103 Simple+mente física

No es una curva cualquiera

(28 mayo – 1 junio 2007)

Los bucles verticales de algunas atracciones feriales (montañas rusas y similares), como los que se muestran en las figuras, no tienen la forma de una curva cualquiera. ¿Cuál de las siguientes curvas describe correctamente estos bucles? Y, ¿a qué se debe la elección de una curva u otra?

(a) circunferencia
(b) parábola
(c) elipse
(d) hipérbola
(e) catenaria
(f) cicloide
(g) otra -¿cuál?-

AVISO: El objeto de ***Simple+mente física*** no va más allá del placer que proporciona plantearse y resolver sencillas cuestiones razonando (y experimentando) de acuerdo con principios básicos de la física. No hay ningún tipo de compensación, excepto la satisfacción personal y no van dirigidas a ningún grupo de personas en particular (es decir, están abiertas a todo el mundo).

El primer día hábil de cada semana se presentará una nueva cuestión y la respuesta a la cuestión de la semana anterior.

Rafael Garcia Molina, Departamento de Física - CIOyN, Universidad de Murcia (rgm@um.es)

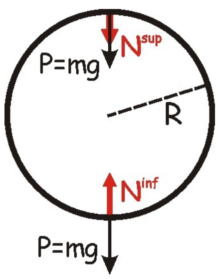
http://bohr.inf.um.es/miembros/rgm/s+mf/

Resp.: Al fijarnos en el bucle de una atracción ferial, vemos que su forma es parecida a una lágrima invertida;[1] desde luego, no tiene forma de circunferencia. Veamos por qué.

Consideremos un bucle vertical, cuya forma es una circunferencia de radio *R*, por donde se mueve un objeto puntual de masa *m*. En el siguiente cuadro aparecen las energías cinética y potencial en la parte superior e inferior del bucle:[2]

Parte superior del bucle:	$E_c^{sup}=m\,v^2/2$	$E_p^{sup}=m\,g\,2\,R$
Parte inferior del bucle:	$E_c^{inf}=m\,v_0^2/2$	$E_p^{sup}=0$

Suponiendo que no hay rozamiento, la conservación de la energía, conduce a la igualdad $m\,v_0^2/2=m\,v^2/2+m\,g\,2\,R$, de donde se obtiene la relación $v_0^2=v^2+4\,g\,R$ entre las velocidades en la parte inferior y superior del bucle.



La fuerza centrípeta es la responsable del cambio de dirección en el movimiento del objeto. En un lugar donde el radio de curvatura es *R*, la fuerza centrípeta sobre el objeto vale $F_{cent}=m\,v^2/R$. La figura muestra el diagrama de las fuerzas que actúan sobre la masa *m*. En la parte superior del bucle sólo actúan el peso, *mg*, y la fuerza normal, N^{sup}, que ejerce la pista sobre el cuerpo; ambas fuerzas están dirigidas hacia abajo, así pues, $F_{cent}=m\,v^2/R=mg+N^{sup}$. El cuerpo caerá cuando deje de estar en contacto con la pista (es decir, cuando $N^{sup}=0$). De las dos ecuaciones anteriores se deduce que la velocidad mínima de la masa *m* en la parte superior del bucle para no caer es $v^2=g\,R$. Al sustituir este valor en la expresión que da v_0, obtenemos que la mínima velocidad de entrada al bucle para que el cuerpo no caiga en la parte superior vale $v_0=\sqrt{5\,g\,R}$. Para simplificar la discusión que sigue, supondremos que se accede al bucle con esta velocidad mínima.

La "sensación" que experimentan los pasajeros que se desplazan sobre una pista se debe a la fuerza normal *N* que sobre ellos ejerce la pista. Como $N^{sup}=0$ en la parte superior del bucle, se tiene la "sensación de ingravidez" (como si nada actuara sobre nuestro cuerpo).[3] En el diagrama de fuerzas se observa que la fuerza normal y el peso tienen sentidos opuestos en la parte inferior del bucle, por lo que la fuerza centrípeta es $m\,v_0^2/R=N^{inf}-P$; al sustituir el valor $v_0=\sqrt{5\,g\,R}$, se obtiene que $N^{inf}=6\,m\,g$. En la base del bucle la sensación que experimentaría nuestro cuerpo equivaldría a la producida por una gravedad que sea seis veces la terrestre (6*g*).[4]

El suministro de oxígeno al cerebro puede cesar completamente para aceleraciones que varían entre 5*g* y 6*g*, dependiendo de cada individuo (y del uso de trajes especiales). Así pues, en el bucle con forma de circunferencia, para evitar que el cuerpo caiga en la parte superior ha de someterse a una gran aceleración en la parte inferior, con el consiguiente riesgo para la salud.

Otra desventaja del bucle circular es que al entrar (o salir) por una pista recta (con radio de curvatura infinito) se produce una brusca transición desde una aceleración

---

[1] La parte superior tiene radio prácticamente constante (una semicircunferencia), mientras que el radio de curvatura de la mitad inferior aumenta a medida que se acerca a la base.

[2] Tomamos la parte inferior como origen de energía potencial.

[3] Esta sensación no se debe a que deje de actuar la gravedad -cosa que nunca sucede, pues la interacción gravitatoria decrece con el cuadrado de la distancia y nunca se anula-, sino porque el cuerpo no siente la fuerza que le ejercería la pista, con la que estaría en contacto si $N\neq 0$.

[4] También se usa la expresión "gravedad 6".

centrípeta nula hasta alcanzar el valor máximo de la aceleración en la base del bucle. Por ello es necesario que varíe suavemente el radio de curvatura de la pista por donde se circula, desde la recta de acceso hasta que comienza el bucle propiamente dicho.

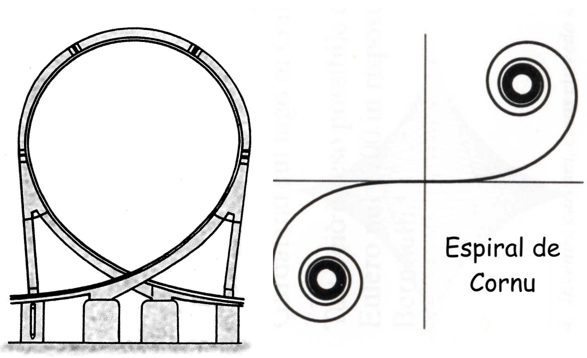
Por todo lo anteriormente dicho, queda descartada la circunferencia para construir bucles en las atracciones feriales. También descartamos el resto de curvas propuestas (parábola, elipse, hipérbola, catenaria, cicloide), pues no guardan ningún parecido con dichos bucles. Así, pues, es otra curva (respuesta g) la que se emplea para diseñar los bucles, tal como veremos a continuación.

La **clotoide** es una función cuyo radio de curvatura *R* varía suavemente. Se obtiene a partir de la espiral de Cornu, cuya curvatura es inversamente proporcional a la longitud *s* del arco en cualquier punto de la curva, $1/R = s/a^2$, siendo *a* una constante que determina lo abierta o cerrada que es la curva. La espiral de Cornu también aparece en óptica e ingeniería, y tiene la siguiente representación paramétrica en coordenadas cartesianas:

$$x = C(t) = \int_0^t dz \cos(\pi z^2/2) \qquad y = S(t) = \int_0^t dz \sin(\pi z^2/2)$$

donde *C* y *S* se denominan integrales de Fresnel.

Los bucles de los parques de atracciones son secciones de una espiral de Cornu con su correspondiente reflexión vertical. Un diseño habitual consiste en una aproximación suave a la parte inferior del bucle, seguida por una curva cuyo radio decrece regularmente, adoptando la forma de un arco de circunferencia alrededor de $\pm 65°$ respecto a la línea vertical que bisecta el bucle.



Empleando una clotoide se necesita una menor velocidad mínima en la parte superior que cuando el bucle es una circunferencia, por ello un acceso más lento al bucle todavía puede proporcionar suficiente aceleración centrípeta en la parte superior. De este modo, los viajeros sienten la "ingravidez" en la parte superior, pero la menor velocidad de acceso en la base hace que el viaje sea más confortable.

También se emplean partes de la clotodoide para diseñar las conexiones (entradas y salidas) de las autopistas o de las vías de tren.

Miscelánea (frases, anécdotas, curiosidades…): En la mitología griega, las decisiones del Destino (irrevocables, tanto para los mortales como para los dioses) eran ejecutadas por las Parcas. Éstas eran tres: Cloto, Laquesis y Atropos, representadas como unas mujeres pálidas y demacradas que hilan en silencio, a la tenue luz de una lámpara. Cloto es la más joven y tiene en su mano una rueca de la que penden hilos de todos los colores y todas las calidades (de seda y oro para los hombres cuya existencia será feliz; de lana y cáñamo para todos aquellos que están destinados a ser pobres y desgraciados). Laquesis da vueltas al huso en el que va arrollando los hilos que le presenta su hermana. Atropos, que es la de más edad, aparece con la mirada atenta y melancónica, inspecciona su trabajo y, valiéndose de unas tijeras muy largas, corta de improviso y cuando le place el hilo fatal.

A principios del siglo XX, el matemático italiano Ernesto Cesàro (1859-1906) dio el nombre de *clotoide* a una curva con forma de doble espiral simétrica, inspirándose en el hilo que se enrolla en el huso y en la rueca. Esta curva también se denomina *espiral de Cornu*, en honor a Marie-Alfred Cornu (1841-1902), profesor de Física en la École Politechnique de Paris, quien la usó en sus estudios sobre la difracción de la luz. Pero Euler ya conocía esta curva en 1744, pues la había empleado al resolver un problema propuesto por J. Bernoulli.