

149 *Simple + mente física*



Cadena sumergida

(13 – 17 septiembre 2010)

En la fotografía aparece una cadena sostenida entre dos pilares. Una magnitud característica, y fácilmente observable, de la cadena suspendida bajo el efecto de su propio peso es la distancia vertical entre su parte más baja y los puntos de suspensión, que se denomina “flecha”.



Si la cadena estuviera completamente sumergida en agua (porque la plaza se inunda, por ejemplo), su flecha sería:

- (a) mayor
- (b) igual
- (c) menor

que la flecha de la cadena situada al aire libre.

AVISO: El objeto de *Simple + mente física* no va más allá del placer que proporciona plantearse y resolver sencillas cuestiones razonando (y experimentando) de acuerdo con principios básicos de la física. No hay ningún tipo de compensación, excepto la satisfacción personal, y no van dirigidas a ningún grupo de personas en particular (es decir, están abiertas a todo el mundo).

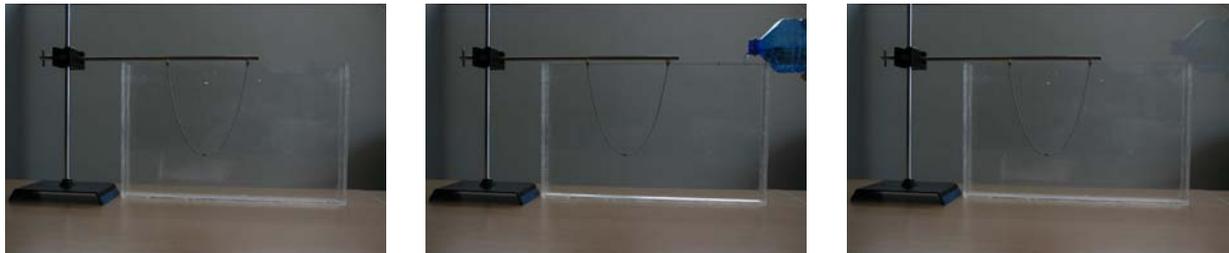
El primer día hábil de cada semana se presentará (al menos, se intentará) una nueva cuestión y la respuesta a la cuestión de la semana anterior.

Rafael Garcia Molina, Departamento de Física - CIOyN, Universidad de Murcia (rgm@um.es)

<http://bohr.inf.um.es/miembros/rgm/s+mf/>

Resp.: Podemos obtener la respuesta mediante dos procedimientos: (i) experimental y (ii) teórico.

(i) Suspendemos una pequeña cadena de dos puntos fijos y la introducimos en un recipiente que posteriormente llenamos de agua, tal como se ilustra en la secuencia de figuras adjuntas: en la parte izquierda y central aparece la cadena en el aire y sumergida, respectivamente, mientras que en la derecha se ha superpuesto las dos imágenes anteriores.¹ Como puede apreciarse, no se distinguen las curvas que forma la cadena en el aire y la cadena sumergida, pues se superponen perfectamente.²



(ii) La forma que adquiere una cadena (o cuerda) sometida a su propio peso se denomina "catenaria". Su cálculo teórico es algo engorroso, pero no es esencialmente complicado, por lo que se dará el resultado sin deducirlo.³ Si la cadena tiene una longitud L y está suspendida de dos puntos situados a la misma altura y separados una distancia a , la curva de la catenaria viene dada por la siguiente expresión

$$y(x) = \frac{1}{\gamma} \cosh \left[\left(\frac{\gamma}{2} (2x - a) \right) - \cosh \left(\frac{\gamma a}{2} \right) \right], \quad (1)$$

donde el parámetro γ se obtiene al resolver la ecuación

$$L = \frac{2}{\gamma} \sinh \left(\frac{\gamma a}{2} \right), \quad (2)$$

que relaciona la longitud L y la separación a entre los puntos de suspensión. El valor de γ ha de obtenerse por algún procedimiento numérico,⁴ pues no puede despejarse directamente de la ec. (2).

A partir del valor de γ puede obtenerse la flecha, que vale

$$h = \frac{1}{\gamma} \left(\cosh \left(\frac{\gamma a}{2} \right) - 1 \right). \quad (3)$$

Los valores empleados en la experiencia son $L=40$ cm y $a=15$ cm. La flecha que se ha medido vale $h=17.3$ cm.

Mediante un procedimiento numérico se ha obtenido que $\gamma=0.354$, con lo cual $h=17.37$ cm, en excelente acuerdo con el valor medido experimentalmente.

El que la forma que adquiere la cadena no dependa de si está sumergida o no, se debe a que la expresión de la curva de la catenaria, ec. (1), no aparece ninguna dependencia con la fuerza peso que actúa sobre la cadena; el peso de la cadena depende tanto de su densidad como de la gravedad, así como del empuje que ejerce el fluido en el cual está inmersa.

Así pues, por ambos procedimientos (experimental y teórico) se obtiene el mismo resultado: la forma de la cadena (y, por tanto, su flecha) no varía cuando se sumerge.

¹ La botella con la que se llena el recipiente se aprecia levemente porque la segunda imagen se ha tomado casi transparente.

² Agradezco a Pablo Serna Martínez la ayuda prestada para obtener las fotografías de la cadena en el aire y sumergida.

³ Puede consultarse una demostración relativamente sencilla en http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica_/solido/estatica/catenaria/catenaria.xhtml.

⁴ Por ejemplo, mediante la intersección de las curvas $\gamma L/2$ y $\sinh(\gamma a/2)$.