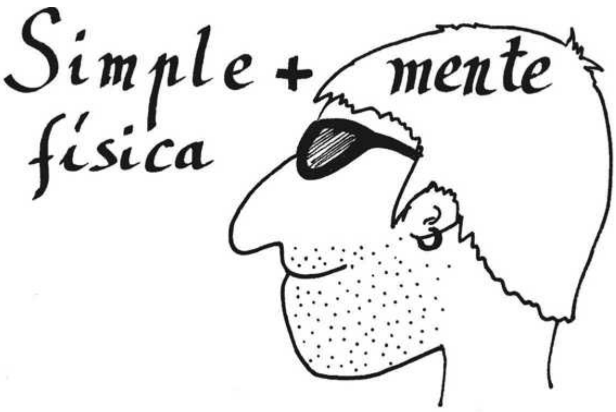
53



Rebobina media casete

(4– 8 octubre 2004)

Un aficionado a la música está escuchando la última grabación de *El Fari* en una casete (¡que es como hay que escuchar estas cosas!). Cuando finaliza la cinta, decide oírla de nuevo para apreciar mejor los matices de la gran obra y observa que en el rebobinado completo de la cinta se dan 500 vueltas. Como el arte no está reñido con la ciencia, este espíritu curioso se pregunta cuántas vueltas serán necesarias para rebobinar la mitad de la cinta.

Haz tú este cálculo, buscando los datos y/o realizando las suposiciones que consideres oportunas.

AVISO: El objeto de ***Simple+mente física*** no va más allá del placer que proporciona plantearse y resolver sencillas cuestiones razonando (y experimentando) de acuerdo con principios básicos de la física. No hay ningún tipo de compensación, excepto la satisfacción personal y no van dirigidas a ningún grupo de personas en particular (es decir, están abiertas a todo el mundo).

El primer día hábil de cada semana se presentará una nueva cuestión y la respuesta a la cuestión de la semana anterior.

Rafael Garcia Molina – Departamento de Física, Universidad de Murcia (rgm@um.es)

http://bohr.fcu.um.es/miembros/rgm/s+mf/

http://www.fisimur.org

RESPUESTA

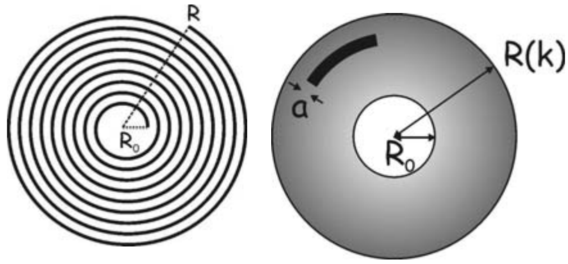
Núm. 53: Rebobina media casete

(4 – 8 octubre 2004)

Un aficionado a la música está escuchando la última grabación de *El Fari* en una casete (¡que es como hay que escuchar estas cosas!). Cuando finaliza la cinta, decide oírla de nuevo para apreciar mejor los matices de la gran obra y observa que en el rebobinado completo de la cinta se dan 500 vueltas. Como el arte no está reñido con la ciencia, este espíritu curioso se pregunta cuántas vueltas serán necesarias para rebobinar la mitad de la cinta.

Haz tú este cálculo, buscando los datos y/o realizando las suposiciones que consideres oportunas.

Resp.: Supondremos que la cinta tiene un espesor a y se enrolla sobre un eje central de radio R_0. El radio R de la cinta enrollada aumenta en la cantidad a cada vez que da una vuelta completa; esto se puede expresar matemáticamente mediante la fórmula de la espiral de Arquímedes $R(k) = R_0 + ka$, donde k es el número de vueltas.



Como el número de vueltas está relacionado con el ángulo mediante $k = \theta/(2\pi)$, la longitud de cinta rebobinada después de dar k vueltas es[1]

$$L = \int_0^{2\pi k} \mathrm{d}\theta\, R(\theta) = \int_0^{2\pi k} \mathrm{d}\theta \left(R_0 + \frac{a}{2\pi}\theta \right) = R_0\theta + \frac{a}{2\pi}\frac{\theta^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi k} = 2\pi\left(R_0 k + \frac{a}{2}k^2 \right)$$

El número n de vueltas necesario para rebobinar media cinta ($L/2$) aparece implícito en la expresión $L/2 = 2\pi(R_0 n + an^2/2)$. Sustituyendo el valor de L en la expresión donde aparece n, obtenemos una ecuación de segundo grado para n que, después de agrupar términos, se escribe como $n^2 + (2R_0/a)n - \left(R_0 k/a + k^2/2\right) = 0$, cuya solución es $n = -(R_0/a) + \sqrt{(R_0/a)^2 + \left(R_0 k/a + k^2/2\right)}$. Se descarta la raíz negativa por carecer de significado físico (ya que daría lugar a un valor $n < 0$).

Para calcular exactamente n es necesario conocer el radio R_0 del eje central sobre el que gira la cinta, así como su espesor a; realizando las consultas oportunas (Internet, folletos de información de casetes...) se obtiene que estos valores son $R_0 = 1.1$ cm y a varía entre 1.15×10^{-3} cm y 1.16×10^{-3} cm (para una cinta tipo *C*-90 o *C*-60, respectivamente), con lo cual $n \approx 275$. Como vemos, “la mitad de la cinta no da la mitad de vueltas”.

En el caso en que el radio del eje alrededor del cual gira la cinta fuera mucho menor que el radio de ésta ($R_0 << ak$), entonces n se podría aproximar por $n \approx k/\sqrt{2}$. En ese caso, si la cinta completa se rebobina en 500 vueltas, media cinta se rebobinaría en aproximadamente 354 vueltas, lo cual no puede aplicarse a la cinta de nuestro problema.

---

[1] Este resultado también puede obtenerse dividiendo el área que forma la corona de cinta enrollada entre el espesor de la cinta:

$$L = \frac{\text{área de la corona}}{\text{espesor de la cinta}} = \frac{\pi[R(\theta)^2 - R_0^2]}{a} = \theta R_0 + \frac{a\theta^2}{4\pi} = 2\pi\left(R_0 k + \frac{a}{2}k^2 \right)$$

donde hemos tenido en cuenta que $k = \theta/2\pi$.