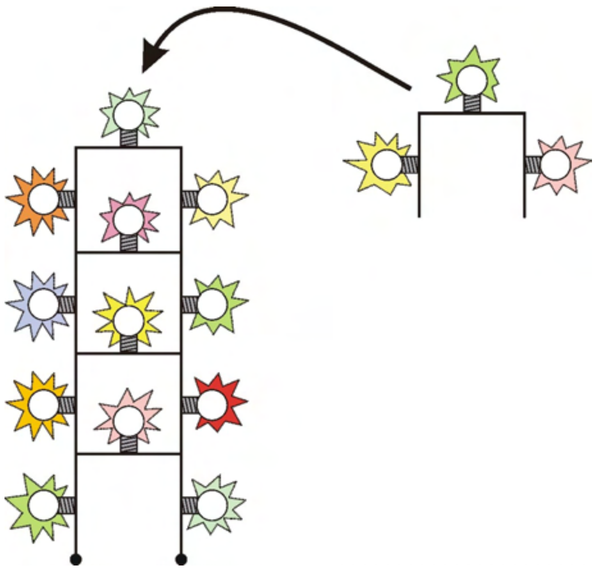
124

Escalera de resistencias

(15 – 19 diciembre 2008)

Durante las fiestas navideñas, los bomberos de una localidad deciden colocar una guirnalda luminosa en la escalera de uno de sus vehículos, con las luces dispuestas tal como se ilustra a la izquierda de la figura. La unidad básica para construir la escalera luminosa aparece en la esquina superior derecha de la figura; así, añadiendo esta unidad básica se pueden construir escaleras de luces tan altas como se desee.



Como los terminales del circuito de bombillas se alimentan con un voltaje fijo, para determinar la potencia eléctrica consumida los bomberos necesitan conocer la resistencia equivalente entre los terminales, la cual dependerá del tamaño de cada escalera (cuantificado por su número de peldaños, *n*).

¿Cómo varía la resistencia equivalente con el número de peldaños: aumenta o disminuye con *n*? ¿Cuánto valdría la resistencia equivalente de una escalera con infinitos peldaños?[1]

AVISO: El objeto de ***Simple+mente física*** no va más allá del placer que proporciona plantearse y resolver sencillas cuestiones razonando (y experimentando) de acuerdo con principios básicos de la física. No hay ningún tipo de compensación, excepto la satisfacción personal y no van dirigidas a ningún grupo de personas en particular (es decir, están abiertas a todo el mundo).

El primer día hábil de cada semana se intentará presentar una nueva cuestión y la respuesta a la cuestión anterior.

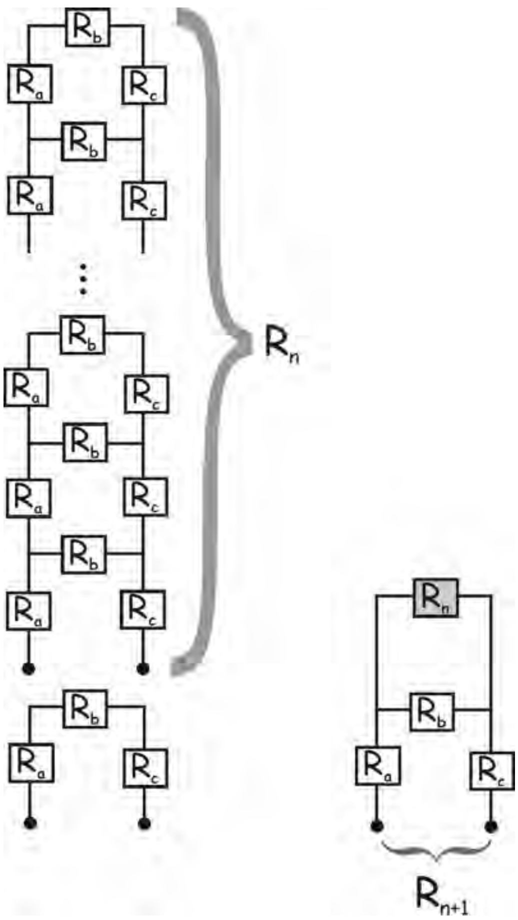
Rafael Garcia Molina, Departamento de Física - CIOyN, Universidad de Murcia (rgm@um.es)

http://bohr.inf.um.es/miembros/rgm/s+mf/

[1] Suponiendo que se pueda construir, tal como la necesaria "para llegar al cielo" que se menciona en la canción "La Bamba".

Resp.: Supongamos el caso general en que las resistencias de la unidad básica son diferentes y valen R_a, R_b y R_c, tal como se representa en la figura. La resistencia R_{n+1} entre los terminales de la escalera de resistencias con $n+1$ peldaños se puede obtener a partir de la resistencia R_n de la escalera con *n* peldaños, teniendo en cuenta que la asociación en paralelo de R_b y R_n está dispuesta en serie con R_a y R_c (como se muestra a la derecha de la figura):

$$R_{n+1}=R_a+[R_b \text{ y } R_n]_{\text{paralelo}}+R_c \,. \qquad \text{-(1)}$$



La resistencia equivalente a la asociación en paralelo de R_b y R_n vale:

$$[R_b \text{ y } R_n]_{\text{paralelo}}=\frac{R_b R_n}{R_b+R_n} \,. \qquad \text{-(2)}$$

Sustituyendo la ec. (2) en la ec. (1), obtenemos

$$R_{n+1}=R_a+\frac{R_b R_n}{R_b+R_n}+R_c \,, \qquad \text{-(3)}$$

Esta expresión proporciona la dependencia de la resistencia equivalente en función del número *n* de peldaños, para $n=1,2,3\ldots$, donde $R_1=R_a+R_c+R_c$. Puede comprobarse que R_n disminuye a medida que aumenta *n*, para cualquier valor de las resistencias individuales R_a, R_b y R_c.

Cuando *n* tiende a infinito, la resistencia equivalente del circuito es R_∞, y no habrá diferencia entre R_n y R_{n+1}, por lo que podemos escribir $R_n=R_{n+1}=R_\infty$. Teniendo en cuenta esta igualdad en la ec. (3), que relaciona las resistencias equivalentes de dos circuitos que difieren únicamente en una unidad básica, escribimos:

$$R_\infty=R_a+\frac{R_b R_\infty}{R_b+R_\infty}+R_c \,. \qquad \text{-(4)}$$

Reagrupando términos, se llega a la siguiente ecuación de segundo grado para el valor de la resistencia equivalente en la escalera con infinitos peldaños, R_∞:

$$R_\infty^2-R_\infty(R_a+R_c)-R_b(R_a+R_c)=0 \,, \qquad \text{-(5)}$$

cuya solución es $R_\infty=[R_a+R_c\pm\sqrt{(R_a+R_c)^2+4R_b(R_a+R_c)}]/2$.

En el caso en que todas las resistencias son iguales ($R_a=R_b=R_c=R$) se obtiene el siguiente valor para la resistencia equivalente en la escalera de infinitos peldaños: $R_\infty=R(1+\sqrt{3})$. La solución correspondiente al signo negativo de $\pm$ no tiene sentido físico, pues daría lugar a una resistencia negativa. Puede comprobarse que la ec. (3) converge muy rápidamente a R_∞.