78

Simple+mente física

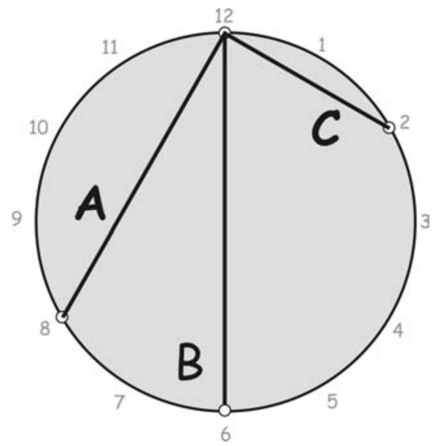
Cayendo por las cuerdas de un círculo

(17 – 22 octubre 2005)

El círculo de la figura está colocado verticalmente, con alambres dispuestos a lo largo de cuerdas que unen diferentes puntos de su perímetro; por estos alambres pueden deslizar sin rozamiento pequeñas cuentas de collar. Emplearemos la disposición de las horas en un reloj para referirnos a cada alambre, pues todos tienen su origen en la parte superior del círculo (las 12), pero el alambre A llega hasta las 8, el alambre B llega hasta las 6 y el alambre C llega hasta las 2.

Si dejamos caer una cuenta desde la parte superior de cada alambre, ¿cuál llegará antes a la periferia del círculo?:

(a) la del alambre A
(b) la del alambre B.
(c) la del alambre C.
(d) todas llegarán al mismo tiempo.



AVISO: El objeto de ***Simple+mente física*** no va más allá del placer que proporciona plantearse y resolver sencillas cuestiones razonando (y experimentando) de acuerdo con principios básicos de la física. No hay ningún tipo de compensación, excepto la satisfacción personal y no van dirigidas a ningún grupo de personas en particular (es decir, están abiertas a todo el mundo).

El primer día hábil de cada semana se presentará una nueva cuestión y la respuesta a la cuestión de la semana anterior.

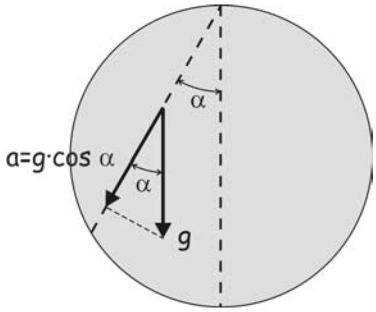
Rafael Garcia Molina – Departamento de Física, Universidad de Murcia (rgm@um.es)

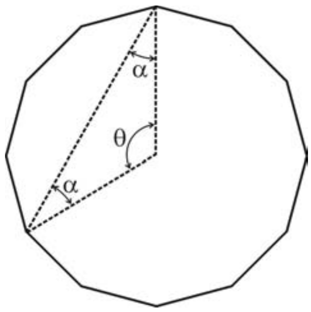
http://bohr.fcu.um.es/miembros/rgm/s+mf/

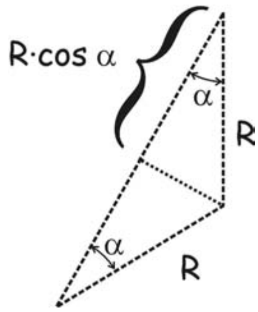
http://www.fisimur.org

Resp.: La aceleración a que actúa sobre las cuentas no es la misma en cada alambre, pero sí que es constante a lo largo de cada uno de ellos. Por lo tanto, las cuentas caen libremente a lo largo de cada alambre (de longitud s) y el tiempo t empleado en cada recorrido es $t=\sqrt{2s/a}$.

La aceleración de cada cuenta se obtiene proyectando g (la aceleración debida a la gravedad terrestre) sobre la dirección de cada alambre: $a=g\cos\alpha$, donde α es el ángulo que subtiende cada alambre con la vertical, tal como se ilustra en la figura de la izquierda.







Para obtener los ángulos α correspondientes a cada alambre, recurriremos a la geometría. Las "horas del reloj" están dispuestas según un polígono regular de $N=12$ lados. El ángulo que forman dos rectas que parten radialmente desde el centro hacia dos vértices cualesquiera de un polígono regular de N lados es $\theta=(360°/N)\,n$, donde n es el número de lados comprendido entre los vértices. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180º, de la figura del centro se deduce que $2\alpha+\theta=180°$, por lo que $\alpha=[180°-360°(n/N)]/2$.

Si el círculo tiene radio R, la longitud de una cuerda que subtiende un ángulo α con la vertical es $s=2R\cos\alpha$, según se deduce de la figura de la derecha.

La siguiente tabla muestra los valores de α, s y a correspondientes a cada alambre.

	ángulo α	longitud s	aceleración a
alambre A	30°	$\sqrt{3}R$	$g\sqrt{3}/2$
alambre B	0°	$2R$	g
alambre C	60°	R	$g/2$

Sustituyendo las expresiones de s y de a (o los valores de la tabla anterior) en la ecuación que proporciona el tiempo que dura la caída, vemos que desaparece la dependencia con el ángulo α. Así, obtenemos que el tiempo empleado por la cuenta de collar en recorrer cada alambre vale siempre $t=\sqrt{4R/g}$.

Como hemos visto, las longitudes de todos los alambres (que tienen un origen común y están dispuestos a lo largo de cuerdas en una circunferencia) se modifican en la misma proporción que lo hace la aceleración a la que están sometidas las cuentas de collar que deslizan por cada uno de ellos (en ambos casos, el factor de proporcionalidad es $\cos\alpha$). Los aumentos de s y a se cancelarán siempre, pues ambas magnitudes aparecen como cociente en la ecuación que da la duración de la caída.

Así pues, todas las cuentas de collar tardan el mismo tiempo y la respuesta es la opción (d).

De hecho todas las cuentas tardan el mismo tiempo cuando el plano del círculo está inclinado un ángulo β respecto de la vertical; simplemente hay que sustituir g por $g\cdot\cos\beta$ en las expresiones anteriores.

Como vemos, el tiempo de descenso a lo largo de una cuerda desde la parte superior del círculo no depende de la cuerda, siendo siempre el mismo, aunque varía para cada inclinación del círculo respecto de la vertical.