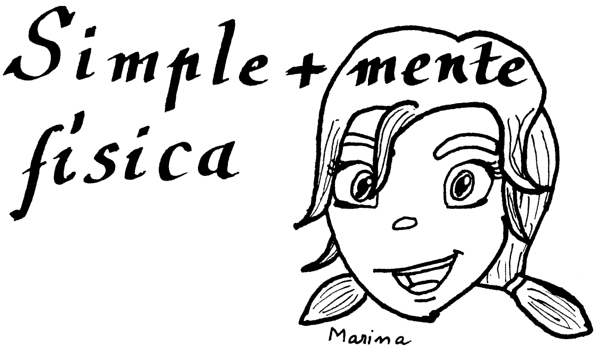
38



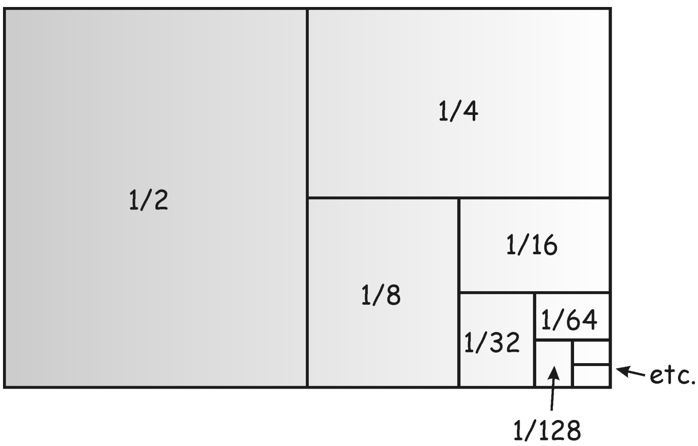
Bolas de papel arrugado

(15 – 19 diciembre 2003)

Aunque los periódicos no suelen prodigarse en noticias científicas, pueden ser útiles para la ciencia realizando con ellos el experimento que se describe a continuación.

Se trata de hacer bolas de papel arrugando cada una de las porciones que resultan de cortar sucesivamente por la mitad una hoja de periódico. Seguidamente se mide el diámetro de cada una de estas bolas. El resultado dependerá del tipo de papel y de la presión con que apretemos, además de las inevitables fluctuaciones estadísticas.

En la figura se indican las porciones que se obtienen a partir de una doble hoja de periódico. La tabla muestra los resultados promediados para varias bolas y en diferentes orientaciones (ya que no son esferas perfectas); la columna izquierda es la superficie *S* del papel expresada como fracción de la superficie S_{ini} de la doble hoja inicial; la columna derecha indica el diámetro *D* (en cm) de la correspondiente bola de papel arrugado.



A la vista de estos resultados, ¿cuánto crees que valdrán los diámetros correspondientes a las bolas de papel que se obtienen con las hojas cuyas superficies están en la relación 1 y 1/128, respectivamente, de la doble hoja inicial?

S/S_{ini}	D (cm)
1/2	4.0
1/4	3.1
1/8	2.4
1/16	2.0
1/32	1.5
1/64	1.1

Rafael Garcia Molina – Departamento de Física, Universidad de Murcia (rgm@um.es)

http://bohr.inf.um.es/miembros/rgm/s+mf/

Resp.: Está claro que el diámetro de cada bola crece a medida que aumenta la cantidad de papel que la forma. A la vista de la figura 1, en la que se ha representado D en función de S/S_{ini}, resulta difícil extrapolar los valores de D correspondientes a $S/S_{ini}=1$ y $S/S_{ini}=1/128=0.00781$. Así pues, hemos de pensar en otro procedimiento para relacionar el diámetro y la cantidad de papel de cada bola.

La masa M de cada pieza de papel está relacionada con su superficie S mediante la expresión $M=\sigma S$, donde σ es la densidad másica superficial del papel, que es constante para cada tipo de papel empleado (de periódico, en nuestro caso). Por ello, podemos suponer que el diámetro D de las bolas de papel tiene la misma dependencia funcional con S que con M (salvo un factor de proporcionalidad, que no influirá en el razonamiento subsiguiente).

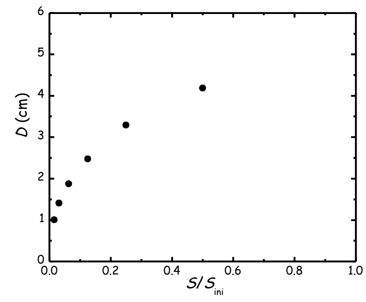


Figura 1

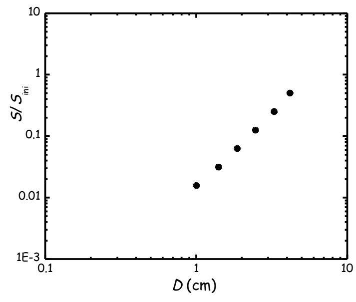


Figura 2

Si las bolas se formaran a partir de láminas de plastilina o arcilla, podríamos escribir la siguiente relación $S=kD^3$ entre la superficie de la lámina empleada para hacer cada bola y su diámetro; la constante de proporcionalidad k depende del tipo de material. El valor de la potencia a la que está elevado el diámetro D caracteriza la forma en que llenan el espacio los cuerpos al aumentar su tamaño. En concreto, el valor 3 es la dimensión del espacio euclideo tridimensional, que se llena completamente, sin dejar huecos, a medida que crece un sólido macizo (como una esfera o un cubo, por ejemplo).

Para el caso de bolas de papel arrugado podemos suponer una relación funcional similar a la anterior, pero sin especificar el valor de la potencia a la que está elevado el diámetro: $S/S_{ini}=hD^m$; por comodidad en el razonamiento subsiguiente, se ha escrito explícitamente el valor de la superficie de la doble hoja inicial de periódico. Aplicando logaritmos a la relación anterior se obtiene $\log(S/S_{ini})=\log h+m\log D$. Puede verse claramente esta relación lineal al emplear una escala logarítmica para representar S/S_{ini} en función del diámetro D de cada bola (figura 2); un ajuste por mínimos cuadrados nos da la ordenada en el origen ($\log h=-1.96$) y la pendiente ($m=2.74$). A la vista de este resultado, la dependencia entre la superficie de papel y el diámetro de la bola que se obtiene al arrugarlo es[1] $S/S_{ini}=0.011D^{2.74}$. A partir de esta fórmula, se obtiene que $D=[(S/S_{ini})/0.011]^{1/2.74}$, y aplicándola a los dos valores de S/S_{ini} que nos interesan, obtenemos que D vale 5.2 cm y 0.88 cm cuando S/S_{ini} vale 1 y 1/128, respectivamente; estos valores deducidos concuerdan razonablemente con los diámetros medidos, que son 5.6 cm y 0.79 cm.

El hecho de que D esté elevado a una potencia fraccionaria ($m=2.74$) es una clara indicación de que el papel arrugado no llena el espacio completamente, sino que van quedando huecos entre sus pliegues de tal manera que la densidad másica de las bolas no es constante, pues depende de su tamaño; este comportamiento es típico de la geometría fractal. La potencia a la que está elevado el tamaño característico de la estructura estudiada se denomina "dimensión fractal" y caracteriza el ritmo al que crece la estructura fractal. En el caso de las bolas de papel arrugado el tamaño característico es su diámetro D y la dimensión fractal vale 2.74.

---

[1] $h=10^{-1.96}=0.011$. Aunque para obtener mejores resultados, conviene tomar más cifras significativas en los coeficientes del ajuste por mínimos cuadrados.