactas". Por todo lo cual, la teoría de conjuntos y la lógica formal constituyen los dos principales pilares para el estudio filosófico de la fundamentación de esta rama del saber científico. Cualquier intento serio de profundizar un poco en la filosofía de la matemática contemporánea exige un conocimiento, siquiera superficial, de lógica formal y teoría de conjuntos.

Además, la teoría de conjuntos resulta una herramienta necesaria para el cultivo de la lógica formal a un nivel avanzado. La mayor parte de los manuales superiores de lógica, y de los artículos de investigación, utilizan el lenguaje conjuntista, y apoyan sus demostraciones más complejas en los axiomas de la teoría de conjuntos.

Y también a la inversa, aunque pueda resultar sorprendente: la propia lógica resulta a su vez imprescindible para desarrollar la teoría de conjuntos en profundidad y hasta sus últimas consecuencias. En efecto, algunos de los resultados más intrincados de la teoría de conjuntos, exigen para su obtención el uso de las herramientas proporcionadas por la lógica. Aunque en el presente Manual no llegaremos a tanto, por lo que nuestra presentación de la teoría de conjuntos será completamente independiente de la lógica formal y de sus métodos.

Por todo ello, la lógica y la teoría de conjuntos se vienen considerando disciplinas afines, hasta el punto que con frecuencia, al decir "lógica" en sentido amplio, se entiende que incluye también a la teoría de conjuntos. Al igual que cuando se habla del campo de los *"fundamentos de la matemática"*, o del campo de *"lógica y fundamentos"*: la teoría de conjuntos va incluida ahí, y a veces, la propia filosofía de la matemática también.

La teoría de conjuntos ha encontrado asimismo aplicaciones en otras ramas de la filosofía, como en filosofía de la ciencia (en la llamada *"corriente estructural"*, de Joseph Sneed y Wolfgang Stegmüller, por ejemplo), o en filosofía del lenguaje (teoría de la *semántica de situaciones* de John Barwise, entre otras). Sin embargo, la razón principal que motiva esta asignatura es su interés para la lógica y la filosofía de la matemática, por lo que el mayor hincapié lo pondremos nosotros en aquellas cuestiones que resultan especialmente relevantes para esas dos materias.

§ 1.3. Observación (El enfoque axiomático). Aunque la teoría de conjuntos comenzó cultivándose, en sus orígenes, a partir de una noción totalmente natural e intuitiva de *"conjunto"*, pronto se constataron los peligros de adoptar semejante postura. En efecto, el hacerlo así entraña un riesgo seguro de caer en contradicción, o paradoja, como explicaremos en detalle más adelante en este mismo Módulo.

Desde entonces se vienen adoptando distintas estrategias para poder llevar a cabo un estudio coherente y firme acerca de los conjuntos, a salvo de contradicciones.

La más popular de esas estrategias es la de seguir el *método axiomático.* El método axiomático consiste en concentrar, en una lista cerrada de enunciados, todos los principios generales que se desean adoptar sobre el objeto de estudio en cuestión. A continuación se elabora la teoría, entendida como el estudio de las consecuencias que se derivan de esos primeros principios. Los principios generales escogidos se llaman *"axiomas"*, y a la teoría resultante se le llama *"teoría axiomática"*.

En nuestro caso, el objeto de estudio son los conjuntos, por lo que los axiomas deberán recoger las características más generales que describen y regulan el comportamiento de los conjuntos. El resultado será una presentación axiomática de la teoría de conjuntos, o si se prefiere, una "teoría axiomática de conjuntos".

En concreto, nosotros seguiremos la axiomatización conocida como *"teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel"*, con ligeras modificaciones. La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel es la presentación más popular y utilizada de la teoría de conjuntos. Y en lo sustancial, resulta equivalente a las otras axiomatizaciones importantes que se conocen.

La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel consta de un total de 9 axiomas. Pero nosotros no empezaremos viendo la lista completa, sino que iremos introduciendo esos axiomas paulatinamente, a todo lo largo de este Manual. El motivo es hacer el contenido de cada axioma más asequible, y facilitar su correcta asimilación.

§ 1.4. Observación (El método formal). El estudio más profundo y avanzado de la teoría de conjuntos requiere, como ya hemos dicho, la utilización de lenguajes lógicos completamente formalizados. Estos son lenguajes artificiales, íntegramente especificados de antemano, y en los que se definen unas reglas deductivas, o reglas de derivación de fórmulas, que permiten obtener unas fórmulas a partir de otras.

Un *enfoque formalizado* de la teoría de conjuntos es, en definitiva, aquel que se basa en la utilización de lenguajes y sistemas formales para la derivación de los principales resultados. Como quiera que ello va combinado, en la mayoría de los casos, con la elección de una teoría axiomática, lo que se obtiene es una teoría de conjuntos *formal y axiomática*.

De hecho, en muchos manuales se habla de la "teoría axiomática de conjuntos", sin más, para hacer referencia al modo de presentación axiomático-formal que se acaba de describir.

Nosotros en el presente Manual nos contentaremos con exponer una versión de la teoría, que podríamos denominar *"axiomática no formalizada"*. Con ello nos mantendremos dentro de un nivel relativamente elemental, eludiendo la introducción de lenguajes formales y la trabajosa tarea que conlleva su utilización.

§ 1.5. Observación (Definiciones, lemas y teoremas). Entre las Secciones de este Manual se encontrarán: *Definiciones*, en las que se caracterizan los distintos objetos de estudio; *Observaciones*, en las que se hacen comentarios diversos y se perfilan mejor esos objetos; *Convenciones*, en las que se introducen normas de uso para referirnos a ellos; y *Lemas*, *Teoremas* y *Corolarios*, en los que se establecen los hechos más importantes que dichos objetos protagonizan. En cuanto a estos tres últimos, el *lema* suele presentar un resultado algo menor, que se emplea como apoyatura para demostrar posteriormente un *teorema*; mientras que el *corolario* es una consecuencia inmediata de algún teorema anterior.

Algunas de las pruebas de lemas y teoremas se omiten en el texto, quedando como Prácticas o como Problemas propuestos. Como es natural, el examen *no contendrá* preguntas relativas a las pruebas omitidas.

§ 1.6. Observación (Recomendaciones bibliográficas generales). Aunque el contenido de la asignatura está totalmente contenido en este Manual, y no es necesario adquirir ninguna información adicional para su correcto seguimiento, resulta conveniente conocer las principales fuentes bibliográficas existentes sobre la materia. El estudiante interesado podrá, acudiendo a dichas fuentes, ampliar o contrastar los conocimientos que se exponen aquí.

A este respecto, la *Bibliografía selecta* contiene los cuatro manuales que, en mi opinión, merecen ser especialmente mencionados como acompañamiento bibliográfico para una asignatura de estas características. Estos son: el *Curso práctico de teoría de conjuntos*, de José Antonio Alonso Jiménez y otros autores, todos ellos profesores de informática de la Universidad de Sevilla; la *Teoría básica de conjuntos*, del profesor de matemáticas de la Universidad Nacional de Educación a Distancia, Víctor Fernández Laguna; la *Teoría intuitiva de conjuntos*, del matemático estadounidense de origen húngaro Paul Halmos; y en inglés, *Set Theory, Logic and their Limitations*, del matemático israelí Moshé Machover, profesor del Departamento de Filosofía del *King's College London*.

El libro de Alonso Jiménez presenta la teoría de conjuntos bajo un enfoque axiomático y formalizado, incluyendo una gran cantidad de ejercicios propuestos. Contiene también una buena introducción histórica y filosófica, y es, en general, de un nivel de profundidad superior al del presente Manual.

En el extremo opuesto se encuentra el libro del profesor Fernández Laguna: utiliza un enfoque descriptivo de la teoría, no axiomático, y no formalizado; y su nivel es algo inferior al de este Manual, siguiendo un ritmo de explicación más lento.

Por su parte, el libro de Halmos se basa en un enfoque axiomático, pero no formalizado, que es exactamente el mismo que el elegido para el presente Curso. Además, sigue un ritmo de explicación bastante similar, aunque la elección de contenidos no siempre coincide con la nuestra.

Y por último, el manual de Machover, constituye el "texto fuente" a partir del cual ha sido elaborado el presente Manual, tras haber modificado algunas cosas, y omitido muchas otras. También emplea un enfoque axiomático no formalizado, pero a un ritmo de explicación bastante más rápido y condensado que el que emplearemos nosotros aquí.

A esos cuatro libros especialmente recomendados, deben añadirse los restantes incluidos en la *Bibliografía general*, y que a su vez son sólo una muestra de la ingente bibliografía que existe en el mercado sobre la teoría de conjuntos y temas afines. Varios de ellos son manuales generales de lógica, pero que incluyen una parte dedicada a la teoría de conjuntos —algo bastante habitual, sobre todo en los libros de lógica avanzada—. Así sucede en textos clásicos de referencia, como el de Bell y Machover, el de Mendelson o el de Shoenfield, así como en los libros de Badesa, Jané y Jansana, Díez Calzada, Crossley, Ershov, y Zalabardo, por ejemplo —más otra infinidad de ellos que no se citan aquí—.

Por lo demás, tanto los libros de la *Bibliografía selecta* como los de la *Bibliografía general* se encuentran actualmente en los fondos de la Biblioteca Luis Vives, aneja a la Facultad de Filosofía. A excepción de tres de ellos: el de Shoenfield, el de Lipschutz, y el de Drake y Singh. De esos tres libros, los dos primeros se pueden consultar en la Biblioteca de Matemáticas.

Convenciones lingüísticas previas

§ 1.7. Observación (Convenciones lingüísticas). El estudio de la teoría de conjuntos exige la utilización de ciertas *convenciones lingüísticas*, que en un primer momento pueden resultar algo forzadas, o artificiosas, pero que tienen el objetivo de facilitar nuestra forma de expresión a lo largo del presente Manual. En efecto, los usos establecidos en estas convenciones van a ser, con diferencia, los que necesitemos utilizar más frecuentemente. Lo cual justifica que les demos cierta prioridad con respecto a los usos habituales del lenguaje ordinario.

Se trata, por lo demás, de convenciones de empleo generalizado en los textos de teoría de conjuntos, de matemáticas y también de lógica formal. De hecho, en la inmensa mayoría de los casos ni siquiera se suelen hacer explícitas, sino que se dan por sobrentendidas sin más.

§ 1.8. Observación (Letras y tipos de letra). Antes de comenzar con las convenciones lingüísticas propiamente dichas, vamos a efectuar algunas aclaraciones tipográficas y respecto al uso de abreviaturas.

En la presente asignatura utilizaremos para determinados propósitos letras caligráficas mayúsculas, concretamente:

$$\mathscr{P} \qquad \mathscr{R} \qquad \mathscr{U} \qquad \mathscr{W} \qquad \mathscr{Z}$$

así como las letras minúsculas del alfabeto griego:

$$\alpha \ \textit{(alfa)} \qquad \beta \ \textit{(beta)} \qquad \gamma \ \textit{(gamma)} \qquad \delta \ \textit{(delta)} \qquad \omega \ \textit{(omega)}$$

y la primera consonante del alfabeto hebreo:

$$\aleph \ \textit{(Álef)}$$

Utilizaremos la abreviatura "cf.", que significa *confrontar* (equivalente al *"véase"*). El signo de párrafo "§" se usa en este Manual para marcar la numeración de las Secciones, como ya hemos dicho (por lo que se leerá *"sección"*).

Recurriremos a veces al *subíndice*, como en "a_2" (leído *"$a - sub - dos$"*), así como al *superíndice*, como en "a^2" (leído *"a – súper – dos"*). Utilizaremos el asterisco o *estrella* "$\star$", así como las conocidas abreviaturas "=" (*igual a*), "<" (*menor que*), y "$\leqslant$" (*menor o igual que*). También escribiremos "$=_{def.}$", con el significado: *igual, por definición, a.*

Y en fin, otros signos especiales se comentarán según se vayan introduciendo.

§ 1.9. Convención (Predicaciones impropias). Una *predicación impropia* es aquella en la cual se atribuye a un objeto, una propiedad que no tiene sentido plantearse del objeto en cuestión. Por ejemplo, si decimos

"El planeta Marte es juez del Tribunal Supremo"

estamos efectuando una predicación impropia, porque son las personas y no los planetas, las que pueden o no ser jueces, y en particular jueces del Tribunal Supremo.

A veces las predicaciones impropias contienen un significado metafórico. Por ejemplo en

"Italia es una bota que está a punto de darle una patada a Sicilia"

se quiere decir que el trazado del mapa de Italia recuerda a una bota que tiene a la isla de Sicilia delante de la puntera. En su significado literal dicho enunciado es no obstante falso, ya que Italia es un país, y no una bota, y como tal país no tiene capacidad —estrictamente hablando— de darle una patada a nada.

Pues bien: nosotros, a partir de este momento y ya a todo lo largo de el Manual, adoptaremos la siguiente convención: siempre que nos encontremos o tengamos que tratar una predicación impropia, la tomaremos en su significado literal, y por lo tanto la consideraremos *falsa* a todos los efectos. Así, consideraremos que es falso, sin más, que Italia sea una bota, que Marte sea juez del Tribunal Supremo, y análogamente en todos los casos similares.

Lo mismo se aplica también a la predicación de relaciones entre distintos objetos, cuando se trata de una predicación impropia. Por ejemplo,

"Los planetas Júpiter y Saturno son primos hermanos"

atribuye una relación a estos dos planetas, la de ser primos hermanos. La diferencia con la atribución de propiedades es que aquí son varios los objetos involucrados, y lo que se predica es una cierta conexión entre ellos. Pero igualmente se trata de una predicación impropia, que tomada en su literalidad resulta falsa, y que nosotros consideraremos por consiguiente *falsa* a todos los efectos.

Aunque pueda parecer raro, durante esta asignatura vamos a encontrarnos con predicaciones impropias con cierta frecuencia, por lo que debemos prestar atención para seguir cuidadosamente la convención que acabamos de formular.

Por otra parte, en las contadas ocasiones en que queramos expresar un pensamiento metafórico, tendremos que advertirlo de forma clara, con expresiones como *"por hacer una comparación", "por decirlo de alguna manera"* u otras similares, para subrayar que sólo en esos casos, y de manera excepcional, podemos atender a connotaciones del significado que excedan del puro significado literal.

§ 1.10. Práctica (Predicaciones impropias). Proponer 2 ejemplos de predicaciones propias y otros 2 de impropias, relativas a propiedades. Repetir el ejercicio, pero esta vez con atribuciones de relaciones entre objetos. Especificar, de acuerdo con la convención precedente, cuál es el valor de verdad de los 4 ejemplos propuestos, esto es: determinar si cada uno de ellos es verdadero o falso.

§ 1.11. Convención (Uso de la negación). A partir de este momento y ya a todo lo largo del Manual, consideraremos que el valor de verdad de un enunciado negativo es el contrario al valor de verdad que tenga el enunciado negado. Es decir: si un enunciado es verdadero, entonces su negación será falsa, y viceversa.

Esto se aplica en particular a aquellos enunciados que contengan negaciones de predicaciones impropias. Así por ejemplo,

"El planeta Marte no es juez del Tribunal Supremo"
"Italia no es una bota que está a punto de darle una patada a Sicilia"
"Los planetas Júpiter y Saturno no son primos hermanos"

son los tres *verdaderos*, simplemente porque consisten en negaciones de enunciados que ya hemos dictaminado como falsos.

Esta convención sobre el uso de la negación puede parecer una simpleza, pero habremos de llevar cuidado si no queremos que nos juegue malas pasadas. Además, hay que tener presente que no sólo se aplica a las negaciones de las predicaciones impropias, sino a todos los enunciados negativos sin excepción, lo cual incluye a los restantes tipos de enunciados sobre los que vamos a establecer convenciones a continuación.

§ 1.12. Convención (Uso inclusivo de la disyunción). A partir de este momento y ya a todo lo largo del presente Manual, consideraremos que un enunciado disyuntivo es verdadero siempre que sea verdadero al menos uno de los disyuntos, es decir, al menos una de las opciones planteadas por la disyunción. Ello engloba los casos en que sólo uno de los disyuntos es verdadero, así como los casos en que son verdaderos dos o incluso más disyuntos, si es una disyunción triple, o cuádruple, etc. En todos estos casos, al enunciado disyuntivo lo consideraremos verdadero.

A este tipo de disyunción se le denomina técnicamente *"disyunción inclusiva"*. Nuestra convención equivale pues, a anunciar, que nuestro uso de la disyunción en la presente asignatura será conforme a la disyunción inclusiva que se acaba de describir.

Empecemos analizando el ejemplo

"O se mantienen las medidas de protección o se extinguirá el lince ibérico"

Este enunciado es claramente verdadero —por desgracia— porque en los próximos años, o bien sucede que se mantienen firmemente las medidas extraordinarias de protección de esta especie, o bien se extinguirá sin más remedio. Una de estas dos opciones es verdadera, no sabemos cuál —esperemos que sea la primera. Y debido a que una de las opciones es verdadera, la disyunción resulta a su vez verdadera.

Por su parte, en el siguiente ejemplo:

"O el Sol sale por el Este o se pone por el Oeste"

tenemos que las dos opciones propuestas son verdaderas. Esto normalmente nos dejaría perplejos, pero atendiendo a la convención que acabamos de efectuar, no deja lugar a dudas: se trata de una disyunción también *verdadera*. Y lo mismo pasa con

"O la nieve es blanca o la Tierra se mueve"

por idénticas razones, aunque en este caso los dos disyuntos propuestos no tengan nada que ver el uno con el otro.

En cuanto a las disyunciones triples, por su parte, basta con que uno de los disyuntos sea verdadero, pero también pueden serlo dos, o serlo los tres. Y algo análogo ocurre con las disyunciones cuádruples y mayores.

Sólo hay un caso, en definitiva, en que una disyunción resulta falsa, bajo nuestra convención. A saber: aquel en que son falsos todos y cada uno de los disyuntos que contenga.

§ 1.13. Práctica (Uso inclusivo de la disyunción). Poner 1 ejemplo de disyunción en la cual los disyuntos no tengan nada que ver el uno con el otro, y de forma que uno de los disyuntos sea verdadero y el otro falso. Poner otro ejemplo similar, pero con los dos disyuntos verdaderos. Finalmente, poner un último ejemplo con los dos disyuntos falsos, y dar valor de verdad a los 3 ejemplos propuestos.

§ 1.14. Convención (Uso del condicional material). Los enunciados condicionales son aquellos en los que se antepone un hecho como condición de otro:

"Si no operamos inmediatamente, esta persona morirá"

En estos casos llamamos *"antecedente"* a la condición que se antepone (en nuestro ejemplo, el no operar inmediatamente), y *"consecuente"* a lo que ocurre como consecuencia de esa condición (la persona morirá).

Los enunciados condicionales se pueden parafrasear de diferentes formas, pero la idea de que hay una cosa que se pone como condición de otra, es fácilmente detectable:

"Si un hombre va armado, es peligroso"
"Si un hombre va armado, entonces es peligroso"
"Un hombre es peligroso si va armado"
"Un hombre es peligroso cuando va armado"
"Cuando un hombre va armado, es peligroso"
"Siempre que un hombre va armado, es peligroso"
Etc.

Todos ellos son enunciados condicionales, y todos ellos son, evidentemente, sinónimos.

Pues bien: nosotros, a partir de este momento y ya a todo lo largo del Manual, vamos a adoptar una convención muy singular con respecto a los enunciados condicionales: vamos a considerar a todos los enunciados condicionales verdaderos, excepto en el caso en que el antecedente sea de hecho verdadero y el consecuente falso. Ello significa que un enunciado condicional será falso cuando tenga antecedente verdadero y consecuente falso, y será verdadero en cualquier otro caso, y con total independencia de cualquier otra consideración.

A este tipo de condicional se le llama *"condicional material"*, y se dice de él que es *"veritativo–funcional"*, porque su valor de verdad está en función exclusivamente de los valores de verdad de sus componentes. Y no depende de otras cosas, como la conexión causal entre ellos, o la relevancia que pueda tener el uno para el otro.

Así por ejemplo

"Si Madrid está en Francia, entonces París está en Australia" (1)

es *verdadero*, aunque no tenga nada que ver una cosa con la otra, simplemente porque de hecho "Madrid está en Francia" es falso, y "París está en Australia" es también falso, es decir: porque antecedente y consecuente son, en este caso, ambos falsos.

Aunque el enunciado (1) pueda parecer un disparate, lo cierto es que no se encuentra bajo la única circunstancia posible, de acuerdo con nuestra convención, para que un condicional sea falso, a saber: que antecedente sea verdadero y consecuente falso. Y es por ello que, no siendo falso, no le queda más remedio que ser verdadero.

Por similares razones son también verdaderos los siguientes:

"Si París está en Francia, entonces Madrid está en España"
"Si Madrid está en Francia, entonces Madrid está en España" (!)

y *falso*, sin embargo —esta vez sí— un enunciado como:

"Si Madrid está en España, entonces París está en Australia"

El tipo de condicional que estamos postulando aquí es ciertamente idiosincrásico, y alejado del discurso cotidiano. A veces hace su aparición en el lenguaje ordinario, como por ejemplo cuando decimos: "Si tú eres agente de la CIA yo soy el Papa", que es claramente un caso de condicional material, trivialmente verdadero por falsedad del antecedente. Pero no es muy frecuente utilizar este tipo de enunciados.

Si nosotros adoptamos aquí este uso material del condicional como uso principal es por una razón muy sencilla: es este tipo de condicional, con diferencia, el que más vamos a tener que utilizar en esta asignatura. Pero hay que señalar que conservamos la posibilidad de utilizar otras clases de condicionales, por ejemplo causal, o de relevancia, siempre que lo advirtamos de forma clara, con expresiones como *"esto es causa de aquello"*, *"relevante para aquello"* u otras así. Es decir: podemos suspender ocasionalmente la aplicación de la convención, haciéndolo notar, de forma enteramente análoga a como ocurre con el resto de convenciones que estamos estableciendo aquí.

§ 1.15. Práctica (Uso del condicional material). Proponer 3 ejemplos de condicionales, mezclando verdaderos y falsos, y con variedad de formulaciones y circunstancias relativas a cada caso. Indicar el valor de verdad de cada uno de acuerdo con la convención precedente.

§ 1.16. Observación (Uso del bicondicional). Un enunciado *bicondicional* expresa una condición doble, es decir: *dos* condicionales, uno en un sentido y otro en sentido contrario:

> "Una actriz es premiada con el Oscar *si y sólo si* recibe los votos de la mayoría de miembros de la Academia de las Artes y las Ciencias Cinematográficas de Hollywood".

Ello implica dos cosas: (a) que *si* la mayoría de miembros de la Academia vota a una actriz determinada, *entonces* dicha actriz será premiada con el Oscar (independientemente de que después vaya o no a recogerlo). Y (b) que una actriz *sólo* puede recibir el Oscar por este procedimiento, es decir, que una actriz *sólo* puede recibir el Oscar si ha sido votada por la mayoría de miembros de la Academia de las Artes y las Ciencias Cinematográficas de Hollywood. O lo que es lo mismo: que *si* una actriz recibe el Oscar, *entonces* es que ha sido votada mayoritariamente por los miembros de la susodicha Academia.

Hay que tener mucho cuidado en diferenciar los bicondicionales de los condicionales simples. No es lo mismo decir:

"Serás millonario si te toca el gordo de la Primitiva" (2)

que decir:

"Serás millonario *si y sólo si* te toca el gordo de la Primitiva" (3)

El enunciado (3) es un bicondicional, que engloba dos condiciones: (a) que si te toca el gordo de la primitiva, entonces serás millonario. Esta condición es la misma que (2), y es obviamente verdadera. Y una segunda: (b) que serás millonario *sólo si* te toca el gordo de la Primitiva, o dicho de otro modo: que *si* eres millonario *entonces* es que te ha tocado el gordo de la Primitiva. Ésta es completamente distinta de la anterior, y además en este caso es falsa, ya que el gordo de la Primitiva no es el único medio para llegar a ser millonario.

Hay otros medios, como por ejemplo el gordo de la Bonoloto, las quinielas, una herencia, o simplemente haciendo negocios.

En el interior del presente Manual nos vamos a encontrar con muchos bicondicionales, y deben ser correctamente identificados y distinguidos de los condicionales sencillos. Generalmente, los enunciados bicondicionales vienen expresados en la forma:

"p si y sólo si q"

donde p y q son dos enunciados cualesquiera. Pero también se pueden formular diciendo:

"p cuando q y sólo cuando q"
"p exactamente en los mismos casos que q"
"p exactamente cuando q"
"p es condición necesaria y suficiente para q"
Etc.

Ni qué decir tiene que sobre los enunciados bicondicionales cae, de rebote, la convención que hemos hecho antes sobre los condicionales simples, por la sencilla razón de que los bicondicionales no son sino una pareja de condicionales conjugados. Así, para que un enunciado bicondicional sea verdadero tienen que serlo a la vez *los dos* condicionales en los que se desglosa. Y para que cada uno de estos a su vez sean verdaderos tiene que ocurrir que *no* puedan tener antecedente verdadero y consecuente falso.

Cuando haya que demostrar la verdad de un bicondicional, de la forma "p si y sólo si q", generalmente empezaremos demostrando *si p entonces q*, y a continuación demostraremos *si q entonces p*, completando con ello la prueba. El orden en que lo hagamos es lo de menos: lo importante es demostrar que son ciertos los dos condicionales involucrados.

En resumidas cuentas, lo que se suele hacer para demostrar la verdad de un enunciado de estas características lo siguiente. En primer lugar, suponemos p para demostrar q, estableciendo con ello que *si p entonces q* (a esta parte de la prueba, la denotaremos habitualmente en el presente Manual mediante "($\Longrightarrow$)"). A continuación, lo que hacemos es suponer q para demostrar p, estableciendo de este modo que *si q entonces p* (y a esta otra parte de la prueba, la denotaremos habitualmente en el presente Manual mediante "($\Longleftarrow$)").

Si conseguimos hacer las dos cosas correctamente, la prueba o demostración habrá terminado. A veces existe un atajo más rápido para acortar la prueba, pero mientras no lo encontremos tendremos que seguir los dos pasos indicados, que es lo más frecuente.

§ 1.17. Práctica (Uso del bicondicional). Transformar en bicondicionales los 3 ejemplos de condicionales propuestos en la *Práctica* § 1.15, e indicar el valor de verdad resultante de cada uno de ellos.

§ 1.18. Convención (Casos críticos). En ocasiones, para razonar acerca de una clase de objetos, nos paramos a pensar en un individuo ideal, en abstracto. Le ponemos un nombre ficticio, y empezamos a discurrir sobre él, sin presuponer ninguna característica particular específica, excepto la pertenencia a la clase en cuestión. Es un *individuo cualquiera* de dicha clase, lo que técnicamente se denomina a veces un *"caso crítico"*.

También se pueden tomar como casos críticos dos o más individuos. Por ejemplo:

> “Supongamos que un hombre viudo, digamos Manuel, con un único hijo, Manolito, se casa con una chica joven, Juanita, huérfana de padre. Supongamos a continuación, que la madre de Juanita, la viuda Juana, se casa a su vez con el hijo de Manuel, es decir con Manolito. Ocurre entonces que Manolito se convierte en suegro de su padre, padrastro de su padre, padrastro de la mujer de su padre, Juana, y al mismo tiempo su hijastro. Juanita pasa a ser suegra de su madre, así como madrastra e hijastra de Manolito. Y Juana es nuera política de su hija y de su yerno, madrastra de este último ...”

El uso de casos críticos será muy habitual para nosotros en la presente asignatura: “sea A un conjunto cualquiera”, “sea R una relación arbitraria”, “sea α un ordinal”, ... Tendremos que prestar atención para tomar cada caso crítico como un caso *cualquiera*, sin presuponer ninguna característica individual que no sean las expresamente indicadas según se va describiendo el caso.

Además de esto, vamos a adoptar una convención especial: cuando se introducen como casos críticos dos o más objetos pertenecientes a cierta clase, no debemos presuponer que se trata de objetos distintos, a menos que así se indique expresamente. Por ejemplo, cuando digamos “sean A y B conjuntos cualesquiera, o “sean A y B conjuntos”, se entenderá que pueden ser el mismo. Y sólo cuando se especifique, por ejemplo, “sean A y B conjuntos *distintos*”, se utilizará el hecho de que se tiene que tratar de dos conjuntos diferentes.

§ 1.19. Convención (Uso de la cuantificación existencial). Una cuantificación existencial es un enunciado en el que se afirma la existencia de un objeto que satisface cierta condición. La expresión canónica de este tipo de enunciados utiliza el verbo “existir”, pero también se pueden formular de otras maneras:

> “Existen montañas que superan los 8.000 metros de altura”
> “Hay montañas que superan los 8.000 metros de altura”
> “Se dan montañas que superan los 8.000 metros de altura”
> “Algunas montañas superan los 8.000 metros de altura”
> Etc.

La convención que nosotros vamos a adoptar sobre este tipo de enunciados es la siguiente: consideraremos que un enunciado existencial es verdadero cuando exista al menos un objeto que satisfaga la condición en cuestión, y falso en el único caso en que no exista ninguno. A estos efectos, por lo tanto, trataremos de la misma manera a los existenciales que van formulados en singular y a los que van en plural: será suficiente, bajo nuestra convención, con que haya *un* solo objeto que satisfaga la condición exigida.

Es por ello que:

> “Existe una montaña que supera los 8.800 metros de altura ”
> “Hay una montaña que supera los 8.800 metros de altura”
> “Alguna montaña supera los 8.800 m. de altura”

y

> “Existen montañas que superan los 8.800 metros de altura”
> “Hay montañas que superan los 8.800 metros de altura”
> “Algunas montañas superan los 8.800 metros de altura”

son todos ellos *verdaderos* por igual, aunque sólo haya 1 montaña, el Everest, que supere dicha altura. Se entiende, naturalmente, que estamos hablando de montañas en la superficie de la Tierra, y de su altura medida sobre el nivel del mar.

Por otra parte, también un caso como

"Hay un chino en China"

será verdadero, de acuerdo con nuestra convención, con independencia de que en China no haya sólo un ciudadano chino, sino 1.300 millones.

Una excepción importante: sólo escapan a esta convención aquellos enunciados existenciales numéricos en los que se especifique claramente que la condición en cuestión es cumplida por un número exacto de objetos distintos, o por una cantidad determinada de objetos dentro de ciertas cotas. En esos casos el existencial será verdadero o falso según que haya efectivamente objetos que cumplan la condición, en el número especificado, o dentro de las cotas especificadas.

Así por ejemplo, los enunciados

"Hay *al menos dos* montañas distintas que superan los 8.000 metros de altura"
"Hay *más de dos* montañas que superan los 8.000 metros de altura"

son ambos verdaderos, porque hay concretamente 14 picos diferentes que superan esa altura. Es decir: es cierto que hay al menos 2, y es cierto que hay más de 2.

Pero

"Hay *al menos dos* montañas distintas que superan los 8.800 metros de altura"

es *falso*, porque de hecho no hay dos, sino sólo una (el Everest, como ya hemos dicho: el pico que le sigue en altura, el llamado "K2", tiene 8.600).

Y por su parte, los enunciados

"Hay *exactamente dos* montañas que superan los 8.000 metros de altura"
"Hay *exactamente una* montaña que supera los 8.000 metros de altura"

son también falsos, porque el número exacto de montañas que superan los 8.000 metros no es ni 2 ni 1, sino 14.

§ 1.20. Práctica (Uso de la cuantificación existencial). Poner 3 ejemplos de existenciales no numéricos, con variedad de formulaciones y circunstancias, y de modo que sean 2 de ellos verdaderos y 1 falso. Repetir el ejercicio, pero esta vez con existenciales numéricos de diversa condición.

§ 1.21. Convención (Uso de la cuantificación universal). Finalmente, una cuantificación universal es un enunciado en el que se afirma que todos los objetos de cierta clase satisfacen una determinada condición:

"Todos los hombres son mortales"
"Cualquier hombre es mortal"

o sencillamente

"Los hombres son mortales"

que viene a ser sinónima de las anteriores.

Es evidente que un universal es verdadero cuando, efectivamente, *todos* los objetos de la clase en cuestión cumplen la condición correspondiente, y falso en caso contrario. Pero ¿qué ocurre si *no hay* objetos de la susodicha clase? Nuestra convención será, a este respecto, considerar verdaderos a todos aquellos enunciados universales que se refieran a una clase vacía de objetos. Es lo que técnicamente denominamos *"universal vacuamente verdadero"*.

Así por ejemplo,

> "Todas las óperas que compuso Cervantes se han representado en el Gran Teatro del Liceo de Barcelona"

es vacuamente verdadero, y por lo tanto *verdadero* a todos los efectos, por la sencilla razón de que Cervantes no compuso ópera alguna, entendiendo "ópera" en su acepción moderna, naturalmente, esto es, como *drama musical*. Y lo mismo en casos similares.

Por otra parte, y esto también es importante, cuando un enunciado universal se refiera a diversos objetos de una misma clase, no debemos limitarnos a considerar relaciones entre objetos distintos, a menos que el enunciado así lo indique expresamente. Por ejemplo, el universal

> "Con cualesquiera baloncestistas a, b, c, d y e, se puede formar un equipo"

es *falso*, porque si resulta que, por ejemplo, a y b son el mismo, entonces ya no tenemos a 5 jugadores, sino a 4, y es por tanto insuficiente para constituir un equipo de baloncesto conforme al reglamento. Para que fuera verdadero, el universal, debería decir:

> "Con cualesquiera baloncestistas *distintos* a, b, c, d y e, se puede formar un equipo".

§ 1.22. Práctica (Uso de la cuantificación universal). Poner 2 ejemplos de universales vacuamente verdaderos. Poner otros 2 ejemplos de universales con referencia a grupos de objetos de una misma clase, en un caso especificando que se trata de objetos distintos, y en el otro no. Determinar los valores de verdad de los 4 ejemplos propuestos, de acuerdo con la convención precedente.

§ 1.23. Observación (Combinación de las convenciones). En el enunciado

> "Si hay una estrella en el firmamento, entonces todas las verdes ideas duermen furiosamente"

se hayan involucradas varias de las convenciones establecidas aquí. Un examen detenido muestra que, aplicándole todas las convenciones que se combinan en él, se trata de un enunciado verdadero.

§ 1.24. Práctica (Combinación de las convenciones). Idear otro ejemplo de enunciado complejo, en el que se mezclen tantas de nuestras convenciones como sea posible. Indicar cuál es su valor de verdad, razonando la respuesta paso por paso.

MÓDULO 2

Primeros axiomas

El axioma de extensionalidad

§ 2.1. Definición (Objeto). Durante el presente Manual llamaremos *"objeto"* a cualquier persona, animal o cosa, concreta o abstracta.

§ 2.2. Observación (Los números naturales). Los *números naturales* son los que utilizamos habitualmente para contar:

$$0\,,\;1\,,\;2\,,\;3\,,\;\ldots$$

En el presente Manual hablaremos con frecuencia, por ejemplo, de:

"cualesquiera objetos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, para algún número natural n"

Se entenderá que se trata de un número indeterminado de objetos: pueden ser 27, ó 1.500, o sólo 2, ó 1. O pueden ser incluso 0 objetos, esto es *ninguno*, a menos que se especifique que el número natural n en cuestión tiene que ser necesariamente mayor o igual a 1.

A veces también diremos, a secas:

"cualesquiera objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, para algún número natural n"

esto es, sin especificar que sean objetos distintos. En este caso lo que se describe es más bien una *lista* de objetos, compuesta por un número indeterminado de posiciones. El "n" en cuestión indica el número de posiciones de la lista. Y un mismo objeto puede aparecer repetido, ocupando simultáneamente varias de esas posiciones.

También en este segundo caso podemos tener $n = 0$, a menos que se indique expresamente lo contrario. En tal caso nos encontraríamos ante una lista vacía, sin ninguna posición ni objeto dentro de ella.

§ 2.3. Definición (Clase, pertenencia). Una *clase* es cualquier pluralidad o colección de objetos "bien definida", en el sentido de que exista algún criterio preciso que distinga a los objetos que forman parte de ella, del resto de objetos.

Si C es una clase, y el objeto a forma parte de ella, decimos que a *"pertenece"* a C, o también que a es un *"miembro"*, o *"elemento"* de C. Y eso es algo que podemos escribir abreviadamente poniendo

$$a \in C$$

Por su parte, para indicar lo contrario, esto es, para indicar que a *no es* un elemento de C, escribiremos simplemente: $a \notin C$.

Y finalmente, si los objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (para algún número natural $n \geqslant 1$), pertenecen todos ellos a una clase C, podemos indicar este hecho de forma abreviada poniendo sin más:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \in C$$

Por ejemplo, si consideramos a aquellas

> *poblaciones de la Región de Murcia que a fecha de 1 de enero de 2006 tenían más de 25.000 habitantes empadronados*

veremos que forman una pluralidad de objetos bien definida, pues las cifras de empadronamiento aparecen recogidos en las bases de datos oficiales de cada ayuntamiento.

Por tanto esa pluralidad, digamos "U", forma una clase:

> *U: clase de todas las poblaciones de la Región de Murcia que a fecha de 1 de enero de 2006 tenían más de 25.000 habitantes empadronados*

Y podemos poner, por ejemplo,

$$\text{Cartagena, Lorca, Totana} \in U$$

dado que estas tres ciudades cumplen con la condición en cuestión. Mientras que, obviamente, Ojós $\notin U$, dado que la población censada en ese otro municipio murciano ronda los 600 habitantes solamente.

Sin embargo, si consideramos a aquellas

> *poblaciones de la Región de Murcia que a fecha de 1 de enero de 2006 tenían muchos habitantes*

sin más, entonces resultará difícil dirimir si una ciudad como Alhama, por ejemplo, que tiene unas 18.000 personas empadronadas, debe entrar en esa categoría o no. Por ello esta otra pluralidad no constituye una clase, al no venir determinada por un criterio preciso de pertenencia para sus elementos.

§ 2.4. Práctica (Clases). Poner 2 ejemplos distintos de clases, indicando en cada caso un objeto que pertenezca a la clase en cuestión, y otro que no. Poner otros 2 ejemplos de pluralidades diversas, que no constituyan clases, al estar caracterizadas por condiciones excesivamente imprecisas o vagas.

§ 2.5. Observación (Teoría de conjuntos borrosos). En realidad, hay ocasiones en las que nos interesa estudiar las pluralidades de objetos determinadas por condiciones vagas, es decir, las pluralidades de objetos que no están bien definidas. Una de las razones es la propia vaguedad inherente a la mayor parte de los predicados del lenguaje natural, y que paradójicamente, resulta ser muy flexible y ventajosa para el uso cotidiano del lenguaje ordinario.

A tal efecto se ha elaborado toda una teoría sobre ese tipo especial de pluralidades, que recibe el nombre de *"teoría de conjuntos borrosos"*. Se trata de una teoría sin duda interesante, pero más reciente y menos desarrollada que la teoría de conjuntos estándar. En cualquier caso, el estudio de dicha teoría se encuentra fuera del alcance de el presente Manual.

§ 2.6. Convención (Notación de llaves). Si una clase consta exclusivamente de los objetos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (para algún número natural n), entonces podemos referirnos a ella poniendo:

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

La clase queda perfectamente caracterizada así, por enumeración de sus elementos, y el criterio de pertenencia a la misma consistirá sin más en el hecho de estar incluido en esa enumeración.

Por otra parte, si una clase consta exactamente de aquellos objetos que poseen una cualidad P, entonces podemos referirnos a ella poniendo:

$$\{\text{objetos que cumplen } P\}$$

o también, en otro formato:

$$\{x : x \text{ cumple } P\}$$

Por ejemplo, si U es otra vez la clase de poblaciones de Murcia con más de 25.000 habitantes, entonces podemos poner:

$$U = \{\text{poblaciones de Murcia con más de 25.000 habitantes}\}$$

o bien

$$U = \{x : x \text{ es una población de Murcia con más de 25.000 habitantes}\}$$

Así como, directamente:

$$U = \{\text{Alcantarilla, Cartagena, Cieza, Jumilla, Lorca, Molina, Murcia, Totana, Yecla}\}$$

dado que las poblaciones murcianas que cumplen con dicha condición, son exactamente esas nueve indicadas.

§ 2.7. Práctica (Notación de llaves). Aplicar la notación de llaves a la descripción de las 2 clases propuestas en la Práctica anterior.

§ 2.8. Axioma (Axioma de extensionalidad, AX). *Dos clases que poseen los mismos elementos son iguales.*

§ 2.9. Observación (El axioma de extensionalidad). A veces ocurre, en efecto, que dos clases que a primera vista parecen distintas, resultan tener de hecho exactamente los mismos elementos. El axioma de extensionalidad (AX) nos dice que, en tales casos, debemos considerar a esas clases como iguales, esto es: como una sola y única clase.

Así por ejemplo, es un hecho de la Naturaleza que todas las especies animales dotadas de corazón, están dotadas también por un par de riñones, y viceversa. Por lo tanto, la clase de especies animales cuya anatomía incluye un corazón

$$V = \{\text{especies animales dotadas de corazón}\}$$

y la clase de aquellas otras cuya anatomía incluye dos riñones

$$W = \{\text{especies animales dotadas de riñones}\}$$

son de hecho iguales. Es decir, que V y W son una y la misma clase. Y por eso podemos poner, sencillamente:

$$V = W$$

También es un hecho, por poner otro ejemplo, que las dos ciudades más pobladas de Extremadura son sus capitales de provincia, esto es, Cáceres y Badajoz. Por lo tanto las clases

$$\{\text{las dos ciudades más pobladas de Extremadura}\}$$

$$\{\text{capitales de provincia de Extremadura}\}$$

$$\{\text{Cáceres, Badajoz}\}$$

son las tres iguales, esto es: son exactamente la misma clase.

§ 2.10. Práctica (El axioma de extensionalidad). Poner otro ejemplo, diferente a los ya descritos, de dos clases caracterizadas de manera distinta, pero que resulten tener de hecho los mismos elementos. Indicar cuál es el efecto que el axioma de extensionalidad (AX) tiene sobre ellas.

§ 2.11. Observación (Teoría intensional de conjuntos). El axioma de extensionalidad supone una restricción indirecta a la formación de clases, debido a que impide postular la existencia de clases distintas, atendiendo a cualidades distintas, si resulta que en la práctica los elementos de ambas coinciden.

Sin embargo, hay ocasiones en las que nos interesa hacer precisamente eso, es decir: diferenciar entre clases que han sido caracterizadas mediante descripciones distintas, aunque tengan efectivamente los mismos elementos. Al hacerlo, estaremos adoptando una perspectiva *intensional*, en la que se atribuye una especial importancia al significado de la descripción por la que se define una clase (*intensión*). Por oposición a la perspectiva *extensional*, en que se tiene en cuenta únicamente la colección efectiva de objetos que caen bajo la clase en cuestión (*extensión*).

La teoría de conjuntos estándar adopta el punto de vista extensional, recogido en nuestro axioma de extensionalidad (AX). El estudio de las clases y de los conjuntos bajo el punto de vista intensional da lugar a una teoría aparte, que se denomina *"teoría intensional de conjuntos"*. Esta otra teoría también queda fuera del alcance de el presente Manual, al igual que ocurría con la como la teoría de conjuntos borrosos.

§ 2.12. Observación (Orden y repeticiones entre los elementos de una clase). Otra de las consecuencias inmediatas del axioma de extensionalidad, es que a la hora de especificar cuáles son los elementos de una clase dada, no cuentan ni el orden en que están presentados, ni las repeticiones, si las hubiera. Ello es así porque, en virtud de dicho axioma, la clase resultante será la misma, con independencia de esos dos extremos.

Así por ejemplo, podemos concluir inmediatamente la identidad entre las clases:

$$\{\text{España, Francia, Portugal}\} = \{\text{Francia, Portugal, España}\}$$

$$= \{\text{Portugal, España, Francia}\}$$

Que a su vez idénticas, por las mismas razones, a las clases:

$$\{\text{España, Francia, Portugal, España}\}$$

$$= \{\text{España, España, Francia, Francia, Portugal, Portugal}\}$$

etcétera.

En definitiva, debido al axioma de extensionalidad, lo único que cuenta para identificar una clase, es la selección de objetos que de hecho pertenecen a ella. O dicho de otro modo: la entidad o naturaleza de una clase determinada, reside única y exclusivamente en la reunión de objetos que constituyen sus elementos.

Clases y conjuntos

§ 2.13. Definición (Conjunto). Un *conjunto* es una clase de objetos que, considerada como un todo (o como una unidad), forma a su vez un nuevo objeto.

§ 2.14. Observación (Conjuntos con nombre colectivo). Ejemplos típicos de conjuntos nos los proporcionan los llamados *"nombres colectivos"*. Así, un *rebaño de ovejas* es una pluralidad de objetos, en este caso ovejas, que considerada como un todo, forma a su vez un nuevo y singular objeto, consistente en la reunión de todas ellas.

Del mismo modo, una *manada de lobos* es un conjunto de lobos. Y una *cubertería* es a su vez otro conjunto de objetos, en este caso de cubiertos.

§ 2.15. Observación (Conjuntos sin nombre colectivo). No sólo hay conjuntos denotados por nombres colectivos. También hay infinidad de conjuntos para los que no existe un nombre colectivo específico.

Por ejemplo, la clase de poblaciones murcianas con más de 25.000 habitantes, también es un conjunto. Y la clase de poblaciones que son capital de provincia en Extremadura, conforma otro conjunto. Y también la clase {España, Francia, Portugal} es asimismo un conjunto.

En general, la práctica totalidad de las clases que se nos vengan a la cabeza van a ser conjuntos, y por tanto, serán susceptibles de ser consideradas ellas mismas como nuevos objetos.

§ 2.16. Observación (Conjuntos y clases). Lo que resulta difícil es imaginar una clase que no sea un conjunto, es decir: una clase de objetos a la que no se pueda considerar globalmente como un nuevo objeto. Inmediatamente veremos el ejemplo de una, y entenderemos mejor cómo es posible esto.

Lo que sí podemos señalar ya, es que si una clase dada no es ella misma un objeto, entonces por definición de *clase* no podrá pertenecer a otras clases. En efecto, por § 2.3 una clase es una colección de *objetos*. Por consiguiente, una clase que no constituya un objeto, queda descartada automáticamente como posible elemento de otras clases.

Lo cual constituye una diferencia fundamental entre aquellas clases que son conjuntos y aquellas que no.

§ 2.17. Definición (Clase propia). Una *clase propia* es una clase de objetos que no permite que se la considere como un nuevo objeto.

Por consiguiente, una clase propia no permite que se la considere como un todo. Y en consecuencia no constituye un conjunto.

§ 2.18. Observación (Clases propias). Hay que reconocer que la definición precedente resulta bastante extraña: ¿cómo puede haber una clase de objetos a la que no podamos considerar a su vez como un nuevo objeto?

Lo que ocurre es que hay determinadas clases que, si fuesen consideradas como objetos, y por tanto se admitiese que pudieran pertenecer a otras clases, darían lugar rápidamente a contradicciones, o paradojas.

Dichas clases de objetos son las clases propias. Y para evitar las paradojas, decidimos no considerar a las clases propias en sí mismas como nuevos objetos.

§ 2.19. Observación (La paradoja de Russell). El ejemplo de clase propia por antonomasia es la *clase de Russell*, $\mathscr{R}$, que está formada por todos aquellos conjuntos que no son miembros de sí mismos:

$$\mathscr{R} =_{def.} \{x : x \text{ es un conjunto tal que } x \notin x\}$$

Si consideramos ahora la hipótesis de que la propia $\mathscr{R}$ sea un conjunto, y nos preguntamos a quién pertenece, entonces nos encontramos con la siguiente contradicción.

En primer lugar, supongamos $\mathscr{R} \in \mathscr{R}$. Entonces, por definición de $\mathscr{R}$ tenemos que $\mathscr{R}$ no puede pertenecer a sí mismo, ya que $\mathscr{R}$ sólo engloba a aquellos conjuntos que no pertenecen a sí mismos. Por lo tanto llegamos a la conclusión de que $\mathscr{R} \notin \mathscr{R}$.

Pero entonces, si admitimos que en efecto $\mathscr{R} \notin \mathscr{R}$, resultará que a fin de cuentas $\mathscr{R}$ sí cumple con la condición definitoria para ser un elemento de $\mathscr{R}$, y por consiguiente tendríamos que admitir $\mathscr{R} \in \mathscr{R}$.

En una palabra: ocurre que $\mathscr{R} \in \mathscr{R}$ si y sólo si $\mathscr{R} \notin \mathscr{R}$. Esto es una contradicción, y resulta por tanto imposible determinar si de hecho sucede $\mathscr{R} \in \mathscr{R}$ o si sucede $\mathscr{R} \notin \mathscr{R}$. En realidad no pueden suceder ninguna de las dos cosas por separado.

La conclusión que cabe sacar de aquí, naturalmente, es que $\mathscr{R}$ *no* es un conjunto, contrariamente a la hipótesis que habíamos formulado en primer lugar.

Por consiguiente, $\mathscr{R}$ es una clase propia.

§ 2.20. Observación (Solución a la paradoja de Russell). La solución más popular y extendida a la paradoja de Russell consiste, efectivamente, en considerar que la clase de Russell no es un objeto, y por consiguiente no es un conjunto. Es decir: que $\mathscr{R}$ constituye una colección de objetos que no permite el que se la considere en sí misma como un todo, o como una unidad.

Una vez admitido que la clase $\mathscr{R}$ no constituye un conjunto, queda ya claro de inmediato que no puede pertenecer a sí misma, dado que $\mathscr{R}$ sólo incluye *conjuntos*, según se especifica en su definición.

Y por otra parte, al no ser $\mathscr{R}$ un conjunto, tampoco será un objeto, y por ello resultará imposible que pertenezca a ninguna clase, cualquiera que sea. Ello es así porque, por definición, las clases son colecciones de objetos, y por consiguiente, todos los elementos de una clase han de ser, necesariamente, objetos.

$\mathscr{R}$ constituye pues una clase propia.

La clase $\mathscr{R}$ no será la única clase propia con la que nos tropecemos en el presente Manual. Enseguida veremos otros ejemplos de clases propias, bastante distintas a $\mathscr{R}$, al menos en apariencia.

§ 2.21. Observación (Conjuntos y clases que no son miembros de sí mismos). Cabría pensar que el defecto de la clase de Russell reside en la extraña condición en que está basada su cláusula definitoria: la condición de *no ser miembro de sí mismo*.

Sin embargo, casi todas las clases y conjuntos que se nos vienen a la cabeza cumplen con esa condición, esto es, les ocurre justamente que *no* son miembros de sí mismos. Y ello no produce contradicción de ningún tipo.

Por ejemplo, un rebaño de ovejas nunca será miembro de sí mismo, puesto que hay una diferencia abismal entre la naturaleza del rebaño, como objeto abstracto que es, y la naturaleza de las ovejas que lo componen. En efecto, las ovejas son animales concretos, con piel lanuda, y con cuatro patas, mientras que el rebaño es un objeto abstracto, y no tiene piel ni patas. Lo único que tiene el rebaño como conjunto de ovejas, son justamente las ovejas que lo componen, y que constituyen sus elementos.

Tampoco el conjunto de ciudades murcianas de más de 25.000 habitantes constituye ninguna ciudad, y por lo tanto no puede ser miembro de sí mismo. Ni el conjunto de capitales de provincia extremeñas es una capital de provincia, evidentemente.

§ 2.22. Práctica (Conjuntos y clases que no son miembros de sí mismos). Determinar si alguna de las clases propuestas en § 2.4 pertenece o no a sí misma. Razonar la respuesta.

§ 2.23. Observación (Otras clases propias). Algo más difícil resulta imaginar ejemplos de clases que sí debieran ser miembros de sí mismas, caso de que pudieran ser consideradas como conjuntos.

Sin embargo, en casi todos esos casos podemos razonar con suma facilidad que nos encontramos ante una clase propia. Esto es, ante una clase que no debe ser considerada como conjunto, y que por consiguiente, es imposible que pertenezca a ninguna otra clase.

Así sucede, por ejemplo, con la llamada *"clase universal"*, o *clase de todos los conjuntos*:

$$\mathscr{U} =_{def.} \{x : x \text{ es un conjunto}\}$$

En efecto, si la clase de todos los conjuntos $\mathscr{U}$ fuera un conjunto, entonces debería pertenecer a sí misma. Pero un sencillo argumento, que pronto veremos, demuestra que también $\mathscr{U}$ debe ser considerada también como una clase propia, y no como un conjunto.

Algo parecido ocurre también con la *clase de todos los objetos*. La clase de todos los objetos sería todavía mayor que la anterior, incluyendo no sólo todos los conjuntos, sino también todos los demás objetos de cualquier tipo (ovejas, lobos, ciudades y demás). Si la clase de todos los objetos fuese un conjunto, también debería pertenecer a sí misma.

Al igual que ocurre con la *clase de todos los objetos que no son manzanas*, por ejemplo. Si esta otra clase fuera ella misma un conjunto, y por lo tanto un objeto, no sería evidentemente una manzana, y por lo tanto debería pertenecer a sí misma.

Sin embargo, como veremos enseguida, ninguna de estas clases puede ser considerada como un conjunto (cf. § 2.52, p. 41). Las tres deben quedar catalogadas, por consiguiente, en la categoría de clases propias.

§ 2.24. Observación (Anticipación del axioma de fundamentos). Lo que no vamos a encontrar nunca, dentro de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, es un conjunto que sea miembro de sí mismo. Ello es así en virtud del llamado *"axioma de fundamentos"*, que entre otros efectos, impide que eso ocurra, como veremos al estudiar este axioma, en el Módulo 4.

§ 2.25. Observación (Conjuntos y clases propias). En definitiva, con todo esto lo que hemos venido a hacer ha sido dividir a las clases en dos únicas categorías, mutuamente excluyentes: de un lado los conjuntos, y de otro las clases propias.

Aunque entre los conjuntos y las clases propias existen profundas diferencias, como estamos viendo, tanto los unos como las otras son clases, y coincidirán por tanto en muchos aspectos. Algo en lo que coinciden, por ejemplo, es el axioma de extensionalidad. La validez de dicho axioma, en efecto, dentro del tratamiento que le hemos dado nosotros en el presente Manual, se extiende de forma general a todas las clases, de cualquier tipo que sean.

§ 2.26. Convención (Denominaciones de clases y conjuntos). Puesto que todos los conjuntos son clases, vamos a introducir la siguiente convención lingüística, que nos ahorrará algo de tinta.

Se trata simplemente de convenir en que, en lo sucesivo, cualquier denominación que haya sido introducida, en femenino, con respecto a las clases, se podrá también aplicar sin más, en masculino, a aquellos conjuntos que la cumplan.

Así por ejemplo, si decimos que una "clase limonera" es aquella cuyos elementos son todos limones, entonces podemos considerar automáticamente que un conjunto todos cuyos elementos sean limones constituirá asimismo un "conjunto limonero".

§ 2.27. Observación (Individuos). Dicho esto acerca de las clases y los conjuntos, también hay que advertir que, con frecuencia, resulta necesario llevar a cabo una distinción adicional.

En efecto, se trata de que con frecuencia necesitamos distinguir, dentro de los objetos, aquellos que son de hecho conjuntos, de los que no lo son. Una simple oveja, por ejemplo, es un objeto en el sentido de el presente Manual, pero no una clase, como ya hemos dicho, ni tampoco por consiguiente un conjunto.

A tal efecto introducimos la siguiente definición.

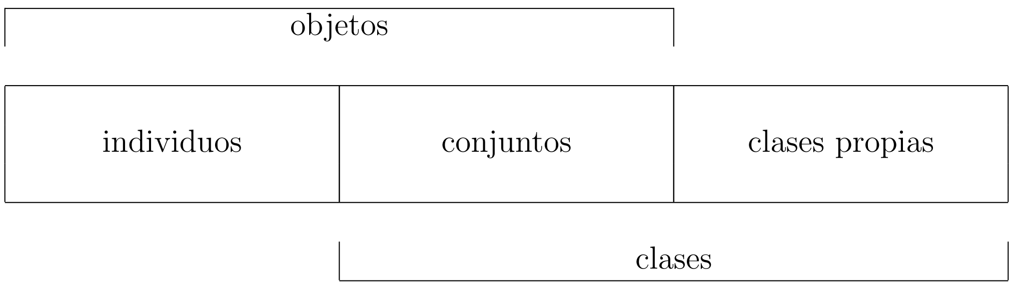
§ 2.28. Definición (Individuo). Un *individuo* es cualquier objeto que no sea un conjunto.

§ 2.29. Observación (Individuos y conjuntos). La diferencia más singular entre conjuntos e individuos, es que sólo los primeros pueden tener elementos. Los individuos, propiamente hablando, tendrán "partes", como las patas de una oveja, por ejemplo. Pero a esas partes no las consideramos "elementos" de la oveja. Al menos, no en el sentido técnico del término, que le da la teoría de conjuntos.

§ 2.30. Práctica (Individuos y conjuntos). Indicar si cada uno de los elementos de las clases propuestas en § 2.4 constituye un individuo o un conjunto. Razonar la respuesta.

§ 2.31. Observación (Metafísica conjuntista). Y así queda redondeada la que podríamos llamar *"metafísica conjuntista"* (u *"ontología conjuntista"*), tal y como se delinea de forma habitual. Por un lado tenemos a los objetos, que se clasifican en dos grandes categorías: individuos y conjuntos. Por otro lado tenemos a las clases, o colecciones de objetos, que a su vez se subdividen en conjuntos y clases propias.

Los conjuntos constituyen simultáneamente objetos y clases. Los individuos son objetos, pero no clases. Y las clases propias, son clases que no permiten ser consideradas como objetos. En definitiva, lo que queda representado por el gráfico:



§ 2.32. Observación (Discriminación entre conjuntos y clases propias). Hasta ahora hemos introducido un único axioma de la teoría de conjuntos, el axioma de extensionalidad (AX), que se refiere a las clases en general, y que por consiguiente afecta simultáneamente a los conjuntos y a las clases propias, como acabamos de recordar.

Sin embargo, el grueso de axiomas de la teoría tendrá como principal misión la de describir o caracterizar determinadas condiciones especiales, garantizándonos que cualquier clase de objetos que cumpla con alguna de ellas, constituye efectivamente un conjunto y no una clase propia. De ese modo, los axiomas nos enseñarán a distinguir los conjuntos de las clases propias, y servirán como garantía teórica de la línea divisoria existente entre ambos.

Gran parte del desarrollo de la teoría de conjuntos, esto es, de los lemas, teoremas y corolarios que pertenecen a esta teoría, consiste precisamente en establecer que determinadas clases de objetos cumplen con alguna de esas condiciones especiales, y que por consiguiente, pueden ser considerados conjuntos, y no clases propias.

§ 2.33. Observación (Presunción de la condición de conjunto). También debemos acostumbrarnos a *no presuponer* de antemano que ninguna clase determinada de objetos sea un conjunto, mientras no hayamos mostrado de modo fehaciente que satisface alguna de las condiciones establecidas por los axiomas de la teoría. Es mediante esa precaución que estaremos siguiendo con rigor el desarrollo axiomático de la teoría de conjuntos, y por consiguiente, evitando en la medida de lo posible, el riesgo de caer en contradicciones como la paradoja de Russell.

Esto corrige en parte la actitud que adoptábamos en § 2.14 y § 2.15, entendiendo que determinadas clases de objetos, particularmente sencillas, aparecían de forma natural como formando conjuntos, y merecían por tanto esa condición. Aunque en el caso concreto de los ejemplos de § 2.14 y § 2.15, demostraremos legítimamente que sí lo son, utilizando los axiomas correspondientes, debemos advertir ahora que tal actitud es errónea, y contraria al espíritu de la teoría axiomática de conjuntos.

En resumidas cuentas, podríamos decir que para las clases y los conjuntos rige una especie de principio, contrario al de la presunción de inocencia de los sistemas judiciales modernos: *ninguna* clase debe ser considerada un conjunto, a menos que se demuestre lo contrario.

§ 2.34. Observación (El estatuto de las clases propias). El estatuto filosófico y científico de las clases propias es sumamente discutible, y en efecto, ha sido objeto de no pocas discusiones.

El origen de la división entre conjuntos y clases propias se debe al propio Georg Cantor, el creador de la teoría de conjuntos, que ya en su famosa carta a Richard Dedekind de 1899 distinguía entre "multiplicidades inconsistentes" y "multiplicidades consistentes", estableciendo que sólo estas últimas permitían ser consideradas, sin contradicción, como "una sola cosa", y por lo tanto, constituían "conjuntos". Después, una distinción esencialmente similar fue elaborada y desarrollada por John von Neumann en 1925, quien introdujo la moderna terminología de "conjuntos" frente a "clases propias".

Sin embargo, se ha de aclarar que el contenido de la teoría de conjuntos propiamente dicha se limita a la consideración de los conjuntos y de sus características. Son los conjuntos los que constituyen el objeto de estudio de la teoría, no las clases propias.

De hecho, es perfectamente posible presentar toda la teoría de conjuntos sin hacer mención alguna de las clases propias. Para ello basta, por ejemplo, con descartar posibles "candidatos a conjunto" como nuestra clase $\mathscr{R}$, limitándose a mostrar que dichas entidades no constituyen conjuntos, y punto. Es decir, poniendo a $\mathscr{R}$ simplemente como un ejemplo de algo que, contrariamente a lo que pudiera parecer, no constituye un conjunto, ni satisface los axiomas de la teoría, ni debe ser por consiguiente tenido en cuenta para el desarrollo de la misma.

Los axiomas de emparejamiento y separación

§ 2.35. Axioma (Axioma de emparejamiento, A2). Si a y b son objetos cualesquiera, entonces la clase $\{a, b\}$ es un conjunto.

§ 2.36. Observación (Axioma de emparejamiento). El axioma de emparejamiento, también conocido como *"axioma del par"*, nos permite formar conjuntos con cualesquiera objetos a y b.

Por esa razón se le asigna a veces la abreviatura "A2". También suele coincidir en ser el axioma que se formula en 2º lugar. Por su parte, la abreviatura "AE", que no ha correspondido ni al primer axioma ni a este segundo, está reservada para el 9º y último, el llamado *"axioma de elección"*, del que trataremos en el Módulo 4, y que reviste una capital importancia.

Debe notarse que, siguiendo nuestra convención sobre los enunciados universales (cf. § 1.21, p. 26), el enunciado de este axioma no implica que los objetos a y b considerados sean distintos, pues no lo especifica expresamente.

Así pues el axioma de emparejamiento se aplicará a dos tipos de casos bien diferenciados: aquel en que los objetos considerados a y b sean objetos distintos, y aquel en el que tengamos $a = b$. El resultado de aplicar el axioma de emparejamiento en el primer caso, será un conjunto con dos elementos, que recibirá el nombre de *"par"*. El resultado de aplicar el axioma de emparejamiento en el segundo caso, será, a pesar del nombre del axioma, un conjunto de sólo un elemento. Este último conjunto recibirá a su vez el nombre de *"conjunto unitario"*.

§ 2.37. Definición (Par). Si a y b son objetos *distintos* cualesquiera, entonces el conjunto $\{a, b\}$ es llamado el *"par"* a, b.

Un ejemplo de par es el conjunto {Sol, Luna}, cuyos elementos son el Sol y la Luna, los dos astros más visibles desde la superficie terrestre. Otros ejemplos de pares son fáciles de construir: el par {D. Quijote, Sancho}, el par {Eto'o, Ronaldinho}, el par {UMU, UCAM}, el par {UMU, UPCT}, etc.

§ 2.38. Teorema (Teorema del conjunto unitario). *Dado un objeto cualquiera a, la clase $\{a\}$ es un conjunto.*

Prueba. Sea $b = a$. Esto es, sea b el propio objeto a. O si se prefiere, llamemos al objeto a de esas dos maneras: "a" y "b".

Por (A2), la clase $\{a, b\}$ es un conjunto. Pero dicha clase tiene exactamente los mismos elementos que la clase $\{a\}$. Por consiguiente, por (AX) estas dos clases son iguales, esto es, son una y la misma clase.

Por consiguiente, también la clase $\{a\}$ constituye un conjunto.

§ 2.39. Definición (Conjunto unitario). Para cualquier objeto a, el conjunto $\{a\}$ es llamado el *"conjunto unitario de a"*.

§ 2.40. Observación (Los conjuntos unitarios). Conviene no confundir a un objeto a con el correspondiente conjunto $\{a\}$, esto es, con su correspondiente conjunto unitario.

Así por ejemplo, la Luna es un satélite de la Tierra, cuya masa es 81 veces menor que la de la Tierra, y que se encuentra a una distancia media de 380.000 km. de ésta. Mientras que {Luna} es un conjunto, y no un satélite, y no tiene masa, ni está situado a ninguna distancia particular de la Tierra, ni de ningún otro sitio.

Por otra parte, consideremos el conjunto X formado por el par {Sol, Luna}:

$$X = \{\text{Sol, Luna}\}$$

Y formemos a continuación el conjunto unitario de X, es decir, el conjunto $\{X\}$.

Pues bien, salta a la vista enseguida que también X y $\{X\}$ son conjuntos distintos: X tiene dos elementos, que son el Sol y la Luna, mientras que el conjunto $\{X\}$ sólo tiene uno.

Podemos notar asimismo que Sol $\in X$ y Luna $\in X$, por ejemplo, mientras que Sol $\notin \{X\}$ ni Luna $\notin \{X\}$. La diferencia, por tanto, entre esos dos conjuntos, es evidente.

§ 2.41. Observación (Axioma lógico: universo de discurso no vacío). Complementando a los 9 axiomas de la teoría de conjuntos, nosotros vamos a adoptar también una suerte de *axioma lógico*, que dice simplemente lo siguiente: *"existe al menos un objeto"*.

La misión de tal elemental supuesto es evidente: garantizar la existencia de al menos un conjunto, y que por consiguiente, nuestra esforzada teoría de conjuntos se pueda aplicar a algo.

§ 2.42. Corolario (Universo de conjuntos no vacío). *Existe al menos un conjunto.*

Prueba. Inmediata por el axioma lógico y el teorema del conjunto unitario.

§ 2.43. Observación (Opcionalidad del axioma lógico). Aunque pueda parecer sorprendente, el axioma de universo de discurso no vacío no es estrictamente necesario para desarrollar la teoría de conjuntos. De hecho, en otros tratamientos de la misma no se hace mención ni empleo alguno de axioma semejante a éste. Lo que ocurre es que en esos otros tratamientos sí se postula como axioma adicional la existencia del conjunto vacío.

El conjunto vacío es un conjunto carente de elementos, como pronto veremos. En este sentido, el conjunto vacío es bastante parecido a un individuo, en cuanto que constituye un objeto, y en cuanto que no existe ningún otro objeto que pertenezca a él. En aquellos tratamientos de la teoría axiomática de conjuntos en los que se postula la existencia del conjunto vacío, éste sirve como único objeto de partida, y todo el resto de conjuntos de la teoría se construye por medio de combinaciones, más o menos complicadas, a partir del conjunto vacío.

En nuestro tratamiento, sin embargo, lo que nosotros postulamos es la existencia de algún objeto, uno al menos, sin especificar cuál. Y en su momento *demostraremos* la existencia del conjunto vacío a partir de este axioma lógico inicial, ayudados por el resto de axiomas de la teoría.

§ 2.44. Definición (Subclase, inclusión). Sean C y D clases cualesquiera. Y supongamos que todos los elementos de C son elementos de D. Entonces decimos que C está *"incluida en"* D, lo cual indicamos abreviadamente poniendo:

$$C \subseteq D$$

En tal caso, decimos también que C es una *“subclase”* de D.

Por su parte, para indicar lo contrario, esto es, para indicar que C *no* está incluida en D, ponemos $C \nsubseteq D$.

Por ejemplo, sea otra vez $X = \{\text{Sol, Luna}\}$, y sea ahora $Y = \{\text{Sol}\}$. Entonces tenemos obviamente $Y \subseteq X$.

Sea ahora Z la clase formada por el Sol más los 8 planetas del Sistema Solar (excluyendo a Plutón, de acuerdo con el dictamen de agosto de 2006 de la Unión Astronómica Internacional):

$$Z = \{\text{Sol, Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno}\}$$

Entonces tendremos $Y \subseteq Z$, evidentemente. Pero sin embargo $X \nsubseteq Z$, ya que la Luna pertenece a X pero no a Z.

Como también tendremos, por razones obvias, $Z \nsubseteq X$, o $X \nsubseteq Y$.

§ 2.45. Definición (Inclusión propia). Dada la definición de inclusión que acabamos de enunciar, resulta trivialmente verdadero que cualquier clase C es una subclase de sí misma, y por consiguiente tenemos $C \subseteq C$. Ello es así porque, como es obvio, siempre será cierto que *todos los elementos de C son elementos de C*, cualquiera que sea la clase C escogida.

Por otra parte, si C y D son clases tales que $C \subseteq D$, pero no obstante $C \neq D$, entonces decimos que C está *“propiamente incluida en”* D. Ello significa, en definitiva, que todos los elementos de C son elementos de D, pero que D tiene además otros elementos que no pertenecen a C.

Los dos ejemplos de inclusión dados en la definición anterior constituían obviamente casos de inclusiones propias, por lo que vale también decir que Y está propiamente incluido en X, y que Y está propiamente incluido en Z.

§ 2.46. Práctica (Inclusión e inclusión propia). Poner dos ejemplos distintos de clases en las que estén incluidas algunas de las propuestas en § 2.4. Indicar todas las relaciones de inclusión que se dan entre esas 4 clases (las dos de esta Práctica y las dos de § 2.4), especificando cuáles de ellas son inclusiones propias y cuáles no.

§ 2.47. Observación (Inclusión y pertenencia). Es importante distinguir cuidadosamente entre inclusión y pertenencia, dado que hay ocasiones en que se puede correr el riesgo de confundirlas.

Así por ejemplo, si X, Y y Z son como en § 2.44, y ahora formamos además una nueva clase U cuyos elementos sean precisamente esas tres clases anteriores,

$$U = \{X, Y, Z\}$$

entonces tendremos obviamente

$$X \in U \qquad Y \in U \qquad Z \in U$$

mientras que

$$X \nsubseteq U \qquad Y \nsubseteq U \qquad Z \nsubseteq U$$

Por otra parte, como ya sabemos,

$$Y \subseteq X \qquad\qquad Y \subseteq Z \qquad\qquad Y \subseteq Y$$

mientras que claramente

$$Y \notin X \qquad\qquad Y \notin Z \qquad\qquad Y \notin Y$$

Finalmente, también tenemos por ejemplo

$$\text{Sol} \in X \qquad\qquad \text{Sol} \in Y \qquad\qquad \text{Sol} \in Z$$

mientras que se ve de inmediato que

$$\text{Sol} \nsubseteq X \qquad\qquad \text{Sol} \nsubseteq Y \qquad\qquad \text{Sol} \nsubseteq Z$$

§ 2.48. Definición (Subconjunto, subconjunto propio). Cuando estamos tratando de clases que constituyen conjuntos, entonces podemos usar, además de los calificativos de "subclase" y "subclase propia" que ya conocemos, otros más específicos.

En efecto, si $C \subseteq D$ y C y D son ambos conjuntos, entonces decimos que C es un *"subconjunto"* de D. Y si C está propiamente incluido en D, siendo C y D conjuntos, decimos que C es un *"subconjunto propio"* de D.

§ 2.49. Axioma (Axioma de separación, AS). *Sean C y D clases cualesquiera. Entonces, si $C \subseteq D$, y D es un conjunto, también C ha de ser necesariamente un conjunto.*

§ 2.50. Observación (El axioma de separación). El axioma de separación nos dice que cualquier subclase de un conjunto dado es a su vez un conjunto. Dicho en otras palabras: todos los subconjuntos de un conjunto, son conjuntos. Por ello, a este axioma se le denomina también "axioma de subconjuntos", así como "axioma de especificación".

El axioma de separación se utiliza con frecuencia para establecer que determinada clase constituye un conjunto, siempre que consigamos demostrar que dicha clase está incluida en algún otro conjunto, previamente legitimado como tal.

Por ejemplo, sea una vez más Z la clase formada por el Sol más los 8 planetas del Sistema, que giran a su alrededor. Tomemos la propiedad P consistente en

$$P: \ \textit{tener un diámetro inferior a 15.000 Km.}$$

Y formemos entonces la clase:

$$W = \{x : P(x) \text{ y } x \in Z\}$$

Dado todo esto, evidentemente, tendremos $W \subseteq Z$. De hecho, los elementos de esta clase W son precisamente Mercurio, Venus, la Tierra y Marte. Pues bien: lo que nos dice el axioma de separación (AS), es que *suponiendo* que la clase Z fuera un conjunto, también lo sería necesariamente la clase W.

Nótese que todavía no hemos establecido que la mencionada clase Z sea un conjunto. Ni estamos en condiciones de hacerlo, al menos por el momento.

Un caso más sencillo sería el de las clases X e Y de § 2.44. Sabemos positivamente que X es un conjunto, y tenemos que $Y \subseteq X$. Por consiguiente, también la clase Y ha de constituir a su vez un conjunto.

§ 2.51. Práctica⋆ (El conjunto unitario y el axioma de separación). Confeccionar una demostración alternativa del teorema del conjunto unitario § 2.38, en la que no intervenga el axioma de extensionalidad, y sí el de separación.

§ 2.52. Observación (Las clases propias y el axioma de separación). Sea $\mathscr{U}$ la clase de todos los conjuntos, o *clase universal.* Y sea $\mathscr{R}$ la clase de Russell que definimos en § 2.19.

Obviamente, tenemos: $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{U}$. Ello es así, debido a que todos los elementos de $\mathscr{R}$ son conjuntos, y $\mathscr{U}$ es ni más ni menos que la clase de *todos* los conjuntos.

Por consiguiente, aplicando el axioma de separación (AS), tenemos que si $\mathscr{U}$ fuera un conjunto, también tendría que serlo automáticamente la clase $\mathscr{R}$.

Ahora bien, sabemos que $\mathscr{R}$ es una clase propia, y no un conjunto. En consecuencia, la clase $\mathscr{U}$ ha de ser a su vez un conjunto, y no una clase propia.

Exactamente lo mismo ocurre con la *clase de todos los objetos*, o la *clase de todos los objetos que no son manzanas*, a las que nos referimos en § 2.23. La clase de Russell $\mathscr{R}$ está incluida en ellas, evidentemente. Por lo tanto, siendo $\mathscr{R}$ una clase propia, ninguna de esas dos clases puede constituir un conjunto.

§ 2.53. Observación (Usos del axioma de separación). Como acabamos de ver, el axioma de separación (AS) sirve a dos importantes usos, claramente diferenciados. Por una parte, (AS) nos resulta útil para establecer que una clase dada constituye un conjunto, demostrando que está incluida en un conjunto ya legitimado como tal. Y por otra parte, el mismo axioma también sirve para verificar que una clase determinada es una clase propia, y *no* un conjunto. En efecto, ello se consigue comprobando a su vez que dicha clase incluye en su interior alguna otra clase, de la que sabemos positivamente que es una clase propia, y no un conjunto.

§ 2.54. Definición (Clase vacía). Llamaremos *"clase vacía"* (abreviadamente, "$\varnothing$") a la clase de todos los objetos que son diferentes de sí mismos:

$$\varnothing =_{def.} \{x : x \text{ es un objeto tal que } x \neq x\}$$

§ 2.55. Observación (La clase vacía). Evidentemente, no hay ningún objeto que sea diferente de sí mismo: no hay ningún objeto x tal que $x \neq x$. Por consiguiente, no hay ningún objeto que satisfaga la condición definitoria de la clase vacía.

Así pues, la clase vacía no tiene ningún elemento. Y ésa es precisamente la razón por la cual la llamamos "clase vacía".

§ 2.56. Observación (Unicidad de la clase vacía). Sea C una clase que no tenga ningún elemento. Entonces resulta evidente que los elementos de C y los elementos de $\varnothing$ son exactamente los mismos —teniendo en cuenta que no hay *ninguno*—.

Por consiguiente, aplicando el axioma de extensionalidad (AX), se sigue de inmediato que las clases C y $\varnothing$ son idénticas, esto es, que son una y la misma clase.

Ello ocurrirá con *cualquier* clase que no tenga elementos. Por consiguiente, no hay en realidad más que una única clase vacía. Y dicha clase coincidirá, en particular, con la que nosotros hemos identificado como $\varnothing$.

Así, la clases:

$$\{\text{elefantes que vuelan}\}$$

$$\{\text{centauros}\}$$

$$\{\text{hombres vivos con más de 150 años}\}$$

$$\{\text{días de la semana posteriores al lunes y anteriores al martes}\}$$

son todas ellas clases carentes de elementos. Y por consiguiente, son todas ellas idénticas a nuestra clase $\varnothing$.

§ 2.57. Práctica (Clases vacías). Poner otros 2 ejemplos de clases vacías, diferentes a las ya mencionadas. Indicar cuál es su relación con la clase $\varnothing$.

§ 2.58. Lema (Inclusión de $\varnothing$ en cualquier clase). *Dada cualquier clase C, tenemos $\varnothing \subseteq C$.*

Prueba. Sea cual sea C, resultará trivialmente verdadero que *todos* los elementos de $\varnothing$ son elementos de C. Ello es así, dado que $\varnothing$ carece por completo de elementos.

Por consiguiente, tenemos $\varnothing \subseteq C$.

§ 2.59. Teorema (Teorema del conjunto vacío). *La clase vacía es un conjunto.*

Prueba. Por el corolario de universo de conjuntos no vacío (§ 2.42), sabemos que existe al menos un conjunto, digamos C. Y según acabamos de ver, $\varnothing \subseteq C$.

Por consiguiente, se sigue del axioma de separación que $\varnothing$ también es un conjunto.

§ 2.60. Observación (Inclusión de $\varnothing$ en cualquier clase o conjunto). Como acabamos de ver, $\varnothing$ está incluido en cualquier clase, no importa cuál sea.

Por la misma razón, evidentemente, estará incluido también en cualquier conjunto. Es decir: $\varnothing$ constituye un subconjunto de cualquier otro conjunto, no importa cuál sea.

Esto es algo importante, que debemos recordar bien. Dado cualquier conjunto C, tenemos $\varnothing \subseteq C$. Y por consiguiente, deberemos contar al conjunto vacío $\varnothing$ entre los subconjuntos de C.

§ 2.61. Convención (El conjunto vacío). Siendo la clase vacía $\varnothing$ un conjunto, y de acuerdo con la Convención § 2.26, resultará apropiado también denominarla "conjunto vacío". Y así lo haremos, efectivamente, en lo sucesivo.

§ 2.62. Observación (El conjunto unitario del conjunto vacío). Ahora que sabemos que la clase vacía $\varnothing$ es un conjunto, y por consiguiente un objeto, podemos aplicarle el teorema del conjunto unitario (§ 2.38) para formar a su vez *el conjunto unitario del conjunto vacío*. Esto es, el conjunto:

$$\{\varnothing\}$$

Dicho conjunto es importante, y se cruzará en nuestro camino en más de una ocasión a lo largo del presente Manual. Por eso deberemos llevar un cuidado especial en no confundirlo con el mismo $\varnothing$.

La diferencia salta a la vista: $\varnothing$ no tiene ningún elemento, mientras que $\{\varnothing\}$ sí. El conjunto $\{\varnothing\}$ tiene exactamente *un* elemento —elemento que, por lo demás, resulta ser el propio $\varnothing$—. Un conjunto sin ningún elemento, y otro que tiene exactamente uno, han de ser necesariamente distintos, con lo que tenemos en definitiva:

$$\varnothing \neq \{\varnothing\}$$

§ 2.63. Observación (Problema 1). Este es el momento apropiado para plantearse la respuesta al *Problema 1* del listado de *Problemas propuestos* (p. 9).

El axioma de la unión

§ 2.64. Definición (Unión de dos clases). Si C y D son clases cualesquiera, entonces la *unión* de C y D (abreviadamente, "$C \cup D$") es la clase resultante de reunir a todos los elementos de C y todos los elementos de D.

Por ejemplo, pongamos que U sea ahora la clase de todos los cacereños, o ciudadanos de la provincia de Cáceres, y V sea la clase de todos los pacenses, o ciudadanos de la provincia de Badajoz. Entonces, la unión $U \cup V$ consistirá exactamente en la clase de todos los habitantes de la Comunidad Autónoma de Extremadura, es decir: en la clase de todos los extremeños.

En el caso de las clases U y V que acabamos de comentar, parece lógico efectuar la unión entre ellas, pues existe una concordancia subyacente, y es que juntas constituyen una Comunidad Autónoma de nuestro país.

Sin embargo, para formar la unión de dos clases no es preciso que exista ningún tipo de ligazón o similitud entre ellas. Así por ejemplo, si W es ahora la clase de todos los conquenses, o ciudadanos de la provincia de Cuenca, entonces podemos considerar también la unión de $U \cup W$ (clase de cacereños más conquenses), o la unión de $V \cup W$ (pacenses y conquenses).

Y si Z es otra vez la clase formada por el Sol más los 8 planetas del Sistema Solar, entonces podemos formar también la unión de $W \cup Z$, por ejemplo, cuyos elementos serían todos los ciudadanos conquenses, más el Sol y los 8 planetas que orbitan a su alrededor.

§ 2.65. Observación (Unión de más de dos clases). Asimismo, una vez formada una clase mediante la unión de dos anteriores, podemos utilizar la clase formada para generar nuevas uniones, juntándola a su vez con otras clases distintas.

Por ejemplo, la unión $U \cup V$ que hemos comentado antes, puede ser puesta a su vez en unión con la clase W. El resultado será la clase $(U \cup V) \cup W$, cuyos elementos serán obviamente los ciudadanos conquenses, unidos a todos los extremeños. Y a su vez esta clase resultante se podría poner en unión con la clase Z, etc.

§ 2.66. Práctica (Unión de dos o más clases). Definir una nueva clase, mediante unión entre las 2 propuestas en § 2.4. Unir la clase resultante con otra distinta, describiendo el resultado obtenido.

§ 2.67. Observación (Anticipación de la definición de clase unión). Por lo demás, el concepto de unión entre clases es como vemos una noción sumamente elemental y sencilla de aprehender.

Un poco más complicado, pero también muy necesario en teoría de conjuntos, es el concepto de *clase unión* de una clase dada, que procederemos a definir en la sección siguiente.

La idea en que se basa dicha definición es ésta. Como ya hemos tenido ocasión de comprobar, algunas clases tienen entre sus elementos conjuntos, mientras que hay otras que no. Pues bien, si consideramos a aquellos elementos de una clase C que sean conjuntos, podemos pensar en reunir a su vez a todos los elementos que se encuentren en el interior de esos conjuntos. De tal modo que estaríamos considerando a los *elementos de los elementos* de la clase C en cuestión.

Ésta es justamente la idea en la que se basa la operación de la *clase unión*: la formación de una nueva clase, reuniendo a todos los elementos de los elementos de una clase dada.

En este sentido, es preciso diferenciar claramente entre los *elementos de los elementos* de una clase dada C, y los propios elementos de C. Son cosas enteramente distintas. Tampoco los *hijos de los hijos* de la Reina Sofía, por poner un ejemplo, son *hijos* de la Reina Sofía, sino sus *nietos*.

§ 2.68. Definición (Clase unión de una clase dada). Sea C una clase cualquiera. Entonces, la *clase unión* de C (abreviadamente "$\bigcup C$"), es aquella clase cuyos elementos son todos aquellos objetos que pertenezcan a alguno de los elementos de C:

$$\bigcup C =_{def.} \{\, x : x \in y \text{ para algún } y \in C \,\}$$

§ 2.69. Observación (Clase unión de una clase dada). Si entre los elementos de C hay algunos que sean conjuntos, entonces los elementos de $\bigcup C$ serán todos los miembros o elementos de esos conjuntos.

Si, por el contrario, C no tiene entre sus elementos ningún conjunto, entonces la clase unión de C no tendrá ningún elemento. En tal caso, la clase unión de C sería la clase vacía, esto es: $\bigcup C = \varnothing$. Dicho en otras palabras, si C es una clase todos cuyos elementos son individuos, entonces automáticamente tendremos $\bigcup C = \varnothing$.

Por ejemplo, sea X el conjunto {Sol, Luna}, y sean X_1, X_2, X_3 y X_4 los otros cuatro conjuntos que pusimos como ejemplos de pares en § 2.37:

$$\begin{array}{rcl} X_1 & = & \{\text{D. Quijote, Sancho}\} \\ X_2 & = & \{\text{Eto'o, Ronaldinho}\} \\ X_3 & = & \{\text{UMU, UCAM}\} \\ X_4 & = & \{\text{UMU, UPCT}\} \end{array}$$

Sabemos que tanto X como X_1–X_4 son conjuntos, por el axioma de emparejamiento (A2). Por consiguiente, son todos ellos objetos. Y podemos así formar una nueva clase, digamos "X_5", que tenga a esos cinco conjuntos como elementos:

$$X_5 = \{X, X_1, X_2, X_3, X_4\}$$

Pues bien: la correspondiente clase unión de la clase X_5 así formada, será la clase que tenga como elementos a todos y cada uno de los elementos de esos cinco conjuntos previamente escogidos:

$$\bigcup X_5 \;=\; \{\text{Sol, Luna, D. Quijote, Sancho, Eto'o, Ronadinho, UMU, UCAM, UPCT}\}$$

Por otra parte, si formamos ahora directamente la clase unión del propio conjunto X, entonces, como entre los elementos de X no hay ningún conjunto, nos encontraremos con que el resultado será el conjunto vacío:

$$\bigcup X \;=\; \varnothing$$

Y finalmente, veamos qué ocurre cuando consideramos una clase, digamos "mixta", que tenga entre sus elementos a algunos conjuntos y a algunos individuos. Por ejemplo, la clase:

$$X_6 \;=\; \{X, X_1, X_2, \text{el Rey Juan Carlos, la discoteca Dance Club, el Mar Menor}\}$$

Pues bien: resulta inmediato comprobar que la clase unión de dicha clase X_6 estará formada, exclusivamente, por los elementos de aquellos elementos de X_6 que son de hecho conjuntos. Esto es:

$$\bigcup X_6 \;=\; \{\text{Sol, Luna, D. Quijote, Sancho, Eto'o, Ronadinho}\}$$

§ 2.70. Observación (Nueva advertencia sobre clases y conjuntos). Recordando las clases U, V y W (de cacereños, pacenses y conquenses, respectivamente), que comentamos en § 2.64, uno puede sentir la tentación de intentar formar una nueva clase que tenga como elementos a dos de ellas, o a las tres, y considerar cuál sería la clase unión de la clase resultante.

Pero ha de advertirse muy seriamente que esas tres clases no han sido todavía legitimadas como conjuntos, de acuerdo con los axiomas de la teoría. Ni estamos aún en condiciones de hacerlo —aunque lo estaremos enseguida—. Por consiguiente no se pueden considerar aún como objetos, ni se puede formar una clase que las contenga como elementos.

§ 2.71. Práctica* (Clase unión de $\varnothing$ y clase unión del conjunto unitario $\{\varnothing\}$).

(a) Determinar qué clase es $\bigcup \varnothing$.

(b) A su vez, el conjunto $\{\varnothing\}$ constituye el conjunto unitario de $\varnothing$, como ya hemos explicado en § 2.62. Considerar la clase unión de este conjunto, $\bigcup\{\varnothing\}$, indicando cuáles son sus elementos.

§ 2.72. Axioma (Axioma de la unión, AU). *La clase unión de cualquier conjunto es también un conjunto.*

§ 2.73. Observación (Conjunto unión de un conjunto dado). Por el axioma de la unión, dado cualquier conjunto C, la correspondiente clase $\bigcup C$ será también un conjunto. Por consiguiente, aplicando la Convención § 2.26, podemos hablar directamente de *"el conjunto unión"* de C.

§ 2.74. Teorema (Teorema de la unión). *La unión de dos conjuntos es siempre un conjunto.*

Prueba. Sean C y D conjuntos. Por consiguiente, serán también objetos, y por el axioma de emparejamiento (A2), la clase $\{C, D\}$ será también a su vez un conjunto.

Por lo tanto, aplicando el axioma de la unión al conjunto $\{C, D\}$, tenemos que el correspondiente conjunto unión

$$\bigcup\{C, D\}$$

también ha de ser a su vez, necesariamente, un conjunto.

Ahora bien. Los elementos de $\bigcup\{C, D\}$ serán todos los elementos de C reunidos conjuntamente con los elementos de D. Es decir, serán exactamente los mismos elementos que los de la clase $C \cup D$. Por consiguiente, por el axioma de extensionalidad (AX) tenemos:

$$\bigcup\{C, D\} \;=\; C \cup D$$

Y ello implica automáticamente que la clase $C \cup D$ haya de ser también ella misma un conjunto.

§ 2.75. Teorema (Conjuntos numerosos finitos). *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son objetos cualesquiera, entonces la clase $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un conjunto.*

Prueba. Si $n = 0$, entonces no hay ningún objeto a considerar. Se trata por tanto de la clase vacía, $\varnothing$, que sabemos que es un conjunto por el teorema § 2.59.

Si $n = 1$, entonces tenemos un único elemento en danza, a_1. Por consiguiente, en este caso tendremos una clase unitaria, $\{a_1\}$, que también sabemos que es un conjunto, en este caso por el teorema § 2.38.

Si $n = 2$, entonces la clase en cuestión será el par $\{a_1, a_2\}$, que a su vez constituye un conjunto por el axioma de emparejamiento (A2).

Si $n = 3$, entonces basta con unir el conjunto $\{a_1, a_2\}$ con el conjunto unitario $\{a_3\}$:

$$\{a_1, a_2\} \cup \{a_3\}$$

Y el resultado obtenido será también un conjunto, conforme al teorema precedente.

Si $n = 4$, entonces unimos a su vez el conjunto obtenido previamente, con el conjunto unitario $\{a_4\}$:

$$(\,\{a_1, a_2\} \cup \{a_3\}\,) \;\cup\; \{a_4\}$$

Y así sucesivamente.

§ 2.76. Observación (Conjuntos numerosos finitos). Tanto la clase del Sol más los 8 planetas, como las clases de todos los cacereños, pacenses y conquenses, pueden ser descritas exhaustivamente mediante una enumeración de sus elementos, más o menos larga o numerosa.

Por consiguiente, ahora sí estamos en condiciones de afirmar que todas esas clases son efectivamente conjuntos, conforme a los postulados axiomáticos de nuestra teoría.

§ 2.77. Definición (Intersección de dos clases; clases disjuntas). Sean C y D clases cualesquiera. Entonces la *intersección* de C y D (abreviadamente, "$C \cap D$"), es aquella clase cuyos elementos son todos aquellos objetos que pertenecen al mismo tiempo a ambas clases, C y D.

Por otra parte, se dice que dos clases C y D son *"disjuntas"* cuando no poseen ningún elemento en común, es decir, cuando no existe ningún elemento que pertenezca simultáneamente a C y a D. En tal caso, obviamente, la intersección de estas dos clases será vacía: $C \cap D = \varnothing$.

Por ejemplo, tomemos ahora U como la clase de todas las ciudadanas españoles que a 01/01/2009 contaban 21 años de edad:

$$U \;=\; \{x : x \text{ es una ciudadana española de 21 años}\}$$

Y tomemos V como la clase de todas las ciudadanas españolas que han nacido en la Región de Murcia:

$$V \;=\; \{\text{ciudadanas españolas nacidas en Murcia}\}$$

Entonces, la intersección de las clases $U \cap V$ consistirá en la clase de todas aquellas ciudadanas españolas nacidas en Murcia que tengan 21 años (a 01/01/2009).

Ahora, tomemos a continuación W como la clase de todos los Notarios colegiados en España,

$$W \;=\; \{\text{Notarios colegiados en España}\}$$

Pues bien, entonces veremos que la intersección de V con W consistirá en la clase de todas las ciudadanas nacidas en Murcia que pertenecen a alguno de los Colegios Notariales que hay en nuestro país. Esto es:

$$V \cap W \;=\; \{\text{ciudadanas españolas colegiadas como Notarias}\}$$

En España hay actualmente miles de Notarios, de los cuales algunas decenas, por lo menos, serán ciudadanas nacidas en la Región de Murcia.

Sin embargo, si consideramos a continuación la intersección de W con la clase U antes descrita:

$$U \cap W \;=\; \{\text{ciudadanas españolas de 21 años colegiadas como Notarias}\}$$

entonces podemos comprobar que la clase resultante resulta ser vacía. Esto es, tendremos: $U \cap W = \varnothing$). Ello ha de ser así, en efecto, porque es virtualmente imposible que nadie pueda aprobar las oposiciones para ingresar en la carrera notarial con una edad tan temprana.

En otras palabras: estas dos clases U y W, resultan ser clases disjuntas.

Para terminar, no está de más notar que, aunque U, V y W han sido identificadas como "clases", y en efecto lo son, también constituyen, en particular, *conjuntos.* Así se desprende de inmediato del teorema precedente, § 2.75.

§ 2.78. Práctica (Intersección de dos clases).

(a) Determinar si las clases propuestas en § 2.4 son disjuntas.

(b) Suponiendo que no sea así, formar su intersección e indicar cuáles son los elementos de la clase resultante.

(c) Suponiendo que las clases propuestas en § 2.4 sean disjuntas, proponer otros dos ejemplos de clases distintas *no* disjuntas, y formar su intersección. Indicar cuáles son los elementos de la clase resultante.

§ 2.79. Observación (Intersección de dos clases). Dadas cualesquiera dos clases C y D, se sigue de inmediato de la definición, que

$$(C \cap D) \subseteq C \qquad\qquad (C \cap D) \subseteq D$$

§ 2.80. Observación (Problema 2). Este es el momento apropiado para plantearse la respuesta al *Problema 2* del listado de *Problemas propuestos* (p. 9).

§ 2.81. Definición (Clase intersección de una clase dada). Sea C una clase cualquiera. Entonces la *clase intersección* de C (abreviadamente "$\bigcap C$"), es aquella clase cuyos elementos son aquellos objetos que pertenezcan simultáneamente a todos y cada uno de los elementos de C:

$$\bigcap C =_{def.} \{x : x \in y \text{ para todo } y \in C\}$$

§ 2.82. Observación (La clase intersección). Como en el caso de la clase unión, la definición de la clase intersección se basa en la consideración de los *elementos de los elementos* de la clase C escogida.

La diferencia, sin embargo, estriba en que ahora reunimos en una clase a aquellos objetos que pertenezcan *simultáneamente* a todos los elementos de C. En otras palabras: no se trata ya de reunir de forma indiscriminada a todos los elementos de los elementos de C, como hacíamos en el caso de la clase unión. Lo que proponemos ahora, en cambio, es considerar tan sólo a aquellos objetos que son elementos comunes a todos los elementos de C. De ahí el nombre de "clase intersección" de la clase C.

Naturalmente, si todos los elementos de C resultan ser conjuntos, entonces $\bigcap C$ contendrá a aquellos objetos que pertenezcan simultáneamente a todos esos conjuntos, suponiendo que haya alguno. Si no hay ninguno, esto es, si todos los elementos de C son conjuntos, pero da la casualidad de que no existe ningún elemento común a todos ellos, entonces la clase intersección de C será vacía: $\bigcap C = \varnothing$.

Por otra parte, si C contiene algún elemento que no sea un conjunto, entonces automáticamente $\bigcap C$ será vacía. Esto es: si entre los elementos de C hay alguno que no sea un conjunto, y que será por consiguiente un individuo, entonces $\bigcap C$ será vacía, con independencia del resto de elementos que pertenezcan a C. Ello tiene que ser así, efectivamente, porque como sabemos, los individuos no tienen elementos. Por consiguiente, el hecho de que un solo elemento de C sea un individuo, implica ya de por sí, que ningún objeto puede pertenecer a *todos y cada uno* de los elementos de C.

Por ejemplo, retomando las clases U y V comentadas en § 2.77, y dado que ambas constituyen conjuntos como ya señalamos, podemos formar una nueva clase que contenga a estas dos clases como elementos. Dicha clase será:

$$Y_1 = \{U, V\}$$

Pues bien. En consecuencia, la correspondiente clase intersección de esa clase Y_1, será la que recoja a todos aquellos elementos que pertenezcan simultáneamente a U y V. Esto es, ni más ni menos que:

$$\bigcap Y_1 = \{\text{ciudadanas españolas colegiadas como Notarias}\}$$

A continuación, formemos una nueva clase, Y_2, en la que aparezca también como elemento la clase (y conjunto) W de § 2.77. Y sea dicha clase:

$$Y_2 = \{U, V, W\}$$

Pues bien, entonces comprobaremos enseguida que la clase intersección de dicha clase, resulta ser vacía. Esto es:

$$\bigcap Y_2 = \varnothing$$

Y ello es así, en efecto, debido a que, como comentamos en su momento, no hay ningún Notario en España, mujer u hombre, que tenga 21 años —ni es probable que lo haya nunca, a menos que se suavicen extraordinariamente los requisitos de acceso—.

Y ya para terminar, formemos una tercera clase, Y_3, que tenga como miembros a U y a V, y también a un individuo particular concreto, por ejemplo la cantante colombiana Shakira. Tendremos entonces, en definitiva:

$$Y_3 = \{U, V, \text{Shakira}\}$$

Pues bien, también en este caso tendremos

$$\bigcap Y_3 = \varnothing$$

por la sencilla razón de que Y_3 posee entre sus elementos a un individuo, y los individuos, por definición, no tienen elementos.

§ 2.83. Práctica (Clase unión y clase intersección).

(a) Dar un ejemplo de clase, G_1, tal que $\bigcup G_1 = \varnothing$.

(b) Dar un ejemplo de clase, G_2, tal que $\bigcup G_2 \neq \varnothing$. Especificar cuáles son los elementos de $\bigcup G_2$.

(c) Dar un ejemplo de clase, G_3, tal que $\bigcap G_3 = \varnothing$.

(d) Dar un ejemplo de clase, G_4, tal que $\bigcap G_4 \neq \varnothing$. Especificar cuáles son los elementos de $\bigcap G_4$.

Utilizar ejemplos distintos a los ya aparecidos en el Manual. Razonar la respuesta en todos los casos. En particular, cada vez que una clase aparezca como elemento de otra, mostrar que la clase que aparece como elemento constituye efectivamente un conjunto.

§ 2.84. Observación (Clase intersección del conjunto vacío). Consideremos ahora al conjunto vacío, $\varnothing$. Pues bien, la clase intersección de $\varnothing$ reunirá a aquellos objetos que pertenezcan a todos los elementos de $\varnothing$. Pero como $\varnothing$ no tiene elementos, entonces dado cualquier objeto x, sería trivialmente verdadero decir que "x pertenece a todos los elementos de $\varnothing$".

Por consiguiente, dado cualquier objeto x, podemos decir:

$$x \in \bigcap \varnothing$$

En otras palabras, resulta que $\bigcap \varnothing$ reúne a todos los objetos, sin excepción. Se trata, por consiguiente, de la clase de todos los objetos.

Y ya sabemos por § 2.52 (p. 41), que la clase de todos los objetos es una clase propia, y no un conjunto.

§ 2.85. Observación (Problema 3). Este es el momento apropiado para plantearse la respuesta al *Problema 3* del listado de *Problemas propuestos* (p. 9).

§ 2.86. Definición (Diferencia entre clases). Si C y D son clases cualesquiera, entonces la *diferencia entre C y D* (o clase C *menos* D, abreviadamente, "$C - D$"), es la clase resultante de reunir a todos aquellos elementos de C que *no* pertenecen a D:

$$C - D =_{def.} \{x : x \in C \text{ pero } x \notin D\}$$

Por ejemplo, volviendo a los conjuntos U y V de antes, la diferencia $U - V$ consistirá evidentemente en la clase de todas las ciudadanas españolas de 21 años que *no* han nacido en la Región de Murcia. Y por su parte, la diferencia $V - U$ consistirá en la clase de todas ciudadanas de Murcia que *no* tienen 21 años (en la fecha indicada).

Los axiomas de infinitud y del conjunto potencia

§ 2.87. Definición (Clase potencia). Si C es una clase cualquiera, la *clase potencia* de C (abreviadamente, "$\mathscr{P}(C)$"), es la clase que tiene como elementos a todos aquellos *conjuntos* que están incluidos en C.

Por ejemplo, retomemos nuestra vieja clase $X = \{\text{Sol, Luna}\}$, y veamos cuáles serán los elementos de su correspondiente clase potencia $\mathscr{P}(X)$.

Evidentemente, la clase unitaria $\{\text{Sol}\}$ está incluida en X, dado que su único elemento es un elemento de X. Y lo mismo ocurre con la clase unitaria $\{\text{Luna}\}$. Es decir, tenemos:

$$\{\text{Sol}\} \subseteq X \qquad\qquad \{\text{Sol}\} \subseteq X$$

Por otra parte, el conjunto vacío también está incluido en X, ya que como dijimos en su momento, el conjunto vacío está incluido absolutamente en cualquier conjunto (cf.

§ 2.60, p. 42). Y por otra parte, trivialmente también, la propia clase X está incluida en sí misma. Por lo que podemos concluir:

$$\varnothing \subseteq X \qquad\qquad X \subseteq X$$

Resulta inmediato comprobar que cada una de las cuatro clases señaladas constituyen conjuntos. Y también resulta inmediato comprobar que no hay ningún otro conjunto (ni clase) que esté incluido en X.

Por consiguiente, podemos concluir:

$$\mathscr{P}(X) = \{\, \varnothing, \{\text{Sol}\}, \{\text{Luna}\}, X \,\}$$

§ 2.88. Práctica⋆ (Clase potencia). Sea ahora Z la clase:

$$Z = \{\text{Sol, Luna, Tierra}\}$$

Describir la clase potencia de Z.

§ 2.89. Axioma (Axioma del conjunto potencia, AP). *La clase potencia de un conjunto es siempre un conjunto.*

§ 2.90. Observación (El axioma del conjunto potencia). La idea de este axioma es que si la clase de la que partimos es un conjunto, entonces su clase potencia, aunque sea de un tamaño sensiblemente mayor, también será necesariamente un conjunto, y no una clase propia.

En su momento demostraremos que, efectivamente, el "tamaño" del conjunto potencia de un conjunto dado, es siempre "mayor" que el de éste. En el sentido técnico que se da a estos términos dentro de la teoría de conjuntos, y que nosotros estudiaremos en el Módulo 5.

Precisamente por eso, el axioma del conjunto potencia, combinado con el axioma de infinitud, resulta crucial para establecer la existencia de conjuntos de gran tamaño, como también veremos en su momento.

§ 2.91. Práctica⋆ (Clase de conjuntos cuya clase unión es un conjunto). Mostrar que si todos los elementos de una clase C son conjuntos y $\bigcup C$ también es un conjunto, entonces la propia C ha de ser a su vez un conjunto. Utilizar para ello el axioma del conjunto potencia y el axioma de separación.

§ 2.92. Axioma (Axioma de infinitud, AI). *Existe un conjunto $\mathscr{X}$ tal que $\varnothing \in \mathscr{X}$ y para cualquier conjunto x, si $x \in \mathscr{X}$ entonces también $x \cup \{x\} \in \mathscr{X}$.*

§ 2.93. Observación (El axioma de infinitud). Lo que estipula el axioma de infinitud, en definitiva, son dos cosas:

(a) $\varnothing \in \mathscr{X}$;

(b) $x \cup \{x\} \in \mathscr{X}$ para cualquier conjunto $x \in \mathscr{X}$.

En cuanto a la cláusula (b), salta a la vista que si x es un conjunto, también lo serán a su vez tanto $\{x\}$ como la correspondiente $x \cup \{x\}$. Por lo que tiene sentido postular que esta última clase pertenezca a $\mathscr{Z}$.

El axioma de infinitud tiene dos misiones principales, íntimamente relacionadas. Una es garantizar la existencia de un conjunto infinito. Y la otra es proporcionar un conjunto en cuyo interior se encuentren representados los "correlatos conjuntistas" de los números naturales. Vamos a verlo.

§ 2.94. Convención (Correlato conjuntista del número 0). Por efecto de la cláusula (a) del axioma de infinitud, salta a la vista que el conjunto vacío pertenece a $\mathscr{Z}$ Esto es, tenemos: $\varnothing \in \mathscr{Z}$.

Pues bien, a partir de este momento convendremos en que dicho conjunto, $\varnothing$, constituye lo que nosotros vamos a llamar *"correlato conjuntista"* del número 0. O puesto de otro modo, a partir de este momento nosotros adoptaremos como *"redefinición"* del número 0, al conjunto $\varnothing$:

$$0 =_{def.} \varnothing$$

§ 2.95. Convención (Correlato conjuntista del número 1). A continuación, procedemos a aplicar al conjunto 0 la cláusula (b) del axioma de infinitud. El resultado será el conjunto $0 \cup \{0\}$, que por efecto del mencionado axioma, también pertenecerá a $\mathscr{Z}$:

$$(0 \cup \{0\}) \in \mathscr{Z}$$

Pues bien, a partir de este momento convendremos en que dicho conjunto, $0 \cup \{0\}$, constituye lo que nosotros vamos a llamar *"correlato conjuntista"* del número 1.

Ahora bien: ¿cuáles son los elementos de ese conjunto, $0 \cup \{0\}$, que acabamos de consagrar como representante del número 1? Pues serán todos los elementos del conjunto 0, más todos los elementos del conjunto unitario $\{0\}$. Evidentemente $0 = \varnothing$, por lo que este conjunto no tiene ningún elemento. Y por otra parte, el único elemento del conjunto unitario $\{0\}$ es el propio 0.

Por consiguiente, el conjunto $1 = 0 \cup \{0\}$ será a su vez un conjunto unitario con un único elemento, a saber: el propio 0. En definitiva:

$$1 \;=\; 0 \cup \{0\} \;=\; \{0\}$$

Resumiendo, lo que hemos venido a hacer es adoptar como *"redefinición"* del número 1, al propio conjunto $\{0\}$:

$$1 =_{def.} \{0\}$$

§ 2.96. Convención (Correlato conjuntista del número 2). No contentos con esto, procedemos a aplicar una vez más la cláusula (b) del axioma de infinitud a este último conjunto, obtenido por el procedimiento que se acaba de detallar. Es decir: procedemos a aplicar la cláusula (b) de (AI) al conjunto 1.

El resultado será, sin duda, el conjunto $1 \cup \{1\}$. Conjunto que, por efecto del tal axioma, también habrá de pertenecer sin duda a $\mathscr{Z}$:

$$(1 \cup \{1\}) \in \mathscr{Z}$$

Pues bien, a partir de este momento convendremos en que dicho conjunto, $1 \cup \{1\}$, constituye lo que nosotros vamos a llamar *"correlato conjuntista"* del número 2.

Y ¿cuáles son los elementos del susodicho conjunto, $1 \cup \{1\}$, que acabamos de consagrar como representante del número 2? Pues serán todos los elementos del conjunto 1, más todos los elementos del correspondiente conjunto $\{1\}$. Ahora, veamos. El conjunto 1 tiene exactamente *un* elemento, según acabamos de decir, que es el propio 0. Y el conjunto $\{1\}$ es también obviamente un conjunto unitario, cuyo único elemento es el propio conjunto 1.

Por consiguiente, la unión de esos dos conjuntos, consistirá en la reunión de sus dos elementos respectivos:

$$1 \cup \{1\} \ = \ \{0, 1\}$$

Y por tanto, podemos concluir que lo que estamos haciendo, en definitiva, es adoptar como *"redefinición"* del número 2, al conjunto $\{0, 1\}$:

$$2 \ =_{def.} \ \{0, 1\}$$

Pero la cosa sigue.

§ 2.97. Convención (Correlato conjuntista del número 3). En efecto, apliquemos renuentemente la cláusula (b) de nuestro preciado axioma, al conjunto 2. El resultado no podrá ser otro que el conjunto $2 \cup \{2\}$. Conjunto que sin más remedio habrá de pertenecer al gran $\mathscr{Z}$:

$$(2 \cup \{2\}) \cup \mathscr{Z}$$

Huelga decir que a partir de este momento convendremos en que dicho conjunto, $2 \cup \{2\}$, constituirá nuestro particular *"correlato conjuntista"* del número 3.

Los elementos de ese conjunto 3, así formado, serán los siguientes. Resultarán de la reunión de todos los elementos del conjunto 2, que ya conocemos, con el único elemento del conjunto unitario $\{2\}$.

Por consiguiente, el resultado no puede ser otro que:

$$2 \cup \{2\} \ = \ \{0, 1, 2\}$$

Con lo que, en resumen, podemos decir que lo que estamos haciendo es justamente adoptar como *"redefinición"* del número 3, al conjunto $\{0, 1, 2\}$:

$$3 \ =_{def.} \ \{0, 1, 2\}$$

§ 2.98. Convención (Correlatos conjuntistas de los restantes números naturales). Es evidente que el proceso que se acaba de describir es susceptible de ser reiterado hasta el infinito, pudiendo obtener así un correlato conjuntista para cualquier número natural dado, por grande que sea.

Además, salta a la vista que todos los conjuntos así formados serán, efectivamente, *conjuntos*, ya que se van formando sucesivamente por unión de dos conjuntos previamente constituidos.

§ 2.99. Observación (Infinitud del conjunto $\mathscr{Z}$). Y por añadidura, salta a la vista también, que cada nuevo conjunto que se define mediante el procedimiento descrito resulta ser distinto a todos los anteriores. En efecto, para ello basta con contar el número de elementos de cada uno: el conjunto 0 tiene 0 elementos; el conjunto 1 tiene exactamente 1 elemento; el conjunto 2 tiene exactamente 2 elementos, y así sucesivamente.

Por lo tanto se tiene que tratar necesariamente de conjuntos distintos. Y al haber una infinidad de ellos, queda claro que el conjunto $\mathscr{Z}$, postulado por axioma de infinitud, es en efecto un *conjunto infinito*, haciendo honor al nombre de dicho axioma.

§ 2.100. Observación (Los números naturales en lenguaje puramente conjuntista). Los correlatos de los números naturales también se pueden expresar en términos puramente conjuntistas, esto es, sin utilizar los números ya definidos como abreviatura para definir los siguientes.

El resultado es exactamente equivalente, si bien algo más abstruso, o difícil de leer. La razón es que los números naturales resultan sobrenombres de gran ayuda para identificar los conjuntos correspondientes. Por consiguiente, cuesta trabajo prescindir de ellos.

Así se puede comprobar inmediatamente, comparando la descripción de estos conjuntos que nosotros hemos venido dando hasta ahora, con su transcripción a un lenguaje puramente conjuntista:

$$\begin{array}{lcl cl}
0 & = & \varnothing & = & \varnothing \\
1 & = & \{\,0\,\} & = & \{\,\varnothing\,\} \\
2 & = & \{\,0\,,\,1\,\} & = & \{\,\varnothing\,,\,\{\varnothing\}\,\} \\
3 & = & \{\,0\,,\,1\,,\,2\,\} & = & \{\,\varnothing\,,\,\{\varnothing\}\,,\,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\,\} \\
 & & & \ldots &
\end{array}$$

MÓDULO 3

Relaciones y funciones

El producto cartesiano

§ 3.1. Observación (Anticipación de la definición conjuntista de secuencia). En el lenguaje ordinario, una "secuencia" de objetos viene a ser una pluralidad de objetos ordenada sucesivamente. Es decir, una pluralidad de objetos dispuesta a modo de "cola": con un objeto situado en el primer puesto de la cola, otro situado en el segundo, y así sucesivamente.

También el concepto de *secuencia*, de capital importancia en matemáticas, tiene un correlato en la teoría de conjuntos. Si bien hay que advertir que se trata de un correlato algo forzado, o artificioso.

La definición conjuntista de *secuencia* procede, esencialmente, en dos etapas. En primer lugar se define el concepto de *par ordenado de objetos*, esto es: el caso de aquellas secuencias que sólo constan de dos puestos, o lugares, en la cola. Y a continuación se define el caso más general de *secuencia finita de objetos*, en la que entran todas las secuencias que constan de una cantidad finita de puestos.

§ 3.2. Definición (Par ordenado). Para cualesquiera objetos a y b, llamamos *"par ordenado"* de a y b (abreviadamente, "(a, b)"), a la correspondiente clase

$$\{\,\{a\}\,,\,\{a,b\}\,\}$$

Donde el objeto a recibe el nombre de *"primer componente"*, y el objeto b recibe el nombre de *"segundo componente"*.

§ 3.3. Convención (Expresiones numerarias). En relación con las secuencias, y otros conceptos conjuntistas derivados de ellas, se suelen utilizar ciertas expresiones que podríamos llamar "expresiones numerarias". Estas expresiones son *"1-ario"*, *"2-ario"*, *"3-ario"*, *"4-ario"*, *"5-ario"*, *"6-ario"*, y así sucesivamente. En general, por lo tanto, se dirá *"n-ario"* para cualquier número natural $n \geqslant 1$.

Algunas de estas expresiones tienen nombre propio, como por ejemplo:

"monario",	que es sinónimo de	"1-ario"
"binario",	"	"2-ario"
"ternario",	"	"3-ario"
"cuaternario",	"	"4-ario"

Hay más expresiones numerarias con nombre propio, pero estos cuatro primeros son los más habituales, y los únicos que se utilizarán en la presente asignatura.

§ 3.4. Definición (Secuencias finitas). Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ objetos cualesquiera. Entonces, definimos la *secuencia n-aria* de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, en ese orden (abreviadamente, "$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$"), estipulando que:

(a) Si $n = 0$, no hay ningún objeto a considerar. Se trata por tanto de lo que llamaremos *"la secuencia vacía"* (abreviadamente, "$( )$"). Y en tal caso convendremos en identificar a dicha secuencia con el conjunto vacío:

$$( ) =_{def.} \varnothing$$

(b) Si $n = 1$, hay tan sólo un objeto en danza, a_1. En tal caso tenemos una *secuencia monaria* (abreviadamente, "(a)"). Y estipulamos que dicha secuencia es idéntica al propio objeto a_1 en cuestión:

$$(a_1) =_{def.} a_1$$

(c) Si $n = 2$, entonces se trata de una *secuencia binaria*, y estipulamos que es idéntica al par ordenado de a_1 y a_2, esto es, a la clase (a_1, a_2).

(d) Si $n = 3$, entonces definimos la correspondiente *secuencia ternaria* (a_1, a_2, a_3) como el par ordenado:

$$(a_1, a_2, a_3) =_{def.} (\,(a_1, a_2)\,,\ a_3\,)$$

Esto es: definimos la secuencia ternaria (a_1, a_2, a_3) como un par ordenado, cuyo primer componente es el par ordenado (a_1, a_2), y cuyo segundo componente es el objeto a_3.

(e) Si $n = 4$, entonces definimos la correspondiente *secuencia cuaternaria* (a_1, a_2, a_3, a_4) como el par ordenado:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) =_{def.} (\,(a_1, a_2, a_3)\,,\ a_4\,)$$

Esto es: definimos la secuencia cuaternaria (a_1, a_2, a_3, a_4) como un par ordenado, cuyo primer componente es la secuencia ternaria (a_1, a_2, a_3), y cuyo segundo componente es el objeto a_4.

(f) Y así sucesivamente. En general, por consiguiente, para cada $n \geqslant 1$ la correspondiente *secuencia n-aria* $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$ será igual por definición al par ordenado $((a_1, a_2, \ldots, a_n), a_{n+1}))$.

Dada una secuencia n-aria $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, diremos que: a_1 es el *"primer componente"* de la secuencia; a_2 es su *"segundo componente"*; y así sucesivamente, hasta llegar a a_n, que será el *"n-ésimo componente"* de la secuencia en cuestión.

§ 3.5. Observación (Secuencias finitas). Utilizando el axioma de emparejamiento (A2), es inmediato comprobar que todas las secuencias de objetos son conjuntos, a excepción de las regidas por la cláusula (b).

Además, hay que tener en cuenta que las secuencias de la cláusula (b), esto es, las secuencias monarias, son objetos. Y que todos los conjuntos son también objetos. Por consiguiente, se sigue que todas las secuencias finitas son a su vez objetos, sin excepción.

§ 3.6. Observación (Orden en los elementos de una secuencia). En las secuencias, a diferencia de lo que ocurre con los conjuntos ordinarios, el orden en que vengan dados los componentes resulta ser muy importante.

Por ejemplo, los pares ordenados (a, b) y (b, a) serán distintos, siempre que los propios objetos a y b sean también distintos. En efecto, supongamos que $a \neq b$. Entonces tendremos también, obviamente, $\{a\} \neq \{b\}$. Y por consiguiente, los correspondientes conjuntos

$$\begin{array}{rcl} (a,b) & = & \{\,\{a\}\,,\,\{a,b\}\,\} \\ (b,a) & = & \{\,\{b\}\,,\,\{b,a\}\,\} \end{array}$$

diferirán en uno de sus elementos, y serán por consiguiente conjuntos distintos.

Nótese, sin embargo, que los dos citados conjuntos no difieren en su otro elemento. En efecto, por el axioma de extensionalidad, los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{b, a\}$, son idénticos.

Así se pone de manifiesto la diferencia entre el concepto de *par ordenado* y el concepto de *par* a secas, que definimos en § 2.37 (p. 37): dados dos objetos $a \neq b$, tenemos $\{a, b\} = \{b, a\}$ mientras que $(a, b) \neq (b, a)$.

§ 3.7. Práctica⋆ (Orden en los elementos de una secuencia). Sean a, b y c tres objetos distintos. Verificar que

$$(a, b, c) \neq (b, a, c)$$

§ 3.8. Observación (Repeticiones en los elementos de una secuencia). Por otra parte, si resulta que los objetos a y b son iguales, entonces la cosa cambia. En efecto, si tenemos $a = b$, entonces evidentemente el par ordenado (a, b) sí será a su vez idéntico al par (b, a). En tal caso lo que tenemos en realidad es un par ordenado de la forma (a, a):

$$\begin{array}{rcl} (a,a) & = & \{\ \{a\}\ ,\ \{a,a\}\ \} \\ & = & \{\ \{a\}\ ,\ \{a\}\ \} \\ & = & \{\ \{a\}\ \} \end{array}$$

Obsérvese, sin embargo, que ese conjunto es bien distinto al objeto que corresponde a la secuencia monaria de a. En efecto, por definición estipulamos que la secuencia monaria (a) era igual al propio objeto a:

$$(a) = a$$

Y naturalmente, como sabemos, el objeto a es bien distinto al conjunto unitario $\{\{a\}\}$.

Ahora bien. Acabamos de comprobar que la secuencia monaria (a) es distinta a la secuencia binaria (a, a). Por consiguiente, queda claro que en las secuencias también es importante tener en cuenta las posibles repeticiones de objetos entre sus componentes.

En este aspecto, las secuencias de objetos se parecen más bien a las colas de algunas carnicerías y organismos oficiales, que están reguladas mediante tiques. Ello hace posible que una misma persona coja varios tiques, y que consiga así ocupar varios lugares diferentes en la misma cola.

§ 3.9. Definición (Producto cartesiano). Si $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son clases cualesquiera (para algún número natural $n \geqslant 1$), su *producto cartesiano* en ese orden (abreviadamente, "$C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$") es la clase de todas las secuencias n-arias cuyos componentes pertenecen:

el primero, a C_1
el segundo, a C_2
...
el n-ésimo, a C_n

Puesto de otra forma:

$$C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n =_{def.} \{x : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ donde } x_1 \in C_1, x_2 \in C_2, \ldots, x_n \in C_n\}$$

Por ejemplo, si tomamos los conjuntos

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{a_1, a_2, a_3\} \\ V & = & \{b_1, b_2\} \\ W & = & \{c\} \end{array}$$

entonces obviamente:

$$\begin{array}{rcllll} U \times V \times W & = & \{ & (a_1, b_1, c), & (a_1, b_2, c), & \\ & & & (a_2, b_1, c), & (a_2, b_2, c), & \\ & & & (a_3, b_1, c), & (a_3, b_2, c) & \} \end{array}$$

§ 3.10. Práctica* (Producto cartesiano). Calcular $U \times V$, siendo U y V como en la sección anterior.

§ 3.11. Observación (Producto cartesiano con el conjunto vacío). Si alguna de las clases multiplicadas en $C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n$ resulta ser el conjunto vacío, entonces no existirán las correspondientes secuencias cuyos componentes hayan de pertenecer a $\varnothing$. Y por consiguiente, todo el producto cartesiano dará como resultado el conjunto vacío.

Por otra parte, el único caso en que el producto cartesiano puede ser vacío es precisamente ése: aquél en que una de las clases multiplicadas resulte ser vacía.

En consecuencia podemos concluir:

$$C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n = \varnothing \text{ si y sólo si al menos una de } C_1, C_2, \ldots, C_n \text{ es el propio } \varnothing$$

§ 3.12. Definición (Potencia cartesiana). Por último, dada una clase C, y un número natural n, la *n-ésima potencia cartesiana* de C (abreviadamente, "C^n"), es el resultado de efectuar el producto cartesiano de la clase C consigo misma, n veces:

$$C^n =_{def.} \overbrace{C \times C \times \ldots \times C}^{n \text{ veces}}$$

En otras palabras: C^n constituye el conjunto de secuencias n-arias todos cuyos componentes son elementos de C.

En particular, se ve inmediato que para cualquier clase C, tenemos $C^1 = C$, y $C^0 = \{\,(\,)\,\} = \varnothing$.

Por ejemplo, volviendo al conjunto $V = \{b_1, b_2\}$ de § 3.9, tenemos:

$$V^0 = \varnothing \qquad\qquad V^1 = V$$

$$V^2 = V \times V = \{\,(b_1, b_1)\,,\,(b_1, b_2)\,,\,(b_2, b_1)\,,\,(b_2, b_2)\,\}$$

Así como

$$\begin{array}{rcccl} V^3 & = & V \times V \times V & = & \{\ (b_1, b_1, b_1),\ \ (b_1, b_1, b_2), \\ & & & & \phantom{\{}\ (b_1, b_2, b_1),\ \ (b_1, b_2, b_2), \\ & & & & \phantom{\{}\ (b_2, b_1, b_1),\ \ (b_2, b_1, b_2), \\ & & & & \phantom{\{}\ (b_2, b_2, b_1),\ \ (b_2, b_2, b_2)\ \ \} \end{array}$$

Etc.

§ 3.13. Práctica⋆ (Potencia cartesiana). Volviendo al conjunto $U = \{a_1, a_2, a_3\}$ de § 3.9, detallar cuáles son los elementos de U^0, U^1 y U^2.

Relaciones y funciones

§ 3.14. Observación (Anticipación de la definición conjuntista de relación). Otro concepto de gran importancia, en matemáticas y fuera de ellas, es el de *relación* entre objetos.

Un ejemplo de relación es la relación de *maternidad*, o *ser madre de*, es decir: aquella relación que mantiene una mujer con todos y cada uno de sus hijos, por el hecho de serlo.

Las relaciones pueden clasificarse por el número de objetos que involucran, esto es, por el número de objetos que hacen falta para que se pueda dar la relación. Por ejemplo, la relación *ser madre de* involucra exactamente dos objetos, la madre y el hijo, que son los objetos (o individuos) conectados por esa relación. Mientras que la relación *comprar algo a alguien* involucra tres objetos: el comprador, el vendedor, y el objeto de la transacción.

Pues bien: a las relaciones que involucran dos objetos las llamamos *"binarias*, a las que involucran tres objetos las llamamos *"ternarias"*, y así sucesivamente.

Ni qué decir tiene que el orden en que se presentan los objetos es fundamental para determinar si una relación determinada se da o no. Por ejemplo, la relación *ser madre de* se da entre la Reina Sofía y el Príncipe Felipe, *tomados en ese orden.* No, evidentemente, en el orden contrario.

Por otra parte, también las posibles repeticiones hay que considerarlas. Así, a veces una relación binaria se establece no exactamente entre dos objetos *distintos*, sino con un único objeto, pero que aparece desempeñando dos roles diferentes. Por ejemplo, la relación *ser biógrafo de* se suele dar entre dos personas distintas, cuando una escribe la biografía de la otra. Pero también, ocasionalmente, se da entre una persona y ella misma, cuando alguien escribe su propia biografía (es decir, su *autobiografía*).

Por todo ello, la forma natural y conveniente de representar las relaciones dentro de la teoría de conjuntos, es mediante el concepto de *secuencia* de objetos.

§ 3.15. Observación (Anticipación de la definición conjuntista de propiedad). Por su parte, un concepto afín al de relación entre objetos, también de enorme importancia, es el de *propiedad* de un objeto dado. Por ejemplo, la propiedad de *ser un tigre*. Ya en § 1.9 (p. 19) anticipamos de pasada la diferencia entre propiedades y relaciones.

En las propiedades hay sólo un objeto involucrado, exactamente uno. Por ello, en teoría de conjuntos se las considera como un caso especial de relación, que afecta específicamente a un solo objeto. Es decir: como *relaciones monarias*.

§ 3.16. Definición (Relación; propiedad). Sea C una clase de objetos. Entonces, para cualquier número natural $n \geqslant 1$, una *relación n-aria definida en C* es cualquier clase de secuencias n-arias de miembros de C. Es decir, cualquier subclase de C^n.

En particular, a la propia C^n (que es trivialmente subclase de sí misma), la llamamos *"relación n-aria universal"* dentro de C.

A su vez, el conjunto $\varnothing$ también será siempre, trivialmente, una subclase de C^n. Y por lo tanto constituirá una relación n-aria definida en C. Pues bien, dicho conjunto recibirá el nombre de *"relación n-aria vacía"* dentro de C.

Por último, a las relaciones monarias las llamaremos también *"propiedades"*. Lo cual incluye, naturalmente, a las correspondientes relaciones monarias universal y vacía (o *propiedad universal* y *propiedad vacía*) definidas dentro de cualquier clase dada.

Por ejemplo. Tomemos ahora tres objetos distintos cualesquiera, a, b y c, y consideremos el correspondiente conjunto

$$X = \{a, b, c\}$$

Pues bien, para verificar cuáles son las posibles relaciones binarias definidas en X, empezamos por examinar su correspondiente potencia cartesiana al cuadrado:

$$\begin{array}{rcllll} X^2 & = & \{ & (a,a), & (a,b), & (a,c), \\ & & & (b,a), & (b,b), & (b,c), \\ & & & (c,a), & (c,b), & (c,c) \quad \} \end{array}$$

Naturalmente, el propio conjunto X^2 será ya una relación binaria en X. Concretamente, X^2 será la relación binaria universal definida dentro de X.

Y a partir de ahí, cualquier posible subconjunto de X^2 constituirá asimismo una relación binaria en X. Por ejemplo,

$$S = \{(a,b), (b,c), (c,c)\} \qquad T = \{(a,a), (a,b), (b,b), (b,c), (c,c)\}$$

Así como el propio $\varnothing$, por supuesto, que constituye la relación binaria vacía dentro de X.

Por su parte, ejemplos de propiedades (o relaciones monarias) definidas en X serían:

$$P = \{a, b\} \qquad Q = \{c\}$$

Así como, naturalmente, el propio conjunto X (propiedad universal en X) y $\varnothing$ (propiedad vacía en X).

Y por último, un ejemplo de relación ternaria en X, sería:

$$T' = \{(a,a,a), (a,b,c), (a,b,b), (c,b,a)\}$$

§ 3.17. Práctica (Relaciones y propiedades). Continuando con el mismo X, proponer un ejemplo de relación monaria, otro de relación binaria, y otro ternaria, todos ellos definidos en X. Y todos ellos, naturalmente, distintos de los propuestos en § 3.16.

§ 3.18. Convención (Notación para relaciones y propiedades). Si R es una relación n-aria para algún $n \geqslant 1$, y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son objetos cualesquiera, entonces pondremos "$R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$" para indicar que la secuencia de objetos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pertenece a la relación R. Esto es:

$$R(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \text{si y sólo si} \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$$

Y pondremos a su vez "$\sim R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$" para indicar que la secuencia de objetos $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *no* pertenece a la relación R. Esto es:

$$\sim R(a_1, a_2, \ldots, a_n) \qquad \text{si y sólo si} \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n) \notin R$$

Por ejemplo, retomando los ejemplos anteriores, tenemos obviamente, entre otros:

$$\begin{array}{cccccc}
X^2(a,a) & X^2(a,b) & X^2(a,c) & X^2(b,c) & X^2(c,b) & X^2(c,c) \\
S(a,b) & S(b,c) & S(c,c) & \sim S(a,c) & \sim S(b,a) & \sim S(c,c) \\
T(a,a) & T(a,b) & T(c,c) & \sim T(a,c) & \sim T(b,a) & \sim T(c,a) \\
T'(a,a,a) & \sim T'(b,b,b) & P(a) & P(b) & \sim P(c) & Q(c)
\end{array}$$

§ 3.19. Práctica (Notación para relaciones y propiedades). Utilizando las relaciones propuestas en § 3.17, describir 2 casos distintos en que una determinada secuencia de objetos cumple una cierta relación. Describir otros 2 casos distintos en que una determinada secuencia *no* cumple una relación. Emplear para ello la notación que se acaba de introducir.

§ 3.20. Observación (Anticipación de la definición conjuntista de función). Otro concepto de amplísimo uso en matemáticas, y en toda la ciencia, es el de *función*, u *operación*. Consiste básicamente en un proceso abstracto mediante el cual unos objetos se transforman en otros.

Un ejemplo es la operación de *elevar al cuadrado*. Al elevar al cuadrado el número 7, obtenemos otro número, el 49. Y al elevar al cuadrado el número 12, obtenemos el 144.

En teoría de conjuntos, las funciones se identifican con un tipo especial de relaciones binarias. Concretamente, para que una relación binaria R sea una función, exigiremos que para cualesquiera pares ordenados (x, y), (x, z):

$$\text{si} \qquad (x,y) \in R \qquad \text{y} \qquad (x,z) \in R \qquad \text{entonces} \qquad y = z$$

O puesto de otro modo, utilizando nuestra convención:

$$\text{si} \qquad R(x,y) \qquad \text{y} \qquad R(x,z) \qquad \text{entonces} \qquad y = z$$

A la condición que acabamos de especificar se la conoce, a veces, como *"condición de funcionalidad"*. Su efecto es el de imponer que R sólo pueda ligar un objeto x con otro distinto, a lo sumo, pero nunca con más de uno.

Según esto, por ejemplo, la relación binaria *ser el signo del Zodiaco de* constituirá una función, porque cada persona tiene asignado un único signo en el cuadro zodiacal, según su fecha de nacimiento. Mientras que la relación binaria *ser madre de no* constituirá función, porque evidentemente resulta posible que una mujer tenga más de un hijo.

Como se puede ver, el tipo de funciones matemáticas que estamos representando, es básicamente el de las llamadas funciones "de una sola variable" y de un único resultado posible en cada caso. Otras funciones matemáticas más complicadas resultarán fácilmente definibles a partir de estas. Por ejemplo, una función de dos variables se puede representar como una función que se aplica a secuencias binarias de objetos. Y una función que arroje dos o más valores en una sola aplicación, se puede representar como una función cuyos valores son conjuntos de objetos.

§ 3.21. Definición (Función). Una *función* es una relación binaria f tal que para cualesquiera pares ordenados (x, y), (x, z), tenemos:

$$\text{si} \qquad (x,y) \in f \qquad \text{y} \qquad (x,z) \in f \qquad \text{entonces} \qquad y = z$$

El *dominio* de una función f (abreviadamente, "$dom\,(f)$"), será la clase de todos aquellos objetos que constituyen primer componente de algún par ordenado perteneciente a la función. Puesto de otra forma:

$$dom\,(f) \ =_{def.} \ \{x : \text{ existe algún } y \text{ tal que } (x,y) \in f\}$$

A los objetos pertenecientes al dominio de una función los llamamos también *"argumentos"* de la función.

Por su parte, dada una función f, y un objeto x perteneciente al dominio de f, llamaremos *"valor"* de x bajo la función f, a aquel objeto y tal que $(x, y) \in f$. Dicho objeto habrá de ser único, por la condición de funcionalidad, y lo denotaremos directamente como "$f(x)$". Por consiguiente tenemos:

$$\text{para todo } x \in dom\,(f), \qquad f(x) = y \qquad \text{si y sólo si} \qquad (x,y) \in f$$

Finalmente, el *rango* de una función f (abreviadamente, "$ran\,(f)$"), será la clase de todos los objetos que constituyen valores bajo f de algún argumento. Esto es:

$$ran\,(f) \ =_{def.} \ \{y : \text{ existe algún } x \text{ tal que } (x,y) \in f\}$$

O puesto de otro modo

$$ran\,(f) \ =_{def.} \ \{y : \text{ existe algún } x \text{ tal que } f(x) = y\}$$

Volviendo a los ejemplos de § 3.16, la relación binaria S allí definida constituye un caso claro de función, con $dom\,(S) = X$ y $ran\,(S) = \{b, c\}$. Mientras que la relación T, también binaria, no cumple la condición de funcionalidad, al tener por ejemplo $(a, a) \in T$ y $(a, b) \in T$. Por consiguiente, la relación T no puede ser considerada una función.

§ 3.22. Práctica (Funciones).

(a) Determinar si alguna de las relaciones propuestas en § 3.17 son funciones.

(b) En caso afirmativo, determinar el dominio y rango de una de ellas.

(c) En caso negativo, proponer otro ejemplo de función, distinta de S, pero que también constituya una relación definida sobre el conjunto X de § 3.16. Determinar su dominio y su rango.

§ 3.23. Observación (Extensionalidad aplicada a relaciones y funciones). Al considerar las relaciones, y por tanto también las funciones, como clases, una consecuencia inmediata es que el axioma de extensionalidad (AX) se proyecta automáticamente sobre unas y otras

Así, sucede que si dos funciones dan de hecho los mismos valores, esto es, si constituyen la misma clase de pares ordenados, entonces la teoría de conjuntos las considerará idénticas. Es decir: considerará que son una y la misma función, aunque hayan sido definidas atendiendo a procedimientos distintos.

Y otro tanto ocurrirá con el resto de las relaciones, incluidas, cómo no, las propiedades. Por ejemplo, la propiedad de *ser una especie animal dotada de riñones* será idéntica a la propiedad de *ser una especie animal dotada de corazón*. Y ello es así exactamente por las mismas razones que ya comentamos en su momento, al describir las consecuencias de la aplicación del axioma de extensionalidad a las clases (cf. § 2.9, p. 30).

§ 3.24. Observación (El conjunto vacío es una función). Como se puede apreciar de inmediato, el propio conjunto vacío $\varnothing$ constituye trivialmente una función. Concretamente, con

$$dom\,(\varnothing) = ran\,(\varnothing) = \varnothing$$

.

§ 3.25. Definición (Imagen de una función). Sea f una función, y C cualquier clase tal que $C \subseteq dom\,(f)$. Entonces, la *imagen* de C bajo f (abreviadamente, "$f[C]$"), es la clase de todos los valores que toma f para objetos de C:

$$f[C] =_{def.} \{\, y : \, y = f(x) \text{ para algún } x \in C \,\}$$

§ 3.26. Observación (Imagen de una función). Evidentemente, la imagen de C bajo f es siempre un subconjunto del propio rango de f:

$$f[C] \subseteq ran\,(f)$$

Concretamente, $f[C]$ será aquella parte de $ran\,(f)$ que corresponde a los valores que toma f para objetos de C.

§ 3.27. Convención (Funciones). Sea f una función, y C y D dos clases cualesquiera. Decimos que f es una función *"de C en D"* (abreviadamente, "$f : C \longrightarrow D$"), cuando $dom\,(f) = C$ y $ran\,(f) \subseteq D$. Esto es:

$$f : C \longrightarrow D \qquad \text{si y sólo si} \qquad dom\,(f) = C \qquad \text{y} \qquad ran\,(f) \subseteq D$$

Por ejemplo, llamemos ahora "h" a la función S de § 3.16. Pues bien, teniendo en cuenta que $dom\,(h) = X$ y $ran\,(h) = \{b, c\}$, podemos poner:

$$h : X \longrightarrow \{b, c\}$$

Y teniendo en cuenta, además, que $\{b, c\} \subseteq X$, podemos poner también, directamente, por ejemplo:

$$h : X \longrightarrow X$$

§ 3.28. Definición (Función inyectiva, biyectiva, sobreyectiva). Consideremos ahora cualquier función $f : C \longrightarrow D$.

Diremos que f es *"inyectiva"* (o *"función uno a uno"*), cuando suceda que:

$$\text{para cualesquiera } x, y \in dom\,(f), \qquad \text{si} \qquad x \neq y \qquad \text{entonces} \qquad f(x) \neq f(y)$$

Por consiguiente, en resumidas cuentas, una función inyectiva será aquella que al ser aplicada a argumentos distintos, da siempre como resultado valores distintos.

Por su parte, diremos que la función f es *"sobreyectiva respecto de D"*, sencillamente cuando tengamos:

$$ran\,(f) = D$$

Por consiguiente, una función será sobreyectiva respecto de D, cuando todos los elementos de D sean valores bajo dicha función al ser aplicada a algún argumento.

Y finalmente, diremos que f es *"biyectiva entre C y D"* (o *"biunívoca entre C y D"*), cuando se trate de una función inyectiva, y al mismo tiempo sea también una función sobreyectiva respecto de D.

Por ejemplo, volvamos a la función $h : X \longrightarrow X$. Y recordemos que dicha función era idéntica a la relación binaria S de § 3.16. Por consiguiente:

$$h \;=\; \{(a, b), (b, c), (c, c)\}$$

O puesto de otro modo:

$$h(a) \;=\; b \qquad\qquad h(b) \;=\; c \qquad\qquad h(c) \;=\; c$$

Donde, naturalmente, los objetos a, b y c son los tres distintos, según se acordó en § 3.16 (esto es: $a \neq b \neq c \neq a$).

Pues bien, entonces resulta inmediato comprobar que h *no* es una función inyectiva, ya que aunque $b \neq c$, tenemos sin embargo $h(b) = h(c)$. También resulta inmediato comprobar que h *no* es sobreyectiva respecto de X, ya que el elemento a de X no está incluido en su rango: no hay ningún argumento cuyo valor bajo h sea a.

Y por consiguiente, desde luego h *no* es una función biyectiva entre X y X.

Por su parte, h sí se puede considerar una función sobreyectiva respecto del conjunto $\{b, c\}$, que es justamente su rango. Pero sigue sin constituir una función biyectiva entre X y este otro conjunto $\{b, c\}$, por el simple hecho de no ser inyectiva.

§ 3.29. Práctica (Funciones inyectivas, biyectivas y sobreyectivas). Determinar si la función indicada en § 3.22 es:

(a) inyectiva;

(b) sobreyectiva respecto de X;

(c) biyectiva entre X y X;

(d) sobreyectiva respecto de su propio rango;

(e) biyectiva entre X y su propio rango.

§ 3.30. Observación (Funciones inyectivas, biyectivas y sobreyectivas). Evidentemente, como estamos viendo, *toda* función es sobreyectiva respecto de su propio rango.

Por consiguiente, si una función f es inyectiva, entonces automáticamente constituirá una función biyectiva entre $dom\,(f)$ y $ran\,(f)$.

Y por último, debemos observar también que una función biyectiva entre dos clases C y D, forma una especie de "emparejamiento perfecto" entre esas dos clases. Esto es: forma un emparejamiento en el cual, a cada elemento de C le corresponde una única pareja en D, distinta de la que corresponde a los demás, y viceversa, sin que quede ningún elemento por emparejar en ninguna de las dos clases.

El axioma de reemplazo

§ 3.31. Observación (Relaciones, funciones, clases y conjuntos). Hemos definido las funciones como un caso particular de relaciones. Y hemos definido todas las relaciones en general, como *clases*.

Por consiguiente, tanto las funciones como las relaciones, son, en definitiva, clases.

Pues bien, ahora vamos a investigar bajo qué condiciones una relación, y en particular una función, constituye un conjunto.

§ 3.32. Lema (Primer lema del producto cartesiano). *Dadas dos clases C y D no vacías, tenemos:*

$$\textit{si} \qquad C \times D \textit{ es un conjunto,} \qquad \textit{entonces} \qquad \textit{tanto } C \textit{ como } D \textit{ son conjuntos}$$

Prueba. Supongamos en efecto que C y D son clases no vacías, y que $C \times D$ sea un conjunto.

Siendo no vacías, tanto C como D tendrán elementos. Por consiguiente, podemos seleccionar un elemento cualquiera perteneciente a cada una de estas dos clases:

$$a \in C \qquad\qquad b \in D$$

Ahora, por definición, tenemos:

$$(a, b) \in C \times D \tag{1}$$

Y como a su vez $(a, b) = \{\,\{a\}\,,\, \{a, b\}\,\}$, podemos concluir por tanto que:

$$\{a, b\} \in (a, b) \tag{2}$$

De (2) y (1) (en ese orden), se sigue inmediatamente que:

$$\{a, b\} \in \bigcup (C \times D) \tag{3}$$

Como por otra parte es claro que

$$a \in \{a, b\} \qquad\qquad b \in \{a, b\}$$

Por consiguiente, por (3) se sigue de inmediato que

$$a \in \bigcup\bigcup (C \times D) \qquad\qquad b \in \bigcup\bigcup (C \times D)$$

Y como lo que acabamos de demostrar, es válido a su vez para cualesquiera objetos $a \in C$ y $b \in D$, podemos concluir definitivamente:

$$C \subseteq \bigcup\bigcup (C \times D) \qquad\qquad D \subseteq \bigcup\bigcup (C \times D) \tag{4}$$

Para terminar, recordemos ahora que, según nuestro supuesto inicial, $C \times D$ es un conjunto. Por consiguiente, por el axioma de la unión (AU) también lo será $\bigcup (C \times D)$. Y otra vez por el axioma de la unión, también habrá de serlo a su vez, necesariamente, $\bigcup\bigcup (C \times D)$.

Por consiguiente, tanto A como B son conjuntos, por el axioma de separación (AS).

§ 3.33. Lema (Segundo lema del producto cartesiano). *Dadas dos clases no vacías C y D, tenemos:*

si tanto C como D son conjuntos, entonces $C \times D$ es un conjunto

Prueba. El enunciado de este lema, recíproco del anterior, se puede formular más sencillamente diciendo que "el producto cartesiano de dos conjuntos es siempre un conjunto".

La prueba no es difícil, siguiendo un camino algo parecido al anterior, pero utilizando el axioma del conjunto potencia, en lugar del axioma de la unión. Constituye el *Problema 4* del listado de *Problemas propuestos.*

§ 3.34. Observación (Problema 4). Este es el momento apropiado para plantearse la respuesta al *Problema 4* del listado de *Problemas propuestos* (p. 9).

§ 3.35. Teorema (Producto cartesiano). *Sean $C_1, C_2, \ldots, C_n$ clases no vacías cualesquiera, para algún número natural $n \geqslant 1$. Entonces:*

$$C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n \text{ es un conjunto} \quad \text{si y sólo si} \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \text{ son todas conjuntos}$$

Prueba. Si $n = 1$ el resultado es trivial. Y si $n = 2$, el resultado se sigue de inmediato de los dos lemas precedentes.

Para $n = 3$, tenemos:

$$C_1 \times C_2 \times C_3 \;=\; (C_1 \times C_2) \,\times\, C_3$$

y el resultado se sigue igualmente por los dos lemas precedentes.

Por su parte, si $n = 4$, entonces tenemos

$$C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4 \;=\; (C_1 \times C_2 \times C_3) \,\times\, C_4$$

y también se sigue el resultado de los dos lemas anteriores.

Y así sucesivamente.

§ 3.36. Corolario (Relaciones y conjuntos). *Cualquier relación definida en un conjunto es otro conjunto.*

Prueba. Inmediata por el teorema precedente y el axioma de separación.

§ 3.37. Teorema (Funciones y conjuntos). *Una función f es un conjunto si y sólo si tanto $dom\,(f)$ como $ran\,(f)$ son conjuntos.*

Prueba. La prueba de este teorema tiene dos partes. En primer lugar, empezaremos suponiendo que la función f es un conjunto, y a partir de ahí demostraremos que tanto $dom\,(f)$ como $ran\,(f)$ son a su vez conjuntos. En segundo lugar, haremos el recorrido a la inversa: empezaremos suponiendo que $dom\,(f)$ y $ran\,(f)$ son conjuntos, y utilizando dicha suposición, probaremos que la propia función f es a su vez un conjunto.

Denotaremos cada una de las dos partes señaladas mediante "($\Longrightarrow$)" y "($\Longleftarrow$)", según la convención introducida en § 1.16 (cf. p. 23).

($\Longrightarrow$) Empecemos suponiendo, en efecto, que la función f sea un conjunto. Si, en particular, $f = \varnothing$, entonces $dom\,(\varnothing) = ran\,(\varnothing) = \varnothing$, y el resultado es trivial.

Ahora supongamos $f \neq \varnothing$. Y sean por tanto

$$a \in dom\,(f) \qquad\qquad f(a) \in ran\,(f)$$

Por consiguiente $(a, f(a)) \in f$. Y como $(a, f(a)) = \{\,\{a\}\,,\,\{a, f(a)\}\,\}$, siguiendo los mismos pasos que en § 3.32 llegamos inmediatamente a que:

$$a \in \bigcup\bigcup f \qquad\qquad f(a)\bigcup\bigcup f$$

Como esto es válido para cualquier $a \in dom\,(f)$, tenemos:

$$dom\,(f) \subseteq \bigcup\bigcup f \qquad\qquad ran\,(f) \subseteq \bigcup\bigcup f$$

Por lo que, suponiendo que f sea un conjunto, también han de serlo necesariamente $dom\,(f)$ y $ran\,(f)$, por (AU) y (AS), siguiendo aquí también el mismo razonamiento que empleamos en § 3.32.

($\Longleftarrow$) Completada la primera parte de la prueba, supongamos ahora que $dom\,(f)$ y $ran\,(f)$ son conjuntos. A partir de ahí recíprocamente, demostraremos que también ha de serlo la propia función f.

Para empezar, observamos de nuevo que si $f = \varnothing$ el resultado se sigue de forma trivial. Por lo que suponemos $f \neq \varnothing$.

Ello implica a su vez $dom\,(f) \neq \varnothing \neq ran\,(f)$. Por lo que podemos aplicar el lema § 3.33, y el correspondiente producto cartesiano $dom\,(f) \times ran\,(f)$ también será a su vez un conjunto.

Ahora bien: obviamente,

$$f \quad \subseteq \quad dom\,(f) \times ran\,(f)$$

por lo que el resultado se sigue de inmediato por el axioma de separación (AS).

§ 3.38. Axioma (Axioma de reemplazo, AR). *Sea f una función. Entonces, si $dom\,(f)$ es un conjunto, también $ran\,(f)$ ha de ser un conjunto.*

§ 3.39. Observación (El axioma de reemplazo). Por el teorema precedente, el axioma de reemplazo (AR) es equivalente a la proposición

$$\text{si} \qquad dom\,(f) \text{ es un conjunto,} \qquad \text{entonces} \qquad f \text{ también es un conjunto}$$

En la mayor parte de los casos, definimos funciones sabiendo de antemano que tanto su dominio como su rango son conjuntos. En tales casos, el axioma de reemplazo resulta innecesario.

Sin embargo, hay algunas ocasiones en que se define una determinada función simplemente como una *clase*, y se necesita ese axioma para demostrar que constituye un conjunto. Ahí es donde radica la importancia del axioma de reemplazo para la teoría de conjuntos, que es muy grande.

§ 3.40. Observación (Problema 5). Este es el momento apropiado para plantearse la respuesta al *Problema 5* del listado de *Problemas propuestos* (p. 10).

Relaciones de orden

§ 3.41. Definición (Relación de equivalencia). Sea R una relación binaria definida sobre una clase C. Entonces, decimos que R es una *"relación de equivalencia"* cuando cumple las tres condiciones siguientes:

(a) *Reflexividad:* para cualquier $x \in C$, sucede $R(x, x)$.

(b) *Simetría:* para cualesquiera $x, y \in C$, si $R(x, y)$, entonces $R(y, x)$.

(c) *Transitividad:* para cualesquiera $x, y, z \in C$, si $R(x, y)$ y $R(y, z)$, entonces $R(x, z)$.

Un ejemplo sencillo de relación de equivalencia es *tener la misma estatura que.*

En efecto, toda persona tiene la misma estatura que ella misma, por lo que la condición de reflexividad se cumple. Además, si una persona x tiene la misma estatura que otra y, obviamente también y tendrá la misma estatura que x. Por lo que también se cumple la simetría.

Y por último, si resulta x tiene la misma estatura que y, y a su vez y tiene la misma estatura que una tercera z, entonces irremisiblemente x tendrá la misma estatura que z. Así que la condición de transitividad también se cumple.

§ 3.42. Práctica (Relaciones de equivalencia). Poner otro ejemplo distinto de relación de equivalencia, de acuerdo con la definición que se acaba de proporcionar.

§ 3.43. Definición (Clases de equivalencia). Sea R una relación de equivalencia sobre una clase C. Para cada $a \in C$, llamaremos *"clase de equivalencia de a con respecto a R"*, a la clase de todos los elementos de C que están en la relación R con a (en ese orden). Es decir, a la clase:

$$\{x : R(x, a)\}$$

Por ejemplo, tomemos un conjunto $U = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, y sea ahora S una relación binaria definida sobre U, tal que:

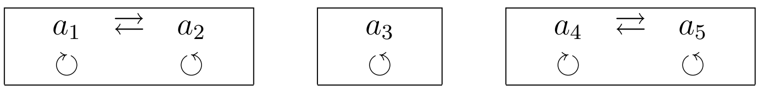
$$S(a_1, a_2) \qquad\qquad S(a_4, a_5)$$

Entonces, si S es una relación de equivalencia, tendrá que cumplir también necesariamente:

$$\begin{array}{ccc} S(a_1, a_1) & S(a_3, a_3) & S(a_4, a_4) \\ \\ S(a_2, a_1) & & S(a_5, a_4) \\ \\ S(a_2, a_1) & & S(a_5, a_5) \end{array}$$

además, por supuesto, de las ya señaladas, $S(a_1, a_2)$ y $S(a_4, a_5)$.

Todo ello configura una especie de "mapa" de interconexiones, que podemos representar mediante enlaces de flechas de la manera siguiente:



Pues bien, cada una de esas tres "cajas" o subconjuntos de U resultantes de efectuar dicha distribución, constituye una de las tres clases de equivalencia correspondientes a la relación en cuestión:

$$\{a_1, a_2\} \qquad\qquad \{a_3\} \qquad\qquad \{a_4, a_5\}$$

§ 3.44. Práctica* (Clases de equivalencia). Consideremos ahora un conjunto $V = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}$, y una relación de equivalencia T definida en V, tal que:

$$T(a_1, a_2) \qquad T(a_3, a_2) \qquad T(a_4, a_5) \qquad T(a_4, a_6) \qquad T(a_5, a_7)$$

Determinar todas las interconexiones mutuas y las clases de equivalencia resultantes.

§ 3.45. Teorema (Clases de equivalencia). *Sea R una relación de equivalencia sobre una clase C, y sean $a, b \in C$. Entonces, tenemos:*

la clase de equivalencia de a es la misma que la de b si y sólo si $R(a, b)$

Prueba. Sea D la clase de equivalencia de a con respecto a R. Y de forma similar, sea G la clase de equivalencia de b con respecto a R.

Entonces, la prueba del teorema tendrá dos partes. En la primera parte de la prueba ($\Longrightarrow$), supondremos que $D = G$, y a partir de ahí tendremos que demostrar $R(a, b)$. Esto es sumamente sencillo.

En la segunda parte de la prueba ($\Longleftarrow$), supondremos $R(a, b)$, y a partir de ahí deberemos demostrar $D = G$. Para ello, trataremos de comprobar que, dado cualquier objeto x de la clase inicial C, si sucede $x \in D$, entonces también debemos tener $x \in G$. Y que a la inversa, si sucede $x \in G$, entonces también debe suceder $x \in D$.

Con estas indicaciones, y teniendo presentes las tres condiciones definitorias de toda relación de equivalencia (cf. § 3.41), resulta ya sumamente asequible desarrollar en detalle la prueba de este teorema. La tarea de hacerlo figura como el *Problema 6* del listado de *Problemas propuestos*.

§ 3.46. Observación (Problema 6). Este es el momento apropiado para plantearse la respuesta al *Problema 6* del listado de *Problemas propuestos* (p. 10).

§ 3.47. Observación (Clases de equivalencia). Queda claro, en definitiva, que cuando tenemos una relación de equivalencia definida sobre una clase dada, las distintas clases de equivalencia inducidas por esa relación constituyen clases *disjuntas*. Esto es, constituyen clases que no poseen ningún elemento en común.

Por eso, al definir una relación de equivalencia sobre una clase, se dice que estamos efectuando una *"partición"* de dicha clase: una distribución de esos elementos, por así decirlo, en "compartimentos estancos". Y de tal forma que, dentro de cada uno de esos compartimentos, todos los elementos se hayan relacionados entre sí, en todas las direcciones posibles, por la relación de equivalencia en cuestión.

§ 3.48. Definición (Orden parcial y orden parcial estricto). Sea R una relación binaria definida sobre una clase C. Entonces, decimos que R es una *"orden parcial"* cuando cumple las tres condiciones siguientes:

(a) *Reflexividad:* para cualquier $x \in C$, sucede $R(x, x)$.

(b) *Antisimetría:* para cualesquiera $x, y \in C$, si $R(x, y)$ y $R(y, x)$, entonces $x = y$.

(c) *Transitividad:* para cualesquiera $x, y, z \in C$, si $R(x, y)$ y $R(y, z)$, entonces $R(x, z)$.

La definición es, como vemos, prácticamente idéntica a la definición de relación de equivalencia, pero cambiando la condición de simetría por la de antisimetría que se acaba de dar. Esa pequeña diferencia en la definición, supone una distancia gigantesca entre un tipo de relación y otro.

Por su parte, diremos que R es un *"orden parcial estricto"* cuando cumple sencillamente:

(a) *Antisimetría estricta:* para cualesquiera $x, y \in C$, si $R(x, y)$, entonces $\sim R(y, x)$.

(b) *Transitividad:* para cualesquiera $x, y, z \in C$, si $R(x, y)$ y $R(y, z)$, entonces $R(x, z)$.

La relación $\leqslant$ entre los números naturales, por ejemplo, es un caso claro de orden parcial. Por su parte, la relación $<$ es un ejemplo claro de orden parcial estricto.

Del mismo modo, la relación *tener estatura menor o igual que* constituye otro caso de orden parcial. Y la relación *tener estatura estrictamente menor que*, constituye otro caso de orden parcial estricto.

Otra relación que constituye un orden parcial estricto es la de *estar a las órdenes de*, considerada entre los militares del mundo. Evidentemente, si un militar está a las órdenes de otro, entonces éste no lo está a las del primero. Y si un militar está a las órdenes de otro, y éste a las de un tercero, el primero lo estará a las del tercero.

§ 3.49. Práctica (Orden parcial y orden parcial estricto). Proponer un ejemplo de orden parcial, y otro de orden parcial estricto, distintos a los indicados.

§ 3.50. Definición (Cota superior). Sea R un orden parcial estricto sobre una clase D, y sea $C \subseteq D$. En tal caso, diremos que un elemento $y \in D$ es *"cota superior de C con respecto a R"*, cuando suceda que:

$$\text{para todo } x \in C \text{ distinto de } y, \qquad \text{tenemos} \qquad R(x, y)$$

Las cotas superiores de C pueden existir o no. Y si existen, pueden estar dentro del propio C, o bien estar fuera de él.

Si hay cotas superiores fuera de C, puede haber varias distintas. Pero si hay una cota superior dentro del propio C, entonces, como se ve de inmediato, ésta habrá de ser forzosamente única.

Por ejemplo, sea B el conjunto de todos los números naturales desde el 0 hasta el 99:

$$B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}$$

B es un subconjunto del conjunto de los números naturales, obviamente.

Pues bien. En ese caso, una cota superior de B con respecto a $<$, es el número 100. También son cotas superiores de B los números 101, 102, 103, y así hasta el infinito. También hay una cota superior dentro del propio B, que es el propio número 99; naturalmente, dicho número es la única cota superior de B que está dentro del propio B.

Sin embargo, tomemos ahora el conjunto de todos los números naturales *mayores* de 99:

$$A = \{100, 101, 102, 103, \ldots\}$$

Aunque también A es subconjunto del conjunto de los números naturales, en este caso podemos observar que no existe ninguna cota superior de A con respecto a $<$, ni dentro ni fuera de A.

§ 3.51. Definición (Extremo superior). Sea nuevamente R un orden parcial estricto sobre una clase D, y sea $C \subseteq D$. Entonces, el *extremo superior* de C con respecto a R será sencillamente la menor de todas las cotas superiores de C con respecto a R. Al extremo superior también se le llama *"supremo"*, o bien, directamente, *"menor cota superior"*.

Debido a la condición de antisimetría estricta, es inmediato comprobar que el extremo superior, si existe, ha de ser único. Eso sí: puede estar dentro del propio C, o no.

Por ejemplo, en el caso del conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}$ y la relación de orden $<$, es evidente que el extremo superior en este caso es el número 99.

Y en el caso del conjunto $A = \{100, 101, 102, 103, \ldots\}$, lo que resulta evidente es que *A no tiene* extremo superior con respecto a $<$.

§ 3.52. Práctica (Cota superior y extremo superior).

(a) Utilizando la relación de orden parcial estricto propuesta en § 3.49, dar un ejemplo de cota superior con respecto a una subclase determinada de la clase inicial.

(b) Determinar si la subclase indicada tiene extremo superior, y decir cuál es, en su caso.

§ 3.53. Definición (Orden total y orden total estricto). Sea R un orden parcial definido sobre una clase C. Entonces, diremos que R es un *"orden total"* siempre que cumpla la siguiente condición adicional:

Comparabilidad: para cualesquiera $x, y \in C$, o bien $R(x, y)$ o bien $R(y, x)$.

Por su parte, si R es ahora un orden parcial estricto sobre C, entonces diremos que R es un *"orden total estricto"* siempre que cumpla la siguiente condición adicional:

Tricotomía: para cualesquiera $x, y \in C$, se da una *y sólo una* de estas tres posibilidades: o bien $R(x, y)$, o bien $R(y, x)$, o bien $x = y$.

Así, el ejemplo dado anteriormente de la relación $\leqslant$ entre los números naturales, constituye un claro ejemplo de orden total. Y, por su parte, la relación $<$, también entre los números naturales, constituye un ejemplo evidente de orden total estricto.

Sin embargo, un caso de orden parcial estricto que no constituye orden total, es el de *estar a las órdenes de* entre los militares del mundo, que propusimos en § 3.48. Evidentemente, incumple la condición de tricotomía, puesto que tomando dos militares de distintos países, por ejemplo, normalmente no estará ninguno a las órdenes del otro.

§ 3.54. Práctica (Orden total y orden total estricto). Indicar si alguno de los ejemplos propuestos en § 3.49 constituye un orden total, o un orden total estricto. Razonar la respuesta.

§ 3.55. Teorema (Orden total estricto). *Cualquier relación binaria que cumpla las condiciones de tricotomía y transitividad, constituye un orden total estricto.*

Prueba. Basta verificar que la condición de tricotomía implica la antisimetría estricta.

Y en efecto, sea R una relación binaria definida sobre una clase C, y tomemos cualesquiera $x, y \in C$ tales que $R(x, y)$. Entonces, por tricotomía *no* puede suceder ni $x = y$ ni $R(y, x)$. Por consiguiente tenemos $\sim R(y, x)$.

§ 3.56. Definición (Elemento mínimo). Sea R una relación de orden parcial estricto definida sobre una clase C, y sea D cualquier subclase no vacía de C. Entonces, diremos que $a \in D$ es un *"elemento mínimo de D con respecto a R"*, cuando tengamos:

$$\text{para todo } x \in D, \qquad \text{si} \qquad x \neq a, \qquad \text{entonces} \qquad R(a, x)$$

Por ejemplo, volvamos al conjunto de los números naturales, y consideremos los siguientes subconjuntos no vacíos de dicho conjunto:

$$\{24, 514, 8, 2.325\} \qquad \{99, 101, 103, 109, 111, 113\} \qquad \{8.500, 2.400, 1.300, 9.800\}$$

Evidentemente, todos estos conjuntos tienen un elemento mínimo con respecto a la relación $<$: se trata de los números 8, 99 y 1.300, respectivamente.

No siempre existe el elemento mínimo para una subclase dada, y enseguida veremos ejemplos de ello. Sin embargo, resulta evidente que cuando existe el elemento mínimo, éste ha de ser necesariamente único, según se desprende de la definición que acabamos de dar.

§ 3.57. Definición (Buen orden). Un orden parcial estricto R definido sobre una clase C es un *buen orden* cuando cualquier subconjunto no vacío de C tiene un *elemento mínimo* con respecto a R.

Es fácil ver que la relación $<$ constituye un buen orden dentro del conjunto de los números naturales.

Sin embargo, si consideramos ahora el llamado *"conjunto de los números enteros"*, que incluye tanto a los números positivos como a los negativos:

$$\{\ \ldots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5,\ \ldots\}$$

entonces encontraremos que la relación $<$ *no* constituye un buen orden dentro de este otro conjunto. En efecto, para comprobarlo basta con tomar, por ejemplo, el conjunto de todos los números enteros menores que 27. Dicho conjunto es no vacío y es subconjunto del conjunto de los números enteros. Pero no tiene un elemento mínimo bajo con respecto a $<$, ya que los números negativos van decreciendo indefinidamente hasta el infinito.

§ 3.58. Observación (La definición de buen orden). Es preciso notar que la definición de buen orden no exige la existencia de elemento mínimo para cualquier *subclase* no vacía de la clase inicial, sino simplemente para cualquier *"conjunto"* (no vacío) incluido en dicha clase.

La diferencia es importante, como tendremos oportunidad de apreciar en su momento.

§ 3.59. Teorema (Buen orden y orden total estricto). *Todo buen orden es un orden total estricto.*

Prueba. La prueba de este resultado es muy sencillita. Queda marcada como *Problema 7*, dentro del listado de *Problemas propuestos.*

§ 3.60. Observación (Problema 7). Este es el momento apropiado para plantearse la respuesta al *Problema 7* del listado de *Problemas propuestos* (p. 10).

MÓDULO 4

Ordinales. El axioma de elección

La definición de ordinal

§ 4.1. Observación (Anticipación de la definición de ordinal). Los ordinales son unos conjuntos especialmente diseñados con el propósito de ordenar otros conjuntos.

Los ordinales se parecen a esos archivadores para discos compactos, que tienen exactamente un hueco para introducir cada disco, y en los que cada disco debe ocupar un hueco. Pues bien, del mismo modo los ordinales tienen, por así decirlo, una especie de "casillas", preparadas para que sean colocados los distintos elementos del conjunto que se quiera ordenar.

Hay ordinales de todos los tamaños, a fin de poder ordenar cualquier conjunto que escojamos. La ordenación se lleva a cabo mediante una correspondencia biyectiva entre el conjunto en cuestión, y el ordinal escogido para tal efecto. De ese modo, cada elemento del conjunto será emparejado con un único y distinto elemento del ordinal. Es decir, cada elemento del conjunto escogido será asignado a una "casilla", sin que quede ninguna casilla vacía, ni falte ningún elemento por colocar.

Dicho procedimiento resulta sumamente útil, como es fácil imaginar, para estudiar la estructura interna del conjunto escogido.

§ 4.2. Definición (Clases bien ordenadas por la relación de pertenencia). Una clase D está *bien ordenada por la relación de pertenencia* si la relación de pertenencia considerada entre los elementos de D, induce un buen orden entre ellos.

Ello significa, en definitiva, que la relación $\in$ restringida a la clase D, cumpla con las condiciones correspondientes al orden parcial estricto, y al buen orden (cf. § 3.48, § 3.57):

> *Antisimetría estricta:* para cualesquiera $x, y \in D$, si $x \in y$, entonces $y \notin x$.
>
> *Transitividad:* para cualesquiera $x, y, z \in D$, si $x \in y$ e $y \in z$, entonces $x \in z$.
>
> *Elemento mínimo:* cualquier subconjunto no vacío de D tiene un elemento mínimo con respecto a $\in$.

§ 4.3. Observación (Anticipación del lema del buen orden por $\in$). Como ya sabemos, para que una relación binaria constituya un buen orden, ha de cumplir las condiciones del orden parcial estricto, así como la condición de existencia del elemento mínimo. Esta última afecta, por definición, a cualquier sub*conjunto* no vacío de la clase inicial.

Pues bien, el siguiente lema nos informa de algo que afecta específicamente al buen orden por $\in$. En efecto, en el caso concreto del buen orden por $\in$, la condición de existencia del elemento mínimo se extiende también automáticamente a cualquier sub*clase* no vacía de la clase en cuestión. Es decir, se extiende a cualquier subclase no vacía de la clase en cuestión, aunque dicha subclase no constituya ella misma un conjunto.

§ 4.4. Lema (Lema del buen orden por $\in$). *Sea D una clase bien ordenada por $\in$, y sea C cualquier subclase no vacía de C (no necesariamente un conjunto). Entonces C tiene un elemento mínimo con respecto a $\in$.*

Prueba. Para probar que C tiene un elemento mínimo con respecto a $\in$, tomemos cualquier $x \in C$. Si x resultara ser de hecho el elemento mínimo de C, entonces el resultado quedaría probado.

Supongamos ahora el caso contrario. Esto es: supongamos que x *no sea* elemento mínimo de C con respecto a $\in$.

El hecho de que x no sea elemento mínimo de C con respecto a $\in$, significa que no es cierto que para todo $y \in C$ tenemos que $x \in y$. En otras palabras: existirá al menos un objeto $z \in C$ distinto de x, tal que $x \notin z$.

Por consiguiente, como el buen orden ha de ser total (por § 3.59), tenemos inmediatamente $z \in x$. Así pues, nuestro objeto x resulta ser una clase de objetos, puesto que posee elementos. Y además, por pertenecer el propio x a la clase C, tenemos que x también ha de ser él mismo un objeto, pues sólo los objetos pueden pertenecer a las clases.

En definitiva, podemos concluir que x es una clase que además constituye un objeto. En otras palabras: x es un conjunto.

Ahora consideremos la clase

$$B = x \cap C \tag{1}$$

Naturalmente, $B \subseteq x$, así que por el axioma de separación (AS), como x es un conjunto, también lo será B.

Por otro lado, sabemos que x y C no son conjuntos disjuntos, ya que $z \in x$ y $z \in C$. Por lo tanto, $z \in B$, con lo que B resulta ser un conjunto no vacío. Y además, obviamente $B \subseteq D$.

Por consiguiente, dado que la clase D está bien ordenada por $\in$, y que B es un sub*conjunto* no vacío de D, aplicando ahora la definición de *buen orden* tal cual, podemos concluir que B ha de tener un elemento mínimo con respecto a $\in$.

Finalmente, tomando ese elemento mínimo de B, es fácil demostrar que de hecho será también simultáneamente el elemento mínimo de todo C. Y ello completará la demostración.

En efecto, sea u el elemento mínimo de B con respecto a $\in$. Y supongamos que u *no fuese* el elemento mínimo de todo C, esto es: supongamos que hubiera algún $a \in C$ tal que $u \notin a$.

Entonces razonamos como sigue. Al ser $\in$ un orden total estricto sobre la clase D, tendremos forzosamente $a \in u$. Y al pertenecer u a B, también pertenecerá a x, por (1). En definitiva:

$$a \in u \qquad\qquad u \in x \tag{2}$$

Al ser $\in$ un buen orden sobre la clase D, tiene que constituir una relación transitiva, con lo cual (2) implica a su vez que $a \in x$.

Y al ser a un elemento de C, tendremos simultáneamente

$$a \in x \qquad\qquad a \in C$$

Con lo cual, por (1), $a \in B$. Pero ello es imposible, dado que $a \in u$, y u es el elemento mínimo de B con respecto a $\in$.

Por consiguiente el elemento a no puede existir, y podemos concluir que u es efectivamente elemento mínimo de todo C.

§ 4.5. Teorema (Teorema del buen orden por $\in$). *Una clase D está bien ordenada por $\in$ si y sólo si se dan simultáneamente las dos condiciones siguientes:*

(a) *(Tricotomía.) Para cualesquiera $x, y \in D$, se da una y sólo una de estas tres posibilidades: o bien $x \in y$, o bien $y \in x$, o bien $x = y$.*

(b) *Para cualquier subclase no vacía C de D, existe un $u \in C$, que es: o bien un individuo, o bien un conjunto tal que $u \cap C = \varnothing$.*

Prueba. La prueba de este teorema tiene dos partes, bien diferenciadas. En la primera parte ($\Longrightarrow$), demostraremos que si D está bien ordenada por $\in$, entonces se cumplen las dos condiciones enunciadas. En la segunda parte ($\Longleftarrow$), procederemos a la inversa: demostraremos que si D cumple esas dos condiciones, entonces necesariamente ha de estar bien ordenada por $\in$.

($\Longrightarrow$) Supongamos, en efecto, que D esté bien ordenada por $\in$. Notamos enseguida que la condición de tricotomía se sigue de inmediato, teniendo en cuenta que todo buen orden constituye un orden total estricto (por § 3.59).

Y por otra parte, dada cualquier subclase no vacía C de D, entonces por el lema precedente, C tendrá un elemento mínimo con respecto a $\in$. Sea u ese elemento mínimo.

Si u es un individuo, no hay nada más que probar. En caso contrario, tomemos cualquier $y \in C$. Al ser u el elemento mínimo de C, tendremos $u \in y$. Y por antisimetría estricta, $y \notin u$. Por eso $u \cap C = \varnothing$, lo cual prueba que la segunda condición, (b), también se cumple en este caso.

($\Longleftarrow$) Ahora procedemos a demostrar que, suponiendo que se den las susodichas condiciones (a) y (b), entonces la clase D tiene que estar bien ordenada por $\in$. Demostraremos, en concreto, que cumple las dos condiciones del orden parcial estricto (antisimetría estricta y transitividad), y que además, cualquier subconjunto no vacío de D tiene un elemento mínimo bajo $\in$.

Empezamos pues por verificar que la relación $\in$ sobre D satisface la antisimetría estricta. Para ello, tomemos cualesquiera $x, y \in D$, y supongamos que tuviéramos al mismo tiempo $x \in y$ e $y \in x$. Pero entonces el conjunto $C = \{x, y\}$ incumpliría claramente la condición (b), como vamos a ver enseguida.

En efecto, teniendo $x \in y$ e $y \in x$, resulta que ni x ni y pueden ser individuos. Y por otra parte, al estar

$$x \in C \qquad\qquad x \in y$$

se seguiría obviamente $x \in (y \cap C)$. Y al estar

$$y \in C \qquad\qquad y \in x$$

se seguiría obviamente $y \in (x \cap C)$. Con lo cual, siendo x y y los dos únicos elementos de C, este conjunto incumpliría claramente la condición (b).

Por consiguiente, siendo $x, y \in D$ no puede suceder simultáneamente $x \in y$ e $y \in x$, y la antisimetría estricta se cumple.

A continuación comprobaremos que la relación $\in$ sobre D cumple con la condición de transitividad. Para ello, tomemos cualesquiera $x, y, z \in D$, y supongamos además que $x \in y$ e $y \in z$.

Ahora veamos. Resulta imposible $x = z$, pues entonces tendríamos simultáneamente $x \in y$ e $y \in z$, contrariamente a la propiedad de antisimetría que acabamos de establecer. Por otra parte, tampoco puede ocurrir $z \in x$, ya que en tal caso el conjunto $C = \{x, y, z\}$ incumpliría la condición (b), como vamos a ver en detalle inmediatamente.

En efecto, dado $x \in y$, $y \in z$ y $z \in x$, entonces ni x ni y ni z pueden ser individuos. Y además, dado

$$x \in C \qquad\qquad x \in y$$

se seguiría obviamente $x \in (y \cap C)$. Dado

$$y \in C \qquad\qquad y \in z$$

se seguiría obviamente $y \in (z \cap C)$. Y dado

$$z \in C \qquad\qquad z \in x$$

se seguiría obviamente $z \in (x \cap C)$. Con lo cual, siendo x, y y z los tres únicos elementos de C, este conjunto incumpliría claramente la condición (b).

En definitiva, acabamos de establecer que

$$x \neq z \qquad\qquad z \notin x$$

Con lo cual, por (a) podemos concluir $x \in z$, y la transitividad queda demostrada.

Tan sólo resta ya, para terminar la prueba, establecer que cualquier subconjunto no vacío de D tiene un elemento mínimo con respecto a $\in$. Pues bien, esta última parte queda como ejercicio, que a continuación se propone.

§ 4.6. Práctica* (Teorema del buen orden por $\in$). Completar la prueba del teorema precedente.

§ 4.7. Definición (Clase transitiva). Decimos que una clase D es una *"clase transitiva"* cuando dado cualquier objeto y,

$$\text{si} \qquad y \in D, \qquad \text{entonces} \qquad y \subseteq D$$

En otras palabras: una clase transitiva es aquella todos cuyos elementos están simultáneamente *incluidos* en ella. O también: una clase transitiva es aquella todos cuyos elementos son simultáneamente subclases suyas.

§ 4.8. Observación (Clases transitivas). Nótese que la calificación de "clase transitiva" tiene un significado muy distinto al de la condición de "transitividad" que hemos venido manejando hasta ahora (cf. § 3.41, p. 68). Este doble uso del término puede infundir a cierta confusión, aunque está muy establecido en las monografías sobre la materia, por lo que resulta necesario aprenderlo.

En efecto, la condición de transitividad se aplica exclusivamente a relaciones binarias, esto es, a clases cuyos elementos son pares ordenados de objetos. Concretamente, para que una relación binaria R sea transitiva, basta con que dados cualesquiera objetos x, y y z, *si* de hecho sucede $R(x, y)$ y $R(y, z)$, *entonces* tengamos también $R(x, z)$. En otras palabras: si los pares ordenados (x, y) e (y, z) pertenecen a la relación, también debe pertenecer el par (x, z).

En el caso de lo que ahora llamamos *"clase transitiva"*, se trata de una cuestión bastante distinta: para que una clase dada D sea considerada clase transitiva, debe cumplir directamente que *todos* los elementos de D sean al mismo tiempo subclases de D.

Salta a la vista, en definitiva, que las clases transitivas son sumamente particulares. En efecto, todos los elementos de una clase transitiva han de ser, forzosamente, clases, ya que sólo así pueden ser *subclases* de la clase en cuestión. Y además, siendo elementos de otra clase, serán objetos, y por consiguiente, conjuntos. Se sigue por tanto que todos los elementos de una clase transitiva han de ser necesariamente conjuntos.

Además, ocurre también lo siguiente. Sea D una clase transitiva, y sean $y \in D$ y a su vez $x \in y$. Pues bien, dado que y es subclase de D, tendremos también $x \in D$ (de ahí la denominación de "clase transitiva"). Y como esto ocurre para cualquier elemento y de D, podemos concluir en definitiva que

$$\bigcup D \subseteq D$$

En otras palabras: toda clase transitiva incluye trivialmente a su propia clase unión.

§ 4.9. Definición (Ordinal; clase de todos los ordinales). Un *ordinal* es un conjunto transitivo y bien ordenado por la relación de pertenencia.

A la clase de todos los ordinales la denotamos por "$\mathscr{W}$".

§ 4.10. Observación (Ordinales). Los primeros ordinales que se nos vienen a la cabeza son los elementos iniciales de aquel conjunto $\mathscr{Z}$, postulado por el axioma de infinitud (AI) (cf. § 2.92–§ 2.100):

$$\begin{aligned} 0 &= \varnothing \\ 1 &= \{\varnothing\} \\ 2 &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \end{aligned}$$

En efecto, es inmediato comprobar que $\varnothing$ cumple trivialmente las dos condiciones de la definición de ordinal, ya que al no tener elementos, no se le aplican.

Tampoco es difícil verificar que el conjunto unitario $\{\varnothing\}$ cumple asimismo esas dos condiciones, y por consiguiente, constituye un ordinal. En efecto, se trata de un conjunto transitivo, dado que su único elemento $\varnothing$ está trivialmente incluido en él:

$$\varnothing \in \{\varnothing\} \qquad \text{y} \qquad \varnothing \subseteq \{\varnothing\}$$

Y también está bien ordenado por $\in$: su único subconjunto no vacío es él mismo, esto es $\{\varnothing\}$; y a la sazón, $\varnothing$ constituye el elemento mínimo (y único) de dicho conjunto.

La verificación de que también $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ es un ordinal queda como ejercicio que a continuación se propone. Y no es difícil imaginar que lo mismo sucede con los restantes elementos de esta serie así construida, esto es, con los correlatos conjuntistas de todos los números naturales. Así lo demostraremos rigurosamente, en efecto, más adelante.

§ 4.11. Práctica* (Verificación de que 2 es un ordinal). Verificar que el conjunto $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ es un ordinal, de acuerdo con la definición precedente.

La clase de todos los ordinales

§ 4.12. Teorema (Elementos de un ordinal). *Todos los elementos de un ordinal son ordinales.*

Prueba. Sea β un ordinal, y tomemos cualquier $\alpha \in \beta$. Dado que β es un conjunto transitivo, tenemos inmediatamente $\alpha \subseteq \beta$. Y por consiguiente, como β está bien ordenado por $\in$, también lo estará necesariamente su subconjunto α.

Para mostrar que α es un conjunto transitivo, tomemos cualquier $y \in \alpha$. Hay que demostrar que también tenemos $y \subseteq \alpha$, esto es: que cualquier elemento de y es asimismo un elemento de α.

Para ello, tomemos efectivamente un elemento cualquiera, $x \in y$. Nuestro objetivo es demostrar que $x \in \alpha$, y con ello habrá concluido la prueba.

Dado

$$\alpha \subseteq \beta \qquad\qquad y \in \alpha$$

se sigue de inmediato $y \in \beta$. Y puesto que β es un ordinal, ello implica $y \subseteq \beta$.

A su vez, dado

$$y \subseteq \beta \qquad\qquad x \in y$$

podemos concluir también $x \in \beta$.

De todo ello se deduce que tanto x, como y y α, son elementos de β. Además, sabemos que

$$x \in y \qquad\qquad y \in \alpha \tag{1}$$

Ahora bien: al ser β un ordinal, deberá estar bien ordenado por $\in$. Un buen orden es un orden parcial estricto, y ello exige, en particular, que la relación de orden sea una relación transitiva (en el sentido de que sea una relación binaria que cumpla con la condición de transitividad).

Por consiguiente, la relación $\in$ ha de ser transitiva entre los elementos de β. Y por ello, a partir de (1) podemos inferir

$$x \in \alpha$$

con lo cual concluye la prueba.

§ 4.13. Lema (Subconjuntos transitivos de un ordinal). *Si α es un subconjunto transitivo de un ordinal β, entonces el propio α es un ordinal, y además tenemos que: o bien $\alpha = \beta$, o bien $\alpha \in \beta$.*

Prueba. Pongamos

$$\gamma = \beta - \alpha$$

Esto es: γ será el conjunto de todos los elementos de β que *no* pertenecen a α.

Si $\gamma = \varnothing$, entonces tendremos $\alpha = \beta$, y no hay nada más que probar.

A continuación, supongamos que $\gamma \neq \varnothing$.

Por consiguiente, γ constituirá una subclase no vacía de β. Y al estar β bien ordenado por $\in$, la clase γ deberá contener un elemento mínimo con respecto a $\in$. Sea u dicho elemento.

Como $u \in \gamma$, y γ es una subclase de β, se sigue de inmediato que

$$u \in \beta \tag{1}$$

Por tanto, u es elemento de un ordinal, y se infiere del teorema precedente que el propio u es asimismo un ordinal.

No es difícil probar, por añadidura, que u no es otro en realidad que el propio subconjunto α. Y de ahí se seguirá de inmediato, como es lógico, que α es un ordinal y que $\alpha \in \beta$, tal y como se quería demostrar.

En efecto, para probar que $u = \alpha$ vamos a tomar un objeto cualquiera x, y verificaremos que si $x \in u$, entonces $x \in \alpha$, y viceversa. Ello demostrará que los dos conjuntos son idénticos.

Supongamos, en primer lugar, $x \in u$. Como $u \in \beta$, al ser β un conjunto transitivo tenemos automáticamente $u \subseteq \beta$. Y por consiguiente, también $x \in \beta$.

Ahora bien, puesto que $x \in u$, y u es el elemento mínimo de γ, sabemos que x no puede pertenecer a γ. Por consiguiente tenemos forzosamente $x \in \alpha$, como queríamos demostrar.

En segundo lugar, supongamos ahora $x \in \alpha$. Lo primero que observamos en este caso es que $x \neq u$, ya que u es elemento de γ, y $\gamma = \beta - \alpha$.

Por otra parte, sabemos que α es un conjunto transitivo, por el enunciado del lema. Por consiguiente, dado que $x \in \alpha$, tenemos automáticamente $x \subseteq \alpha$. Y por tanto, no puede suceder $u \in x$: ello implicaría $u \in \alpha$, y eso es imposible, dado que u es elemento de γ, como acabamos de recordar.

Así pues tenemos que

$$x \neq u \qquad\qquad u \notin x \tag{2}$$

Ahora bien. Al ser α un subconjunto de β, el que $x \in \alpha$ implica obviamente $x \in \beta$. Por otra parte, por (1) tenemos que también $u \in \beta$. Así pues, x y u son dos elementos de β.

Y dado que $\in$ es un buen orden dentro de β, y por consiguiente debe establecer un orden total estricto, de (2) se sigue inmediatamente que $x \in u$.

§ 4.14. Lema (Clases de ordinales no vacías). *Sea C una clase no vacía todos cuyos elementos sean ordinales. Entonces existe un ordinal $\alpha \in C$ tal que $\alpha \cap C = \varnothing$.*

Prueba. No es demasiado difícil, apoyándose en el Teorema § 4.5. Queda como ejercicio que a continuación se propone.

§ 4.15. Práctica⋆ (Clases de ordinales no vacías). Probar el lema precedente.

§ 4.16. Teorema (La clase de todos los ordinales). *La clase de todos los ordinales es una clase transitiva y bien ordenada por $\in$.*

Prueba. Siendo $\mathscr{W}$ la clase de todos los ordinales, cualquier $\beta \in \mathscr{W}$ será un ordinal, y por § 4.12 todos los elementos de β serán a su vez ordinales. Por consiguiente, $\beta \subseteq \mathscr{W}$. Y ello prueba que $\mathscr{W}$ es una clase transitiva.

Por su parte, para establecer que la clase $\mathscr{W}$ está bien ordenada por $\in$, vamos a aplicar aquí también el teorema del buen orden por $\in$ (§ 4.5).

En efecto, sean γ y δ dos ordinales cualesquiera. Siendo ambos transitivos, se ve de inmediato que el conjunto

$$\alpha = \gamma \cap \delta$$

ha de ser transitivo también. En efecto, si $x \in \alpha$, entonces forzosamente $x \in \gamma$ y $x \in \delta$. Siendo γ y δ transitivos, ello implica $x \subseteq \gamma$ y $x \subseteq \delta$. Y de ahí se deduce $x \subseteq \alpha$.

Así pues, α resulta ser un conjunto transitivo.

En adición a esto, podemos señalar que el conjunto α es también subconjunto de dos ordinales, respectivamente:

$$\alpha \subseteq \gamma \qquad\qquad \alpha \subseteq \delta \tag{1}$$

Por consiguiente, aplicando a (1) el Lema § 4.13, podemos sacar en conclusión dos cosas. En primer lugar, que el propio α tiene que ser él mismo un ordinal. Y en segundo lugar, que se dan ciertamente las dos circunstancias siguientes:

$$\alpha = \gamma, \qquad \text{o en caso contrario,} \qquad \alpha \in \gamma \tag{2}$$

$$\alpha = \delta, \qquad \text{o en caso contrario,} \qquad \alpha \in \delta \tag{3}$$

Ahora bien. Resulta imposible, en particular,

$$\alpha \in \gamma \qquad \text{y} \qquad \alpha \in \delta$$

pues ello implicaría $\alpha \in (\gamma \cap \delta)$. Esto es, ello implicaría $\alpha \in \alpha$. Y siendo α un elemento de los ordinales γ y δ, tal cosa violaría la antisimetría del buen orden de $\in$ dentro de estos.

Con lo que nos quedamos con las tres opciones restantes, que son:

$$\alpha \in \gamma \quad \text{y} \quad \alpha = \delta \quad \text{con lo cual,} \quad \delta \in \gamma$$

$$\alpha \in \delta \quad \text{y} \quad \alpha \in \gamma \quad \text{con lo cual,} \quad \gamma \in \delta$$

$$\alpha = \gamma \quad \text{y} \quad \alpha = \delta \quad \text{con lo cual,} \quad \gamma = \delta$$

Y de este modo hemos establecido la cláusula (a), de tricotomía, del teorema del buen orden por $\in$ (Teorema § 4.5).

Pues bien, la cláusula (b) de dicho teorema se sigue de inmediato del resultado precedente, § 4.14.

§ 4.17. Corolario (Paradoja de Burali-Forti). *La clase de todos los ordinales no es un conjunto, sino una clase propia.*

Prueba. La prueba es sencilla, aplicando el teorema precedente. Constituye el *Problema 8* del listado de *Problemas propuestos.*

§ 4.18. Observación (Problema 8). Este es el momento apropiado para plantearse la respuesta al *Problema 8* del listado de *Problemas propuestos* (p. 10).

§ 4.19. Corolario (Clases de ordinales). *Cualquier clase de ordinales está bien ordenada por* $\in$.

Prueba. Totalmente inmediata a partir de § 4.16.

§ 4.20. Corolario (Principio del ordinal mínimo). *Cualquier clase de ordinales no vacía tiene un elemento mínimo con respecto a* $\in$.

Prueba. También inmediata, por § 4.16 y § 4.4.

Ordinales sucesores y ordinales límite

§ 4.21. Observación (Ordenación de los ordinales). Dado § 4.19, resulta obvia la preeminencia de la relación $\in$, como relación de orden, entre los conjuntos ordinales.

Pues bien, ello motiva la siguiente definición.

§ 4.22. Definición (Ordenación de los ordinales). Sean α y β, ordinales.

(a) Utilizaremos la expresión "$\alpha < \beta$" (leída *"α menor que β"*, o *"α anterior a β"*), para denotar el hecho de que $\alpha \in \beta$.

(b) Utilizaremos la expresión "$\alpha \leqslant \beta$" (leída *"α menor o igual que β"*), para denotar el hecho de que o bien $\alpha \in \beta$, o bien $\alpha = \beta$.

Por consiguiente, de acuerdo con esta definición, cuando se trate de relacionar ordinales, el símbolo "$<$" será para nosotros un mero sinónimo de "$\in$". Y por otra parte, utilizaremos también el símbolo "$\leqslant$", de una manera más laxa, para aquellos casos en que pueda ser que el primer ordinal pertenezca al segundo, o bien que ambos ordinales sean iguales.

Por lo mismo, cuando hablemos de la "cota superior", el "extremo superior", o el "elemento mínimo" de un conjunto de ordinales, se entenderá que se trata siempre respecto a la relación de orden $<$ (esto es, $\in$), y por referencia a la clase de todos los ordinales.

§ 4.23. Observación (El conjunto de ordinales anteriores a uno dado.) De acuerdo con el Teorema § 4.12, todos los elementos de un ordinal son ordinales. Ahora bien, un ordinal es un conjunto de objetos. Y si todos esos objetos son ordinales, podemos decir también que un ordinal β es sencillamente el conjunto de todos aquellos ordinales que pertenecen a β.

Esto lo podemos parafrasear en otras palabras, de acuerdo con la notación recientemente introducida, diciendo lo siguiente: “si β es un ordinal, entonces β es idéntico al conjunto de todos los ordinales anteriores a β”. Puesto de otro modo:

$$\text{si} \qquad \beta \in \mathscr{W}, \qquad \text{entonces} \qquad \beta = \{\, \alpha : \alpha \in \mathscr{W} \text{ y } \alpha < \beta \,\}$$

Curiosamente, esto incluye también al ordinal 0, que es el elemento mínimo de $\mathscr{W}$. En efecto, no hay ningún ordinal anterior a 0, por lo que el conjunto de ordinales anteriores a 0 es el conjunto vacío. Y precisamente $0 = \varnothing$.

§ 4.24. Lema (Conjunto unión de un conjunto de ordinales). *Si D es un conjunto de ordinales, entonces $\bigcup D$ es también un ordinal.*

Prueba. Se trata de demostrar que $\bigcup D$ es un conjunto transitivo, y que está bien ordenado por $\in$. Con ello quedará establecido que es un ordinal.

Empezamos pues, demostrando que $\bigcup D$ es un conjunto transitivo. Para ello, supongamos

$$y \in \bigcup D \qquad\qquad x \in y$$

Vamos a establecer que ello implica $x \in \bigcup D$, con lo cual la transitividad del conjunto $\bigcup D$ habrá quedado demostrada.

Como $y \in \bigcup D$, habrá algún elemento $\beta \in D$ tal que $y \in \beta$. Y como D es un conjunto de ordinales, el tal β habrá de ser necesariamente un ordinal, y por tanto un conjunto transitivo. Por consiguiente tendremos $y \subseteq \beta$. Como $x \in y$, ello implica a su vez que $x \in \beta$. Y dado $\beta \in D$, ello conlleva automáticamente $x \in \bigcup D$, como queríamos demostrar.

Una vez establecido que $\bigcup D$ es un conjunto transitivo, procedemos a demostrar que es también un conjunto bien ordenado por $\in$.

Ello resulta sencillo, en efecto, si nos percatamos de que $\bigcup D$ no es sino el conjunto de todos aquellos objetos que son elementos de los elementos de D. Ahora bien, los elementos de D son ordinales, así que por § 4.12 se sigue de inmediato que todos los elementos de $\bigcup D$ han de ser ordinales también.

Y siendo $\bigcup D$ un conjunto de ordinales, forzosamente tiene que estar bien ordenado por $\in$, según demostramos en § 4.19.

§ 4.25. Teorema (Conjunto unión de un conjunto de ordinales). *Si D es un conjunto de ordinales, entonces $\bigcup D$ constituye el extremo superior de D.*

Prueba. La prueba de este teorema la realizaremos en dos partes, bien diferenciadas. En primer lugar, empezaremos verificando que $\bigcup D$ es una cota superior de D. Y a continuación, probaremos que se trata en realidad de la menor de las cotas superiores de D, con lo cual la prueba habrá concluido.

Procedemos pues a verificar que $\bigcup D$ es una cota superior de D. Es decir, procedemos a verificar que para cualquier $\alpha \in D$, tenemos que si $\alpha \neq \bigcup D$, entonces $\alpha < \bigcup D$.

Para ello, tomemos pues cualquier $\alpha \in D$, tal que

$$\alpha \neq \bigcup D \tag{1}$$

Dado que $\alpha \in D$, automáticamente tenemos $\alpha \subseteq \bigcup D$. Y siendo $\bigcup D$ un ordinal, según acabamos de demostrar, α resulta ser por tanto, subconjunto de un ordinal.

Por otra parte, también el propio α es un ordinal, obviamente, ya que D es un conjunto de ordinales. Por consiguiente, α será un conjunto transitivo, y aplicando el Lema § 4.13, tendremos necesariamente:

$$\alpha = \bigcup D, \qquad \text{o en caso contrario:} \qquad \alpha \in \bigcup D$$

Lo primero es imposible, por (1), así que tenemos necesariamente $\alpha \in \bigcup D$. Esto es: $\alpha < \bigcup D$.

Y con ello hemos establecido que $\bigcup D$ es una cota superior de D.

A continuación, probaremos que $\bigcup D$ es en realidad la menor de las cotas superiores de D.

En efecto, sea β cualquier cota superior de D, distinta de la propia $\bigcup D$. Por consiguiente, tendremos

$$\beta \neq D \tag{2}$$

y

$$\text{para todo } \alpha \in D: \qquad \text{si } \alpha \neq \beta, \qquad \text{entonces } \alpha < \beta \tag{3}$$

Naturalmente, $\alpha < \beta$ implica $\alpha \in \beta$. Y como β es a su vez un ordinal, y por tanto un conjunto transitivo, ello implica a su vez $\alpha \subseteq \beta$.

Por consiguiente, aplicando (3) podemos decir que

$$\text{para todo } \alpha \in D, \qquad \alpha \subseteq \beta$$

Y como eso sucede para todos los elementos de D, automáticamente tenemos:

$$\bigcup D \subseteq \beta$$

Y otra vez nos encontramos con un subconjunto de un ordinal, en este caso el propio $\bigcup D$, que es a su vez un ordinal, y por tanto un conjunto transitivo. Así pues, por el Lema § 4.13 tendremos:

$$\bigcup D = \beta \qquad \text{o en caso contrario:} \qquad \bigcup D \in \beta$$

Lo primero es imposible, por (2), así que $\bigcup D \in \beta$. Esto es: $\bigcup D < \beta$, tal y como se quería demostrar.

§ 4.26. Lema (Unión de un ordinal con su conjunto unitario). *Dado cualquier ordinal α, el conjunto $\alpha \cup \{\alpha\}$ es también un ordinal.*

Prueba. Bastante sencilla, constituye el *Problema 9* del listado de *Problemas propuestos.*

§ 4.27. Observación (Problema 9). Este es el momento apropiado para plantearse la respuesta al *Problema 9* del listado de *Problemas propuestos* (p. 10).

§ 4.28. Definición (Ordinal inmediato sucesor de uno dado). Dado cualquier ordinal α, ponemos

$$\alpha + 1 =_{def.} \alpha \cup \{\alpha\}$$

Por consiguiente, como vemos, el conjunto $\alpha + 1$ sólo añade un elemento adicional a los elementos de α. Ese elemento adicional es el propio objeto que constituye el conjunto α.

En otras palabras: los elementos de $\alpha + 1$ serán todos los elementos de α, con el único añadido novedoso del propio objeto α.

Por el lema precedente sabemos que $\alpha + 1$ es también un ordinal. Más en concreto, decimos que es el ordinal *"inmediato sucesor"* de α. Ello se justifica por el Teorema § 4.30, que demostraremos enseguida, después de un lema preliminar.

§ 4.29. Lema (Conjunto unión de un ordinal sucesor). *Para cualquier ordinal α,*

$$\bigcup(\alpha + 1) \;=\; \alpha$$

Prueba. Se trata de un resultado bastante evidente, aunque nosotros vamos a desarrollar una prueba detallada del mismo.

Por definición (cf. § 2.68),

$$\bigcup(\alpha + 1) \;=\; \{\, x : \, x \in y \text{ para algún } y \in (\alpha + 1) \,\} \tag{1}$$

A su vez, $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Por consiguiente, los elementos de $\alpha + 1$, como acabamos de decir, serán los mismos de α, con el único añadido del propio objeto α:

$$\text{para cualquier } y, \qquad y \in (\alpha + 1) \qquad \text{si y sólo si} \qquad y = \alpha \qquad \text{o bien} \qquad y \in \alpha \tag{2}$$

De lo cual se deduce inmediatamente que, en particular, como es obvio,

$$\alpha \in (\alpha + 1) \tag{3}$$

Ahora vamos a demostrar que efectivamente $\bigcup(\alpha + 1) = \alpha$. Para ello, tomaremos un objeto x arbitrario, y procederemos en dos partes. En primer lugar, supondremos que $x \in \bigcup(\alpha + 1)$, y trataremos de establecer a partir de ahí, que también $x \in \alpha$. Y en segundo lugar, supondremos que $x \in \alpha$, y trataremos de establecer entonces, que también $x \in \bigcup(\alpha + 1)$. El resultado pedido se seguirá de inmediato.

Supongamos, por tanto, en primer lugar, que $x \in \bigcup(\alpha + 1)$. Por (1), ello implica que $x \in y$ para algún $y \in (\alpha + 1)$. Y por (2), ello significa a su vez que $y = \alpha$, o bien $y \in \alpha$.

Si $y = \alpha$, entonces podemos afirmar $x \in \alpha$, y no hay nada más que probar. Y si $y \in \alpha$, entonces por transitividad de α, al ser éste un ordinal, tendremos $y \subseteq \alpha$, y por consiguiente, también $x \in \alpha$.

Finalmente, supongamos $x \in \alpha$. En tal caso, hay que recordar que $\alpha (\in \alpha + 1)$, por (3). Por consiguiente, aplicando (1) tenemos automáticamente $x \in \bigcup(\alpha + 1)$, como queríamos demostrar.

Y ello completa nuestra prueba.

§ 4.30. Teorema (Ordinal inmediato sucesor de uno dado). *Dados cualesquiera ordinales α y β,*

$$\alpha < \beta \qquad \textit{si y sólo si} \qquad \alpha + 1 \leqslant \beta$$

Prueba. $\alpha + 1$ es un ordinal, y por tanto constituye un conjunto de ordinales (Teorema § 4.12). Por consiguiente, aplicando § 4.25 tenemos que

$$\bigcup(\alpha + 1)$$

es el extremo superior de $\alpha + 1$. Y por el lema previo sabemos que $\bigcup(\alpha + 1 = \alpha)$.

Por consiguiente, α es el extremo superior de $\alpha + 1$.

Ahora procedemos a demostrar el bicondicional que contiene el enunciado del teorema.

Para ello, empezaremos suponiendo $\alpha < \beta$, y a partir de ahí estableceremos que $\alpha+1 \leqslant \beta$. Y en segundo lugar, procederemos a la inversa: supondremos $\alpha + 1 \leqslant \beta$, y a partir de ahí demostraremos que, efectivamente, $\alpha < \beta$. Y con ello la prueba habrá concluido.

($\Longrightarrow$) Empecemos pues suponiendo que $\alpha < \beta$. Es decir, que $\alpha \in \beta$. Y supongamos también que *no* se diera $\alpha + 1 \leqslant \beta$. En tal caso tendríamos:

$$\alpha + 1 \not< \beta \qquad\qquad \alpha + 1 \neq \beta \tag{1}$$

O puesto de otra forma, tendríamos:

$$\alpha + 1 \notin \beta \qquad\qquad \alpha + 1 \neq \beta \tag{2}$$

Siendo β y $\alpha + 1$ ordinales, por § 4.16 estarán bien ordenados por $\in$. Por consiguiente, $\in$ ha de establecer entre ellos una relación de orden total estricto. Y así pues, de (2) podríamos deducir

$$\beta \in \alpha + 1$$

Pero ello es imposible, dado que $\alpha < \beta$, y α es el extremo superior de $\alpha + 1$. Por consiguiente tenemos que rechazar (1), concluyendo que efectivamente$\alpha + 1 \leqslant \beta$.

($\Longleftarrow$) Y ahora a la inversa, empecemos suponiendo que

$$\alpha + 1 \leqslant \beta$$

Entonces tendremos, obviamente,

$$\alpha + 1 < \beta, \qquad \text{o bien} \qquad \alpha + 1 = \beta$$

Si $\alpha + 1 = \beta$, entonces, como $\alpha \in (\alpha + 1)$, tendremos también $\alpha \in \beta$. Esto es: $\alpha < \beta$. Y en tal caso, no hay nada más que probar.

Y si, por el contrario, $\alpha+1 < \beta$, entonces $(\alpha+1) \in \beta$. Al ser β un ordinal, $(\alpha+1) \subseteq \beta$. Y por consiguiente, como una vez más $\alpha \in \alpha+1$, podremos concluir $\alpha \in \beta$. Y en definitiva: $\alpha < \beta$.

Lo cual completa nuestra prueba.

§ 4.31. Definición (Ordinal sucesor, ordinal límite). Sea β cualquier ordinal distinto de $\varnothing$.

(a) Si existe algún ordinal α tal que $\beta = \alpha + 1$, entonces β es un *ordinal sucesor*.

(b) En caso contrario, β es un *ordinal límite*.

§ 4.32. Definición (Ordinal finito). Un ordinal es *finito* si resulta anterior a cualquier ordinal límite.

§ 4.33. Observación (Ordinales finitos). Por consiguiente, un ordinal α es finito cuando, dado cualquier ordinal límite β, tenemos

$$\alpha < \beta$$

Un ejemplo inmediato de ordinal finito es el propio $\varnothing$, como a continuación comprobamos.

§ 4.34. Teorema ($\varnothing$, ordinal finito). *$\varnothing$ es un ordinal finito.*

Prueba. Sabemos que $\varnothing$ es un ordinal, y que no es un ordinal límite. Por consiguiente, dado cualquier ordinal límite β, tendremos claramente $\varnothing \neq \beta$. Pero además, no podemos tener $\beta \in \varnothing$, ya que $\varnothing$ carece de elementos.

Por consiguiente, por el buen orden que rige entre todos los ordinales, podemos concluir $\varnothing \in \beta$. Esto es: $\varnothing < \beta$.

§ 4.35. Teorema (Sucesor de un ordinal finito). *Si α es un ordinal finito, también lo es su sucesor, $\alpha + 1$.*

Prueba. Sea α un ordinal finito. Por consiguiente, dado cualquier ordinal límite β, tendremos forzosamente $\alpha < \beta$.

Por § 4.30, ello implica $\alpha + 1 \leqslant \beta$.

Como $\alpha + 1$ no es un ordinal límite, y β sí, podemos afirmar que $\alpha + 1 \neq \beta$. Con lo cual concluimos necesariamente que $\alpha + 1 < \beta$.

Y como eso ocurre para cualquier ordinal límite β, queda establecido que $\alpha + 1$ constituye un ordinal finito.

Los principios de inducción

§ 4.36. Definición (Clase de los ordinales finitos). Ponemos:

$$\omega =_{def.} \{\, \alpha : \alpha \text{ es un ordinal finito} \,\}$$

Por consiguiente, ω no es otra sino la clase de todos los ordinales finitos.

§ 4.37. Lema (Transitividad de ω). *ω es una clase transitiva.*

Prueba. Para demostrar que ω es una clase transitiva, hay que verificar que para cualquier $\alpha \in \omega$, tenemos también $\alpha \subseteq \omega$.

Y a su vez, para verificar esto hay que demostrar que dado cualquier objeto x, si $x \in \alpha$, entonces $x \in \omega$.

Supongamos entonces, efectivamente, que $\alpha \in \omega$ y que $x \in \alpha$. Siendo α elemento de ω, será un ordinal finito. Y como todos los elementos de un ordinal son ordinales (por § 4.12), también x tendrá que ser, a su vez, un ordinal.

Hecho esto, resulta muy sencillo establecer que x es, en particular, un ordinal finito. En efecto, dado cualquier ordinal límite β, tendremos $\alpha < \beta$, ya que α es un ordinal finito. Y como $x \in \alpha$, es decir, $x < \alpha$, ello implica a su vez que $x < \beta$, por la transitividad de la relación de orden entre los ordinales.

Así pues x también resulta ser un ordinal finito. Y por consiguiente $x \in \omega$, tal y como queríamos demostrar.

§ 4.38. Teorema (ω es un conjunto). *ω es un conjunto.*

Prueba. Para demostrar que ω es un conjunto necesitaremos apoyarnos en el axioma de infinitud.

En efecto, lo que vamos a hacer es demostrar que ω es un subconjunto del conjunto $\mathscr{X}$ postulado por dicho axioma (cf. § 2.92, p. 51). Por consiguiente, utilizando el axioma de separación, se seguirá de inmediato que la propia clase ω ha de ser a su vez un conjunto.

Para demostrar $\omega \subseteq \mathscr{X}$, vamos a proceder a verificar que la clase $\omega - \mathscr{X}$ es vacía. Naturalmente, $\omega - \mathscr{X}$ es la clase de todos aquellos elementos de ω que *no* pertenecen a $\mathscr{X}$. Y si verificamos que esta clase es vacía, habremos demostrado automáticamente que $\omega \subseteq \mathscr{X}$, y con ello habremos establecido el resultado que se pide probar.

A su vez, para verificar que $\omega - \mathscr{X}$ es vacía, vamos a empezar suponiendo lo contrario. Esto es, vamos a empezar suponiendo que la clase $\omega - \mathscr{X}$ es *no* vacía, y a partir de ahí derivaremos una contradicción. Esto probará que $\omega - \mathscr{X}$ ha de ser vacía, y con ello la demostración habrá concluido.

Ahora veamos. Claramente $\omega - \mathscr{X}$ es una clase de ordinales. Con lo cual, suponiendo que sea no vacía, por el principio del ordinal mínimo (§ 4.20) tendrá un elemento mínimo con respecto a $\in$. Sea β ese elemento mínimo.

Lo primero que podemos afirmar es que $\beta \neq \varnothing$, ya que $\varnothing \in \mathscr{X}$. Y por otra parte, siendo elemento de ω, tampoco puede ser β un ordinal límite.

Así que β ha de ser necesariamente un ordinal sucesor (cf. la Definición § 4.31, que no deja lugar a más opciones). Por consiguiente, β ha de ser necesariamente sucesor de algún otro ordinal, digamos α:

$$\text{existe un ordinal } \alpha \qquad \text{tal que} \qquad \beta = \alpha + 1$$

Donde obviamente

$$\alpha \in \beta \tag{1}$$

Además, por el lema precedente, dado $\beta \in \omega$ tendremos también $\beta \subseteq \omega$. Y por consiguiente, de (1) podremos deducir $\alpha \in \omega$.

Pero de (1) se sigue también que $\alpha < \beta$, y siendo β el elemento mínimo de $\omega - \mathscr{X}$, ello implica a su vez que $\alpha \notin (\omega - \mathscr{X})$.

Pero entonces $\alpha \in \mathscr{X}$, y por definición de $\mathscr{X}$ ello implicará a su vez que $(\alpha + 1) \in \mathscr{X}$. Lo cual es imposible, dado que $\alpha + 1 = \beta$.

§ 4.39. Observación (Nuevo uso del axioma de infinitud). Como se puede comprobar, acabamos de hacer aquí un segundo uso del axioma de infinitud, en este caso al efecto de establecer que ω es un conjunto.

Tal es, en efecto, la segunda función principal que tiene dicho axioma. Hasta el punto que, en otras presentaciones de la teoría, el axioma de infinitud aparece formulado directamente diciendo que ω es un conjunto, sin más.

§ 4.40. Observación (Los números naturales y los ordinales finitos). Por otra parte, ahora queda claro también que los correlatos conjuntistas de los números naturales, que exploramos en § 2.94–§ 2.100, son precisamente los elementos de ω, esto es, los ordinales finitos.

Por lo mismo, el conjunto de todos los números naturales queda ahora identificado a su vez con su correspondiente correlato conjuntista: el conjunto ω.

§ 4.41. Teorema (El ordinal ω). *ω es el menor ordinal infinito y el menor ordinal límite.*

Prueba. ω es por definición una clase de ordinales, que estará por lo tanto bien ordenada por $\in$. Y de la que, además, hemos probado ya que es transitiva, y que es un conjunto.

Por consiguiente, ω es un ordinal.

Además, ω ha de ser un ordinal infinito. En efecto, de otro modo tendríamos $\omega \in \omega$, contrariamente al buen orden por $\in$ de todos los ordinales.

Y ω ha de ser *el menor* entre los ordinales infinitos, ya que cualquier ordinal α para el que tengamos $\alpha < \omega$, tendremos también evidentemente $\alpha \in \omega$, y por tanto ha de ser finito.

Por esa misma razón, siendo finitos todos los ordinales anteriores a ω, pero no el propio ω, y siendo obviamente $\omega \neq \varnothing$, podemos concluir que ω es un ordinal límite.

En concreto, ω será *el menor* ordinal límite, ya que una vez más, cualquier ordinal α para el que tengamos $\alpha < \omega$ será finito, y por tanto no podrá ser un ordinal límite.

§ 4.42. Teorema (Principio de inducción sobre los ordinales finitos). *Sea P cualquier propiedad, y supongamos que sucede:*

(a) *$P(0)$; y*

(b) *para todo ordinal finito α, si $P(\alpha)$ entonces $P(\alpha + 1)$.*

En tal caso, podemos concluir que la propiedad P es cumplida por todos los ordinales finitos.

Prueba. Por definición, al ser P una propiedad, será también una clase. Y lo que nosotros queremos verificar es que $P(\alpha)$ para todo $\alpha \in \omega$, es decir: que $\omega - P$ es vacía.

Para comprobar esto, vamos a proceder suponiendo lo contrario, y derivaremos de ello una contradicción, de manera enteramente similar a como lo hemos hecho en la prueba del Teorema § 4.38.

Supongamos, en efecto, que $\omega - P$ sea no vacía. Claramente es una clase de ordinales, por lo que tendrá un elemento mínimo, digamos β.

Sabemos que $\beta \neq \varnothing$, ya que $\varnothing \in P$. Y siendo elemento de ω, sabemos que β tiene que ser por tanto un ordinal sucesor: $\beta = \alpha + 1$, para algún otro ordinal α.

Como $\alpha < \beta$ y β es el elemento mínimo de $\omega - P$, se sigue que $\alpha \in P$, esto es: que $P(\alpha)$. Lo cual es imposible, porque entonces, aplicando (b), también deberíamos tener $P(\beta)$.

Por consiguiente el elemento mínimo de la clase $\omega - P$ no puede existir, y se sigue que dicha clase no puede ser vacía.

§ 4.43. Observación (El principio de inducción sobre los ordinales finitos). El principio que acabamos de recoger resulta de enorme utilidad para probar resultados acerca de los números naturales.

Nuestro enunciado del mismo responde a la llamada *"versión débil"*. También se usan con frecuencia otras dos formulaciones de este principio: la *versión fuerte* y el *principio del menor número*. A pesar de sus nombres, las tres versiones son estrictamente equivalentes. En la tercera de estas versiones, y despojado de todo el ropaje conjuntista, este principio se encuentra ya en los *Elementos* de Euclides, en el siglo III antes de Cristo.

Una ampliación notable es la que se produce al proyectar un principio similar, sobre la clase de todos los ordinales.

§ 4.44. Teorema (Principio de inducción transfinita). *Supongamos que P sea una propiedad que cumple las tres condiciones siguientes:*

(a) *P(0);*

(b) *para cualquier ordinal sucesor $\alpha + 1$, si $P(\alpha)$ entonces $P(\alpha + 1)$;*

(c) *para cualquier ordinal límite β, si $P(\alpha)$ para todo $\alpha < \beta$, entonces $P(\beta)$.*

En tal caso, podemos afirmar que la propiedad P es cumplida por todos los ordinales, sin excepción.

Prueba. Es bastante sencilla, inspirada en las de § 4.38 y el teorema precedente. Queda como ejercicio, que a continuación se propone.

§ 4.45. Práctica* (Principio de inducción transfinita). Demostrar el teorema precedente.

§ 4.46. Observación (El principio de inducción transfinita). El principio de inducción transfinita que acabamos de formular se aplica a cualquier ordinal, esto es, a toda la clase $\mathscr{W}$. Pues bien, resulta obvio comprobar que su restricción a la clase ω coincide precisamente con el principio de inducción sobre los ordinales finitos, que vimos anteriormente.

También el principio de inducción transfinita se presenta en tres versiones principales, que también son estrictamente equivalentes: la versión débil, que es la que acabamos de dar nosotros, la versión fuerte, y la del ordinal mínimo, que coincide con nuestro § 4.20 (p. 82).

Panorama de los números ordinales

§ 4.47. Observación (Panorama de los números ordinales). En el presente apartado vamos a hacer algunas observaciones generales sobre la clase $\mathscr{W}$, esto es, sobre el campo de los números ordinales.

Para ello nos vamos a apoyar en una metáfora, que quizá nos ayude a entender mejor la forma en que estos singulares conjuntos están estructurados y se relacionan entre sí. La metáfora en cuestión consiste en comparar a los números ordinales con los militares de un gran ejército, perfectamente organizado y jerarquizado. Si se prefiere, un "ejército de pacificación", o un "ejército humanitario", pero jerarquizado.

De acuerdo con esta metáfora, diremos que cada ordinal "tiene mando" sobre todos los ordinales menores que él, es decir, sobre todos los ordinales anteriores. Además, tratándose de un ordinal sucesor, de la forma $\alpha + 1$, diremos que "tiene un inmediato subordinado", o "asistente", que será precisamente el ordinal α.

Otras claves de esta metáfora se darán conforme se vaya desarrollando.

§ 4.48. Observación (Los ordinales finitos). Los "soldados" de nuestro ejército de ordinales serán los ordinales finitos. Esto es, los números naturales, que son los ordinales más pequeños que existen:

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad \ldots$$

Aún siendo todos "soldados", los ordinales finitos están ya jerarquizados entre ellos.

Así, $0 < 1$, y por lo tanto, el ordinal 1 "tiene mando" sobre el ordinal 0, que además constituye su "inmediato subordinado", o "asistente".

A su vez, $0 < 2$ y $1 < 2$, lo cual significa que el ordinal 2 "tiene mando" sobre los ordinales 0 y 1. Y que además, en particular, el ordinal 2 tiene como "asistente" al ordinal 1.

Y así sucesivamente.

El ordinal 0 es el más pequeño de todos, y por tanto, el único ordinal que no "tiene mando" sobre ningún otro.

Al mismo tiempo, resulta interesante recordar en este punto que cada ordinal es igual al conjunto de todos los ordinales anteriores. Con lo que tenemos también:

$$1 = \{0\} \qquad 2 = \{0, 1\} \qquad 3 = \{0, 1, 2\} \qquad \ldots$$

§ 4.49. Observación (El ordinal ω). A continuación de los ordinales finitos, viene el ordinal ω, que es, por así decirlo, el primer "oficial" de nuestro particular ejército. El ordinal ω es ya un ordinal infinito, si bien es el menor de todos los ordinales infinitos, y por lo tanto, el de "menor rango" entre estos ordinales.

El ordinal ω resulta de reunir en un conjunto a todos los ordinales anteriores, como no podía ser de otro modo. Por consiguiente, el ordinal ω resulta precisamente de reunir en un conjunto a todos los ordinales finitos:

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Además, el ordinal ω es también un ordinal límite, ya que no es sucesor inmediato de ningún otro ordinal. En efecto, no existe ningún ordinal α tal que $\omega = \alpha + 1$. Trasladado a los términos de nuestra metáfora militar, eso significa que el "oficial" ω no tiene asignado "asistente" ninguno.

Y por último, el ordinal ω constituye asimismo el primer ordinal límite, al ser el primer ordinal, después del 0, que no constituye sucesor inmediato de ningún otro ordinal.

§ 4.50. Observación (Los ordinales $\omega+1$ y siguientes). A continuación del ordinal ω, viene su compañero $\omega+1$. El ordinal $\omega+1$ se forma simplemente tomando la unión de ω con el conjunto unitario $\{\omega\}$. Esto es: $\omega+1=\omega\cup\{\omega\}$.

Por consiguiente, los elementos de $\omega+1$ serán todos los elementos de ω, más uno adicional, que consiste en el propio objeto ω:

$$\omega+1=\{0,1,2,3,\ldots,\omega\}$$

El "oficial" $\omega+1$ es un ordinal sucesor, y sí tiene "asistente". El "asistente" de $\omega+1$ es precisamente el propio "oficial" ω.

A continuación de $\omega+1$ viene un ordinal al que llamamos "$\omega+2$", y que consiste en la unión de $\omega+1$ con el conjunto unitario $\{\omega+1\}$. Esto es:

$$\omega+2=(\omega+1)\cup\{(\omega+1)\}$$

O lo que viene a ser lo mismo:

$$\omega+2=\{0,1,2,3,\ldots,\omega,\omega+1\}$$

Obviamente el ordinal $\omega+2$ también será un ordinal sucesor, y su "asistente" no será otro que el ordinal $\omega+1$.

A continuación de $\omega+2$ viene $\omega+3$, y así sucesivamente.

§ 4.51. Observación (Los ordinales 2ω y siguientes). A continuación de la cadena $\omega,(\omega+1),(\omega+2),(\omega+3),\ldots$, viene un nuevo ordinal límite, al que se llama "2ω", y que, nuevamente, no es otro sino el conjunto de todos los ordinales anteriores:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccc} 2\omega & = & \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots & \\ & & & \omega, & \omega+1, & \omega+2, & \omega+3, & \ldots & \} \end{array}}$$

A continuación de 2ω viene $2\omega+1$, que es igual a $2\omega\cup\{2\omega\}$. Esto es:

$$\boxed{\begin{array}{cccccccc} 2\omega+1 & = & \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots \\ & & & \omega, & \omega+1, & \omega+2, & \omega+3, & \ldots \\ & & & 2\omega & \} & & & \end{array}}$$

Y tras $2\omega+1$ vendrá $2\omega+2$:

$$\boxed{\begin{array}{cccccccc} 2\omega+2 & = & \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots \\ & & & \omega, & \omega+1, & \omega+2, & \omega+3, & \ldots \\ & & & 2\omega & 2\omega+1 & \} & & \end{array}}$$

Y así sucesivamente.

§ 4.52. Observación (Los ordinales 3ω y siguientes). Después de todos los ordinales de la forma $(2\omega+1), (2\omega+2), (2\omega+3), \ldots$, vendrá un nuevo ordinal límite, el ordinal 3ω. A continuación vendrán $(3\omega+1), (3\omega+2)$, y así sucesivamente. Y a continuación vendrá el ordinal límite 4ω, etc.

Tras todos los ordinales de la forma $2\omega, 3\omega, 4\omega, \ldots$, viene un nuevo ordinal, también ordinal límite, al que llamamos "ω^2", y que es nuevamente el conjunto de todos los ordinales anteriores:

$$\boxed{\begin{array}{lllllll} \omega^2 & = & \{ & 0, & 1, & 2, & 3, \ \ldots \\ & & & \omega, & \omega+1, & \omega+2, & \ldots \\ & & & 2\omega, & 2\omega+1, & \ldots & \\ & & & 3\omega, & \ldots & & \\ & & & \ldots & & & \quad \} \end{array}}$$

Nótese que en esta forma de representación que venimos empleando, los ordinales límite aparecen siempre en la primera columna de la tabla, debajo del ordinal 0.

A su vez, después del ordinal ω^2 vendrá ω^2+1, y etc., etc., etc.

§ 4.53. Observación (Grandes ordinales y grandes cardinales). A continuación de toda la serie de ordinales $\omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots$, viene un ordinal que, una vez más, resulta de la reunión de todos ellos, y que se denomina "ω^ω". Se trata otra vez de un ordinal límite, y éste es tan alto ya, que le podemos considerar un verdadero "general" de nuestro singular ejército.

Pero a continuación del ordinal ω^ω, vienen ordinales aún más grandes, esto es, por así decirlo, "generales de rango aún mayor": el ordinal $\omega^\omega+1$, etc. Y algo después aparecerá el ordinal ω^{ω^ω}, y así sucesivamente.

Pero la cosa no acaba ahí, por suerte o por desgracia. La teoría de conjuntos estudia otros ordinales, muchísimo mayores que estos.

En particular, el que sigue a toda la serie

$$\omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^{\cdots}}} \ldots$$

es un ordinal llamado "ε_0". Y al ordinal ε_0 le siguen otros ordinales todavía mayores que él.

En fin, nosotros vamos a dejar en este punto nuestra breve descripción panorámica del campo de los números ordinales. Volveremos a decir algo acerca de los grandes ordinales, pero será en el próximo módulo, cuando estudiemos a los números cardinales.

Unos y otros, los números ordinales y los números cardinales, tienen una íntima conexión, como vamos a ver enseguida. Además, al estar los números cardinales específicamente diseñados para medir el tamaño de otros conjuntos, resultan ideales para el estudio de conjuntos especialmente grandes, como son estos últimos ordinales que acabamos de mencionar.

El axioma de fundamentos y el axioma de elección

§ 4.54. Axioma (Axioma de fundamentos, AF).

Para cualquier conjunto no vacío C, *existe un $x \in C$* *tal que* $x \cap C = \varnothing$

(Todo conjunto no vacío tiene un elemento disjunto con él mismo.)

§ 4.55. Observación (El axioma de fundamentos). El axioma precedente, también conocido como "axioma de regularidad", tiene entre otras misiones la de garantizar que no haya ningún conjunto que sea miembro de sí mismo.

En efecto, sea D cualquier conjunto, y supongamos que tuviéramos $D \in D$. Por el teorema del conjunto unitario, podríamos formar a su vez el conjunto

$$C = \{D\}$$

Pues bien, en tal caso el conjunto C tendría un único elemento, que sería el propio D. Y obviamente tendríamos

$$D \in C \qquad\qquad D \in D$$

Por consiguiente, el único elemento del conjunto C no sería disjunto con C, contrariamente a lo que prescribe el axioma.

Por esa razón decimos que el axioma de fundamentos impide que ningún conjunto pueda ser miembro de sí mismo.

Este axioma ha sido puesto en duda por algunos matemáticos, como ocurre con el axioma de elección, que vamos a ver inmediatamente después. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con el axioma de elección, el uso que se hace del axioma de fundamentos, en sus diferentes versiones, tanto en teoría de conjuntos como fuera de ella, resulta ser pequeño y de importancia bastante marginal.

§ 4.56. Definición (Función de elección). Dada una clase C cuyos elementos sean conjuntos no vacíos, una *función de elección* para C es cualquier función e con $dom\,(e) = C$ y tal que $e\,(x) \in x$ para todo $x \in C$.

Nótese que para cada $x \in C$, el valor $e\,(x)$ tiene que ser precisamente un elemento del propio conjunto x. De ahí que se requiera que todos los conjuntos de C sean no vacíos.

Por consiguiente, lo que hace una función de elección es asignar a cada conjunto perteneciente a C, un elemento de ese mismo conjunto. Dicho metafóricamente, es como si la función e "eligiera", de cada conjunto de C, uno de sus elementos. Y de ahí su nombre de "función de elección".

§ 4.57. Axioma (Axioma de elección, AE). *Si C es cualquier* conjunto *de conjuntos no vacíos, entonces existe una función de elección para C.*

§ 4.58. Observación (El axioma de elección). Dado que la función de elección tiene como dominio a C, y éste es un conjunto, aplicando el axioma de reemplazo resulta inmediato comprobar que la propia función de elección ha de ser también, ella misma, un conjunto (cf. Observación § 3.39, p. 68).

Sin embargo, el axioma de elección no nos indica ningún procedimiento general para definir o construir esa función. Por esa razón decimos que se trata de un axioma *"no constructivo"*.

Además, y lo que es más importante, el axioma de elección es un postulado *puramente existencial*: afirma la existencia de un conjunto, el conjunto formado por la propia función de elección, sin caracterizarlo en términos de algún modo de generación de sus elementos, o de alguna propiedad que sea común a todos ellos.

El axioma de elección se puede reformular en muchas versiones, o principios, equivalentes entre sí. El más importante es el principio del buen orden, del que vamos a hablar inmediatamente. Todos ellos, sin embargo, constituyen a su vez postulados puramente existenciales.

Es importante notar que, en particular, al axioma de infinitud no le ocurre lo mismo que a este otro axioma. En efecto, aunque la formulación inicial de (AI) que nosotros hemos dado en este curso sí tiene la forma de un postulado puramente existencial (cf. § 2.92, p. 51), después hemos visto otra, equivalente, que no la tiene (cf. § 4.39).

Por todo ello, el axioma de elección ha sido objeto de controversia entre matemáticos, y entre filósofos de la matemática.

Ahora bien, hay que recalcar que sin el axioma de elección (o alguno de sus equivalentes), una enorme porción de resultados en la matemática moderna, incluidos algunos de la propia lógica formal, serían imposibles de probar. Por ello, la gran mayoría de matemáticos en activo actualmente, consideran que se trata de un axioma indispensable.

§ 4.59. Observación (El axioma de elección y la hipótesis generalizada del continuo). En 1938, el lógico y matemático de origen austriaco Kurt Gödel, probó que tanto la hipótesis generalizada del continuo (que veremos a continuación), como el axioma de elección, son consistentes con el resto de axiomas de la teoría de conjuntos. Es decir: que si el resto de axiomas de la teoría de conjuntos son consistentes, entonces se les puede añadir el axioma de elección, y la hipótesis generalizada del continuo, sin destruir dicha consistencia.

En 1963, el matemático americano Paul Cohen, demostró que lo mismo ocurre con la negación del axioma de elección, y también con la negación de la hipótesis del continuo, restringida y generalizada. Esto es: que si el resto de axiomas de la teoría de conjuntos son consistentes, entonces se les puede añadir la negación del axioma de elección y la negación de la hipótesis del continuo, sin destruir dicha consistencia.

§ 4.60. Observación (Principio del buen orden). El *principio del buen orden* establece que *todo conjunto puede ser bien ordenado*. Esto es, que dado cualquier conjunto C, existe un orden parcial estricto sobre C, tal que cualquier subconjunto no vacío de C tiene un elemento mínimo.

El principio del buen orden es estrictamente equivalente al axioma de elección. Esto es, se trata de una formulación alternativa del mismo principio.

Nosotros vamos a demostrar a continuación que el axioma de elección se puede derivar como consecuencia del principio del buen orden. Se trata de un resultado sumamente sencillo de obtener. El resultado opuesto, es decir, la prueba del principio del buen orden a partir del axioma de elección, es algo más complicada, por lo que queda fuera del presente curso.

§ 4.61. Teorema (Del axioma de elección al principio del buen orden). *El axioma de elección es consecuencia del principio del buen orden.*

Prueba. Sea C un conjunto de conjuntos no vacíos. Por consiguiente, cualquier $x \in C$ será un conjunto no vacío.

Ahora consideremos a su vez el conjunto $\bigcup C$. Por consiguiente, como es lógico, si $x \in C$, entonces los elementos de x serán también elementos de $\bigcup C$.

A continuación, aplicando el principio del buen orden, tenemos que ha de existir un buen orden, digamos R, sobre el conjunto $\bigcup C$. Y por lo que acabamos de ver, ese buen orden afectará también a los elementos de cualquier $x \in C$.

Por consiguiente, dado cualquier $x \in C$, entre sus elementos habrá uno que sea el elemento mínimo con respecto a R. Con lo cual podemos definir una función e con $dom\,(e) = C$, estipulando que para todo $x \in C$, el valor de $e(x)$ sea el elemento mínimo de x con respecto a R.

Y resulta evidente que e constituirá una función de elección para el conjunto C.

§ 4.62. Definición (Conjuntos equipolentes). Decimos que dos conjuntos C y D son *"equipolentes"* cuando existe alguna función biyectiva entre C y D. En tal caso ponemos "$C \approx D$". En caso contrario, ponemos "$C \not\approx D$".

Dados dos conjuntos equipolentes, llamaremos *"función de equipolencia"* a cualquier función biyectiva entre ambos.

§ 4.63. Observación (El principio del buen orden y la misión de los números ordinales). Otro principio equivalente al principio del buen orden, y por consiguiente, también al axioma de elección, es aquel que dice que *"todo conjunto es equipolente a un ordinal"*.

De hecho, dado esto, el principio del buen orden se sigue inmediatamente. En efecto, un ordinal es un conjunto bien ordenado por $\in$. Con lo cual, si resulta equipolente a otro, ese buen orden se podrá reproducir directamente en el otro conjunto, mediante la función de equipolencia.

Algo más complicado resulta recorrer el camino a la inversa. Esto es: partiendo del principio del buen orden, derivar este otro principio según el cual todo conjunto es equipolente a un ordinal. Se trata de un razonamiento que no veremos nosotros aquí.

Lo importante es reseñar que, a la luz de este principio, siempre existe un ordinal apropiado para ordenar, de una manera exhaustiva, cualquier conjunto. Por consiguiente, como consecuencia de dicho principio, y en definitiva, del axioma de elección, queda así definitivamente establecida la utilidad de los ordinales para la misión para la que habían sido diseñados.

MÓDULO 5

Cardinales. La hipótesis del continuo

La definición de cardinal

§ 5.1. Observación (Anticipación de la definición de cardinal). Como hemos visto, los números ordinales son conjuntos especialmente diseñados para ordenar los elementos de otros conjuntos. Pues bien, los *números cardinales*, por su parte, son conjuntos cuyo cometido es ayudarnos a medir o calibrar el tamaño de un conjunto dado.

La medida del tamaño de un conjunto constituye una apreciación más grosera que la ordenación de todos sus elementos, uno por uno. Por eso los conjuntos que se utilizarán como cardinales van a ser en realidad una subclase de los ordinales. Es decir: los números cardinales no van a ser sino un tipo particular de números ordinales.

§ 5.2. Observación (Relación de equipolencia y tamaño). Obviamente, la relación de equipolencia que definimos en (§ 4.62), constituye una relación de equivalencia. Esto es: constituye una relación reflexiva, simétrica y transitiva.

Además, parece claro que dicha relación representa bastante bien la cualidad de "tener el mismo tamaño", en el sentido de que si dos conjuntos C y D resultan ser equipolentes, entonces resulta natural pensar que su tamaño haya de ser el mismo.

Pues bien, será la relación de equipolencia, en efecto, la que esté a la base de la definición de *cardinalidad*. Así como del procedimiento que describiremos para seleccionar, de entre todos los ordinales, a aquellos que resultan más apropiados para desempeñar el papel de números cardinales.

§ 5.3. Observación (Ordinales equipolentes). Es inmediato comprobar que, entre los ordinales finitos, no hay dos distintos que sean equipolentes entre sí. Sin embargo, entre los ordinales infinitos la situación es muy otra.

Por ejemplo los ordinales ω y $\omega + 1$ son claramente equipolentes, según se desprende de la siguiente correspondencia, que define una función biyectiva entre ambos:

$$\begin{array}{rclccccc} \omega & = & \{ & 0, & 1, & 2, & 3, & \dots \; \} \\ & & & | & | & | & | & \\ \omega+1 & = & \{ & \omega, & 0, & 1, & 2, & \dots \; \} \end{array}$$

Pues bien, para cada clase de ordinales que resulten ser equipolentes entre sí, vamos a tomar como representante al primero de ellos. Esto es: vamos a tomar como representante al ordinal que sea el elemento mínimo de todos ellos. Y cada uno de estos representantes mínimos constituirá un *cardinal*.

Es ocioso recordar que, como ya demostramos en su momento, cualquier clase no vacía de ordinales tiene efectivamente un elemento mínimo con respecto a $\in$, que es la relación de orden preeminente entre los ordinales. Por consiguiente, dada cualquier clase de ordinales equipolentes entre sí, siempre habrá uno que sea el mínimo de todos ellos. Y ello justifica la siguiente definición.

§ 5.4. Definición (Cardinal). Un ordinal α es un *cardinal*, cuando constituye el mínimo ordinal que es equipolente a α.

Puesto de otra forma: un ordinal un α es un *cardinal*, cuando sucede que:

$$\text{para todo ordinal } \beta, \qquad \text{si} \qquad \beta \approx \alpha, \qquad \text{entonces} \qquad \alpha \leqslant \beta$$

§ 5.5. Observación (Cardinales). Como acabamos de señalar, entre los ordinales finitos, no se puede encontrar dos distintos que sean equipolentes entre sí.

Por consiguiente, todos los ordinales finitos son también, automáticamente, cardinales. Y serán, en particular, los más pequeños entre todos los números cardinales.

En cuanto a los cardinales infinitos, es fácil percatarse de que todos ellos han de ser ordinales límite. En efecto, por el tipo de correspondencia mostrada en § 5.3, es evidente que ningún ordinal sucesor, entre los ordinales infinitos, puede constituir un cardinal.

Concretamente, el primer cardinal infinito será por fuerza el propio ω.

§ 5.6. Observación (Ordinales límite que no son cardinales). Sin embargo, es importante hacer notar que *no todos los ordinales límite son cardinales.* Ello es bastante fácil de establecer, y en efecto, queda como Práctica que a continuación se propone.

§ 5.7. Práctica* (Ordinales límite que no son cardinales). Probar la observación precedente.

§ 5.8. Observación (Definición de cardinalidad). Por otra parte, como ya sabemos, todo conjunto es equipolente a algún ordinal. Por lo tanto, todo conjunto será también equipolente a un (único) cardinal. Y ello justifica a su vez la definición siguiente.

§ 5.9. Definición (Cardinalidad). La *cardinalidad* de un conjunto C es aquel cardinal α que sea equipolente con C.

Denotaremos la cardinalidad de un conjunto C poniendo "$|C|$".

Por consiguiente, podemos decir que:

$$|C| = \alpha \qquad \text{si y sólo si} \qquad \alpha \text{ es un cardinal tal que } C \approx \alpha$$

El teorema de Cantor y la hipótesis del continuo

§ 5.10. Definición (Función monótona). En el presente curso diremos que una función f es *"monótona"* cuando todos los elementos de $dom\,(f)$ y $ran\,(f)$ sean conjuntos, y además, para cualesquiera $B, C \in dom\,(f)$, se cumpla que:

$$\text{si} \qquad B \subseteq C, \qquad \text{entonces} \qquad f(B) \subseteq f(C)$$

§ 5.11. Definición (Conjunto inclusivo). Dado cualquier conjunto C, y cualquier función monótona

$$f : \mathscr{P}(C) \longrightarrow \mathscr{P}(C)$$

diremos que un subconjunto B de C es *"inclusivo bajo f"* cuando tenemos $B \subseteq f(B)$.

§ 5.12. Lema (Conjuntos inclusivos). *Dado un conjunto C, y una función monótona*

$$f : \mathscr{P}(C) \longrightarrow \mathscr{P}(C)$$

(a) *Si $B \subseteq C$ es un subconjunto inclusivo bajo f, también lo es $f(B)$.*

(b) *Si G es la unión de todos los subconjuntos de C que son inclusivos bajo f, entonces $G = f(G)$.*

Prueba. (a) Efectivamente, si B es inclusivo bajo f, entonces

$$B \subseteq f(B) \tag{1}$$

Siendo B un subconjunto de C, obviamente $B \in \mathscr{P}(C)$. Y como f es una función de $\mathscr{P}(C)$ en $\mathscr{P}(C)$, obviamente también $f(B)$ pertenecerá a $\mathscr{P}(C)$. Por consiguiente, tanto B como $f(B)$ pertenecen al dominio de f.

Siendo así, y teniendo en cuenta que f es monótona, (1) implica inmediatamente $f(B) \subseteq f(f(B))$. Por consiguiente, el propio $f(B)$ resulta ser a su vez un subconjunto inclusivo.

(b) Sea ahora G la unión de todos los subconjuntos de C que son inclusivos bajo f.

Para mostrar que $G = f(G)$ vamos a proceder en dos partes, que en esta ocasión son las siguientes. En primer lugar, mostraremos que $G \subseteq f(G)$. Y en segundo lugar, mostraremos que $f(G) \subseteq G$. Una vez hecho esto, evidentemente, el resultado se seguirá de inmediato.

Ahora sea B cualquier conjunto inclusivo. Entonces tendremos $B \subseteq G$, ya que G es la unión de todos los conjuntos inclusivos.

Por otra parte, es obvio que tanto B como G pertenecen al dominio de f. Por consiguiente, aplicando la monotonía de esta función, tenemos inmediatamente que $f(B) \subseteq f(G)$.

Y además, dado que B es inclusivo, tenemos $B \subseteq f(B)$. Por lo que, hilando una cosa con otra, podemos concluir que $B \subseteq f(G)$.

Mediante este razonamiento hemos establecido que cualquier conjunto inclusivo ha de estar incluido en $f(G)$. Por consiguiente, la unión de todos los conjuntos inclusivos también debe estar incluida en $f(G)$. Y la unión de todos los conjuntos inclusivos no es otra que el conjunto G. Con lo que acabamos de establecer:

$$G \subseteq f(G) \tag{2}$$

Por último, de (2) se sigue inmediatamente que G es un conjunto inclusivo, por definición. Por tanto, aplicando (a), también $f(G)$ habrá de ser un conjunto inclusivo.

Y entonces, como G es la unión de todos los conjuntos inclusivos, tenemos forzosamente

$$f(G) \subseteq G$$

Y este resultado, junto a (2), completa nuestra prueba.

§ 5.13. Teorema (Teorema de Schröder-Bernstein). *Sean C y D conjuntos cualesquiera. Entonces, suponiendo que exista una función inyectiva de C a D, y que exista asimismo una función inyectiva de D a C, habrá de existir a su vez una función biyectiva entre ambos conjuntos.*

Prueba. A pesar de que el teorema de Schröder-Bernstein enuncia un hecho bastante "evidente", al menos en apariencia, el caso es que su prueba exige un razonamiento no exento de cierta dificultad. Vamos a verlo.

Sean C y D dos conjuntos cualesquiera, y consideremos dos funciones inyectivas:

$$h_1 : C \longrightarrow D \qquad\qquad h_2 : D \longrightarrow C$$

Y sea ahora C_2 aquél subconjunto de C que constituye el rango de h_2:

$$C_2 = ran\,(h_2)$$

Vamos a dividir el conjunto C en dos partes: la parte que constituye el rango de la función h, esto es, C_2, y la parte restante. A la parte restante la llamaremos "C_1". Por lo tanto, tendremos, obviamente: $C = C_1 \cup C_2$.

Resulta inmediato verificar que h_2 es una función biyectiva entre D y C_2. Por consiguiente, bastará con encontrar una función biyectiva entre C y C_2, para que se pueda definir inmediatamente una función biyectiva entre C y D.

Así pues, en lo que sigue nos vamos a dedicar a establecer que existe una función biyectiva entre C y C_2. Y una vez establecida la existencia de ésta, el resultado pedido se seguirá de inmediato.

Vayamos a ello.

Naturalmente, si tomamos cualquier elemento $x \in C$, al aplicarle la función h_1 obtendremos un objeto, $h_1(x)$, que será un elemento de D. Y si a continuación aplicamos la función h_2 a este último, esto es, al objeto $h_1(x)$, obtendremos a su vez un nuevo objeto, $h_2(\,h_1(x)\,)$, que habrá de ser necesariamente un elemento de C_2.

Esto nos da la idea de definir una función inyectiva entre C y C_2,

$$j : C \longrightarrow C_2$$

estipulando precisamente que para todo $u \in C$,

$$j(x) = h_2(h_1(x))$$

Obviamente, j será inyectiva al serlo tanto h_1 como h_2.

Conviene recordar en este punto que, dado cualquier subconjunto $B \subseteq C$, el conjunto $j[B]$ será la imagen de B bajo la función j. Esto es, el conjunto $j[B]$ será el conjunto de todos los objetos que son imagen bajo j, de algún elemento de B:

$$j[B] = \{y : \text{existe un } x \in B \text{ tal que } j(x) = y\}$$

Por otra parte, como $ran\,(j) = C_2$, tenemos necesariamente que:

$$\text{para todo } B \subseteq C, \qquad j[B] \subseteq C_2 \tag{1}$$

Pues bien, lo que hacemos a continuación es definir una nueva función

$$g : \mathscr{P}(C) \longrightarrow \mathscr{P}(C)$$

estipulando ahora que para cualquier $B \subseteq C$,

$$g(B) = C_1 \cup j[X]$$

Es decir: la función g asignará a cada subconjunto B de C, la unión del conjunto C_1 con el conjunto imagen de B bajo la función j. En seguida comprobaremos el interés de definir una función tan extraña.

Para empezar, es fácil ver que g es monótona. En efecto, si $B_1 \subseteq B_2$, entonces por fuerza $j[B_1] \subseteq j[B_2]$, y por lo tanto $g(B_2) \subseteq g(B_2)$.

Por consiguiente, aplicando el lema precedente, tomamos aquel $G \subseteq C$ tal que $f(G) = G$.

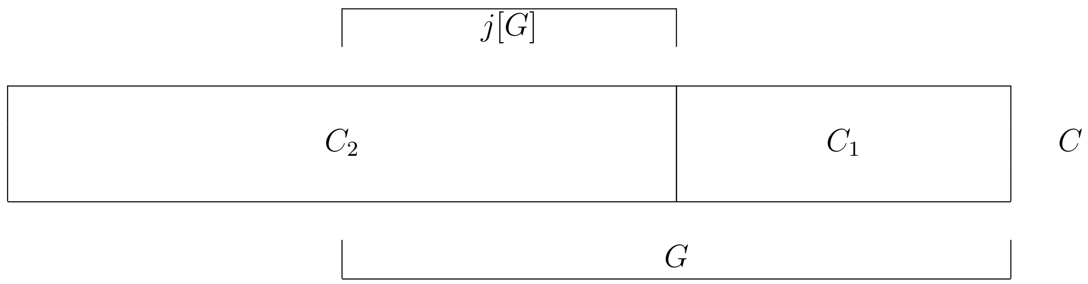
Dado que por definición $f(G) = C_1 \cup j[G]$, y que, como acabamos de reseñar, $f(G) = G$, tendremos obviamente:

$$G = C_1 \cup j[G]$$

Además, como G al fin y al cabo no es más que un subconjunto de C, podemos aplicarle (1), para llevar a la conclusión de que

$$j[G] \subseteq C_2$$

Por lo tanto, lo que tenemos es lo siguiente. El conjunto C está dividido en dos partes, C_1 y C_2. La parte C_2 está a su vez dividida en otras dos partes, una que corresponde al conjunto $j[G]$, y el resto. Y finalmente, tenemos al conjunto G, que contiene a todo C_1, más la parte de C_2 correspondiente a $j[G]$:



Pues bien, lo que tenemos que hacer en esta delicada coyuntura, es definir una nueva función, la última, a la que llamaremos "k". Y esa función k se define estipulando lo siguiente:

$$\text{para todo } x \in C, \qquad k(x) = \begin{cases} j(x) & \text{si } x \in G \\ x & \text{si } x \notin G \end{cases}$$

Y hecho esto, no resulta difícil comprobar que esa función k es, efectivamente, la función biyectiva entre C y C_2 que estábamos buscando. Comprobación que queda como ejercicio, que a continuación se propone.

§ 5.14. Práctica* (Teorema de Schröder-Bernstein). Completar la prueba del teorema precedente, verificando que la función k allí definida es, en efecto, una función biyectiva entre los conjuntos C y C_2.

§ 5.15. Lema (Equipolencia y biyectabilidad). *Dados dos conjuntos cualesquiera C y D, ocurre $|C| = |D|$ si y sólo si existe una función biyectiva entre C y D.*

Prueba. ($\Longrightarrow$) Si $|C| = |D|$ es que tanto C como D son equipolentes con un mismo cardinal, digamos α. Por tanto, existen sendas funciones biyectivas: una de C a α y, otra de D a α.

Y a partir de estas dos funciones resulta inmediato definir a su vez una función biyectiva entre C y D.

($\Longleftarrow$) Supongamos que existe una función biyectiva f entre C y D. Y sean $|C| = \gamma$ y $|D| = \delta$ los cardinales respectivos de C y D. Como $C \approx \gamma$ y $D \approx \delta$, a partir de f es inmediato construir a su vez una función biyectiva entre γ y δ. Con lo que γ y δ resultan ser equipolentes. Esto es: $\gamma \approx \delta$.

Pero entonces, por definición de *cardinal* (§ 5.4), γ y δ resultan ser uno y en mismo cardinal, es decir,

$$\gamma = \delta$$

Con lo cual $|C| = |D|$.

§ 5.16. Lema (Comparabilidad e inyectabilidad). *Dados dos conjuntos cualesquiera C y D, ocurre $|C| \leqslant |D|$ si y sólo si existe una función inyectiva de C a D.*

Prueba. ($\Longrightarrow$) Sean $|C| = \gamma$ y $|D| = \delta$, y supongamos $\gamma \leqslant \delta$. Por tanto, tendremos: o bien $\gamma \in \delta$, o bien $\gamma = \delta$.

Si $\gamma \in \delta$, al tratarse de ordinales, y por tanto de conjuntos transitivos, tendremos también $\gamma \subseteq \delta$. Y si $\gamma = \delta$, entonces trivialmente se cumple también $\gamma \subseteq \delta$.

Por consiguiente, podemos construir una función f que sea inyectiva de γ a δ, simplemente estipulando que:

$$\text{para todo } x \in \gamma, \qquad\qquad f(x) = x$$

Y utilizando esta función f, y dado que $C \approx \gamma$ y $D \approx \delta$, resulta inmediato a su vez construir una función inyectiva de C a D.

($\Longleftarrow$) La segunda parte de la prueba de este lema figura como el *Problema 9* del listado de *Problemas propuestos.*

§ 5.17. Observación (Problema 10). Este es el momento apropiado para plantearse la respuesta al *Problema 10* del listado de *Problemas propuestos* (p. 10).

§ 5.18. Teorema (Teorema de Cantor). *Para cualquier conjunto D,*

$$|D| < |\mathscr{P}(D)|$$

(La cardinalidad de cualquier conjunto es estrictamente menor que la de su conjunto potencia.)

Prueba. Empezamos demostrando que existe una función inyectiva $f : D \longrightarrow \mathscr{P}(D)$.

Ello es inmediato, teniendo en cuenta que para todo $x \in D$, tendremos $\{x\} \in \mathscr{P}(D)$. Por consiguiente, basta con definir f estipulando que:

$$\text{para todo } x \in D, \qquad\qquad f(x) = \{x\}$$

Naturalmente, por (AX), si $x \neq y$ entonces también $\{x\} \neq \{y\}$. Con lo que resulta obvio que f constituye una función inyectiva de D en $\mathscr{P}(D)$.

A continuación vamos a demostrar que *no* existe ninguna función biyectiva entre D y $\mathscr{P}(D)$.

Para ello, tomaremos cualquier función $g : D \longrightarrow \mathscr{P}(D)$, y demostraremos que g no puede ser, en concreto, sobreyectiva. De ahí se seguirá que g tampoco puede ser biyectiva, obviamente. Y con ello nuestra prueba habrá concluido.

Ahora veamos. Dado que g es una función de D en $\mathscr{P}(D)$, el valor de cada $x \in D$ bajo g será un objeto $g(x) \in \mathscr{P}(D)$. Es decir:

$$\text{para todo } x \in D, \qquad\qquad g(x) \in \mathscr{P}(D)$$

Y en consecuencia,

$$\text{para todo } x \in D, \qquad\qquad g(x) \subseteq D$$

Por su parte, dado un $x \in D$ cualquiera, es posible que suceda $x \in g(x)$, o bien $x \notin g(x)$. Pues bien, sea C el conjunto de todos los elementos de D que cumplen la segunda de estas dos condiciones. Es decir, sea:

$$C \;=\; \{\, x : x \in D \text{ y } x \notin g(x) \,\} \tag{1}$$

Naturalmente, el conjunto C así formado puede ser vacío, si de hecho ocurre que no existe ningún $x \in D$ tal que $x \notin g(x)$. Pero en cualquier caso, lo que está claro es que C será siempre un subconjunto de D: $C \subseteq D$.

Y por consiguiente, si $g : D \longrightarrow \mathscr{P}(D)$ fuera una función sobreyectiva, tendría que existir un elemento $y \in D$ tal que

$$g(y) = C \tag{2}$$

Pero entonces, suponiendo $y \in C$, por (2) tendríamos $y \in g(y)$, lo cual va en contra de (1). Y suponiendo $y \notin C$, por (2) tendríamos $y \notin g(y)$; lo cual también va en contra de (1), ya que si $y \notin g(y)$, entonces y debería pertenecer a C.

Ello prueba que el elemento y no puede existir, y por tanto la función g no puede ser sobreyectiva.

En definitiva, existe una función inyectiva de D en $\mathscr{P}(D)$, pero no existe una función biyectiva entre ambas. Por consiguiente, aplicando los lemas previos (§ 5.15 y § 5.16), se sigue que necesariamente:

$$|D| < |\mathscr{P}(D)|$$

§ 5.19. Observación (El teorema de Cantor). La prueba del teorema de Cantor recuerda algo a la derivación de la paradoja de Russell, que vimos en su momento (cf. § 2.19, p. 32). No en vano, Russell se inspiró en este teorema, y en la llamada *"paradoja de Cantor"* que de él deriva, para concebir su propia paradoja.

Como vamos a ver en el resultado que se demuestra a continuación, gracias al teorema de Cantor, y en definitiva, al uso combinado de los axiomas de infinitud y del conjunto potencia, resulta posible formar conjuntos arbitrariamente grandes.

§ 5.20. Corolario (Cardinal máximo de cualquier conjunto de cardinales). *Si C es cualquier conjunto de cardinales, entonces existe un cardinal mayor que todos los elementos de C.*

Prueba. Sea C un conjunto de cardinales.

Si C es vacío, el resultado se sigue trivialmente. En caso contrario, sea $\alpha \in C$. Por definición de *conjunto unión*, tendremos:

$$\alpha \subseteq \bigcup C$$

Y por tanto obviamente

$$|\alpha| \leqslant |\bigcup C|$$

Como el propio α es un cardinal, tendremos también $|\alpha| = \alpha$. Por lo que podemos concluir:

$$\text{para todo } \alpha \in C \qquad\qquad \alpha \leqslant |\bigcup C|$$

Finalmente, aplicando el teorema de Cantor (§ 5.18) obtenemos un cardinal $|\mathscr{P}(\bigcup C)|$ tal que

$$|\bigcup C| < |\mathscr{P}(\bigcup C)|$$

y por consiguiente:

$$\text{para todo } \alpha \in C \qquad\qquad \alpha < |\mathscr{P}(\bigcup C)|$$

§ 5.21. Corolario (Paradoja de Cantor). *La clase de todos los cardinales es una clase propia.*

Prueba. Obvia por los resultados precedentes, § 5.18 y § 5.20. En efecto, si la clase de todos los cardinales fuera un conjunto, entonces existiría un cardinal mayor que todos sus elementos. Pero siendo un cardinal, tendría que pertenecer a esa misma clase, lo cual es imposible.

§ 5.22. Observación (La paradoja de Cantor). La paradoja que acabamos de reseñar fue descubierta por Georg Cantor, y comunicada por carta a Dedekind en 1899. La carta no se publicaría hasta 1932, en la edición de las *Obras completas* de Cantor debida a Ernst Zermelo. Está traducida en la edición española de escritos de Cantor *Fundamentos .... Escritos y correspondencia selecta*, pp. 259–264.

§ 5.23. Observación (Grandes cardinales). Para el estudio de los cardinales infinitos, en teoría de conjuntos se emplea una clasificación, que hace intervenir nuevamente a los ordinales, pero esta vez de una manera bien distinta.

En efecto, para cada ordinal β, en teoría de conjuntos se define cierto cardinal infinito, correspondiente a β, y denotado por:

$$\text{“}\aleph_\beta\text{”}$$

Esta definición se lleva a cabo mediante la denominada “recursión transfinita”. No es un procedimiento excesivamente complicado, pero nos llevaría demasiado tiempo explicarlo con detalle, por lo que va a quedar fuera del presente curso.

Lo que sí podemos apuntar aquí, es que, como se comprueba fácilmente, de acuerdo con esa definición:

$$\text{para cualesquiera ordinales } \alpha \text{ y } \beta \qquad \text{si} \qquad \alpha < \beta, \qquad \text{entonces} \qquad \aleph_\alpha < \aleph_\beta$$

Y que en particular, naturalmente, $\aleph_0$ no es otro que nuestro amigo ω:

$$\aleph_0 = \omega$$

A continuación de $\aleph_0$ vendrá $\aleph_1$, que es el mínimo cardinal infinito superior a $\aleph_0$. Nótese que este cardinal $\aleph_1$ no es igual, desde luego, al ordinal $\omega + 1$, ni tampoco a 2ω, sino que es mucho mayor que estos. En efecto, como ya hemos dicho, tanto $\omega + 1$ como 2ω no son ni siquiera cardinales (cf. § 5.5).

A continuación de $\aleph_1$ vendrá $\aleph_2$, etc.

Mucho más adelante vendrán $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega+1}$, etc., que son ya cardinales gigantescos. Y en general, para cualquier ordinal α, el cardinal $\aleph_\alpha$ será aquel cardinal infinito cuyo lugar en esta clasificación es el que viene determinado por el ordinal α.

§ 5.24. Observación (Hipótesis del continuo). Por el teorema de Cantor, es inmediato comprobar que $|\omega| < |\mathscr{P}(\omega)|$. Por tanto:

$$\aleph_0 < |\mathscr{P}(\aleph_0)|$$

El mismo Georg Cantor, padre de la teoría de conjuntos, conjeturó que, concretamente,

$$|\mathscr{P}(\aleph_0)| = \aleph_1$$

A esa hipótesis se la conoce como *"conjetura de Cantor"* o *"hipótesis del continuo"*.

En una versión ampliada, llamada *"hipótesis generalizada del continuo"* la conjetura se extiende a la suposición de que

$$|\mathscr{P}(\aleph_\alpha)| = \aleph_{\alpha+1} \qquad \text{para cualquier ordinal } \alpha$$

Resulta pertinente recordar aquí los resultados de Gödel y Cohen mencionados al final del módulo anterior, y que afectan directamente a esta hipótesis. Mientras Gödel demostró, en efecto, que la hipótesis generalizada del continuo es consistente con el resto de axiomas de la teoría, Cohen probó que otro tanto ocurre con la negación de la hipótesis del continuo en su versión restringida, y por tanto, también en su versión generalizada.

Por consiguiente la hipótesis del continuo, en sus dos versiones, resulta ser estrictamente independiente del resto de axiomas de la teoría.

Bibliografía general

Alonso Jiménez, J. A., J. Borrego Díaz, M. J. Pérez Jiménez y J. L. Ruiz Reina, *Curso práctico de teoría de conjuntos*, Sevilla: Ediciones la Ñ, 2000.

Badesa, C., I. Jané y R. Jansana, *Elementos de lógica formal*, Barcelona: Ariel, 1998.

Bell, J. L., y M. Machover, *A Course in Mathematical Logic*, Amsterdam: North-Holland, 1977 (reimp. 1997).

Cantor, G., *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*, Barcelona: Crítica, 2006.

Crossley, J. N., C. J. Ash, C. J. Brickhill, J. C. Stilwell y N. H. Williams, *¿Qué es la lógica matemática?*, Madrid: Tecnos, 1986.

Díez Calzada, J. A., *Iniciación a la lógica*, Barcelona: Ariel, 2002.

Drake, F. R., y D. Singh, *Intermediate Set Theory*, Chichester (West Sussex): Wiley & Sons, 1996.

Ershov, Yu., y E. Paliutin, *Lógica matemática*, Moscú: Mir, 1990.

Fernández Laguna, V., *Teoría básica de conjuntos*, Madrid: Anaya, 2004.

Fraenkel, A. A., Y. Bar-Hillel y A. Levy, *Foundations of Set Theory* (2ª ed.), Amsterdam: North-Holland, 1973 (reimp. 1984).

Halmos, P. R., *Teoría intuitiva de conjuntos*, México D.F.: Continental, 1965 (reimp. 1984).

Heijenoort, J. van (ed.), *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge (MA.): Harvard University Press, 1967 (reimp. 1999).

Lipschutz, S., *Teoría de conjuntos y temas afines*, en México D.F.: McGraw-Hill, 1969.

Liz Gutiérrez, M., *Teoría intuitiva de conjuntos y lógica clásica de proposiciones: Ejercicios*, La Laguna: Universidad de La Laguna, 1990.

Lorenzo, J. de, *Iniciación a la teoría intuitiva de conjuntos*, Madrid: Tecnos, 1972.

Machover, M., *Set Theory, Logic and their Limitations*, Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic* (4ª ed.), Londres: Chapman & Hall, 1997.

Mosterín, J., *Teoría axiomática de conjuntos* (2ª ed.), Barcelona: Ariel, 1980.

Mosterín, J., *Los lógicos*, Madrid: Espasa Calpe, 2000.

Pérez-Jiménez, M. de, *Teoría de clases y conjuntos*, Barcelona: Edunsa, 1988.

Roitman, J., *Introduction to Modern Set Theory*, Nueva York: Wiley, 1990.

Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Londres: Addison-Wesley, 1967 (reimp. en Natick (MA.): A. K. Peters, 2000).

Vaught, R., *Set Theory*, Boston (MA.): Birkäuser, 1995.

Zalabardo, J. L., *Introducción a la teoría de la lógica*, Madrid: Alianza, 2002 (pub. orig. en inglés, en Oxford: Westview Press, 2000).

Índice general

El axioma de la unión

Los axiomas de infinitud y del conjunto potencia

Módulo 3: *Relaciones y funciones*

El producto cartesiano

Módulo 5: *Cardinales. La hipótesis del continuo*

La definición de cardinal

El teorema de Cantor y la hipótesis del continuo