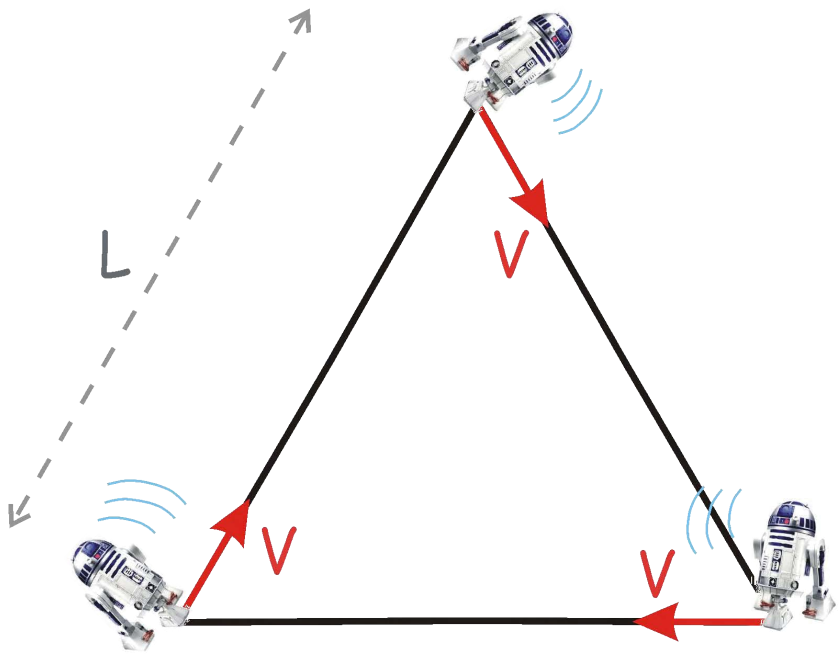
11 Simple+mente física

Persecución entre robots

(16 – 20 diciembre 2002)

En cada vértice de un triángulo equilátero hay un robot; cada uno de ellos está programado para perseguir al robot que se encuentra en el vértice adyacente (en el sentido de las agujas del reloj). Si el lado del triángulo vale L y cada robot se mueve con velocidad V, ¿cuánto tiempo tardarán los robots en darse alcance?

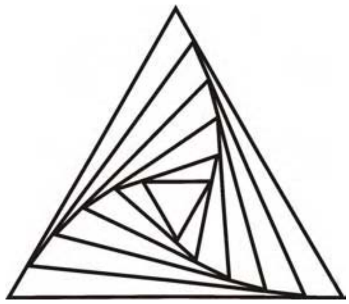


AVISO: El objeto de ***Simple+mente física*** no va más allá del placer que proporciona plantearse y resolver sencillas cuestiones razonando (y experimentando) de acuerdo con principios básicos de la física. No hay ningún tipo de compensación, excepto la satisfacción personal y no van dirigidas a ningún grupo de personas en particular (es decir, están abiertas a todo el mundo).

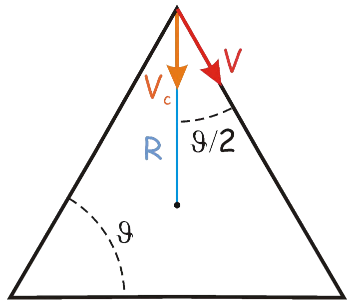
El primer día hábil de cada semana se presentará una nueva cuestión y la respuesta a la cuestión de la semana anterior.

Rafael Garcia Molina – Departamento de Física, Universidad de Murcia (rgm@um.es)

http://bohr.inf.um.es/miembros/rgm/s+mf/



Resp.: Dada la simetría del problema, las posiciones relativas de los robots seguirán siendo los vértices de un triángulo equilátero, cuyo lado va disminuyendo a medida que transcurre el tiempo, tal como se representa en la figura superior. Si suponemos que el tamaño de los robots es despreciable comparado con el del triángulo, éstos se darán alcance cuando desaparezca el triángulo, pues su lado (que es la distancia que separa siempre los centros de los robots) se ha hecho nulo. Así pues, los robots coincidirán en el centro del triángulo.



La velocidad con que avanza cada robot hacia el centro del triángulo será su velocidad de persecución proyectada en la dirección que une el vértice y el centro del triángulo, $V_c = V\cos(\theta/2)$, donde θ es el ángulo que forma el vértice del triángulo (figura inferior). Como esta velocidad es constante, el tiempo que tarda cada robot en llegar al centro del triángulo se obtiene dividiendo la distancia R (desde el vértice al centro del triángulo) entre la componente de la velocidad dirigida hacia el centro del triángulo, V_c. Por geometría puede comprobarse que $R=(L/2)/\cos(\theta/2)$.

El tiempo que tardan en darse alcance los (centros de los) robots valdrá

$$t=\frac{R}{V_c}=\frac{(L/2)/\cos(\theta/2)}{V\cos(\theta/2)}=\frac{L/2}{V\cos^2(\theta/2)}=\frac{L/2}{V\left(\sqrt{3}/2\right)^2}=\frac{2L}{3V}.$$

En la expresión anterior se ha tenido en cuenta que $\theta=60°$ en un triángulo equilátero, por lo tanto $\cos(\theta/2)=\cos 30°=\sqrt{3}/2$.

Podemos generalizar el cálculo anterior para un polígono regular de n lados. En este caso, el ángulo θ del vértice y la distancia R desde un vértice hasta el centro del polígono valen $\theta=180°(n-2)/n$ y $R=L/\left[2\sin(180/n)\right]$, respectivamente. El tiempo que tardarían en darse alcance los robots es

$$t=\frac{R}{V_c}=\frac{L/\left[2\sin(180°/n)\right]}{V\cos\left[90°(n-2)/n\right]}=\frac{L}{2V\sin(180°/n)\cos\left[90°(n-2)/n\right]}$$

Como era de esperar, esta expresión reproduce el valor obtenido anteriormente para el triángulo. Aunque la recta no es un polígono propiamente hablando, cuando $n=2$ se obtiene que $t=L/(2V)$, es decir, el encuentro se produce a mitad de camino. Para el cuadrado ($n=4$) se tiene que $t=L/V$. La figura adjunta muestra cómo depende tV/L con el número de lados n del polígono. Nótese que la dependencia es de tipo potencia ($(tV/L)\sim n^k$) cuando el polígono tiene muchos lados.