

83



Atajo a través de la Tierra

(20 - 24 febrero 2006)

Suele decirse que el camino más corto entre dos puntos es la línea recta. En base a esta afirmación, y suponiendo que la técnica y la naturaleza lo permitieran, cabe pensar en la posibilidad de comunicar dos lugares cualesquiera de la superficie terrestre mediante un túnel perforado en línea recta.¹ En ese caso, si dejáramos caer libremente (es decir, sin velocidad inicial) un objeto por el túnel, y despreciando la fricción (con el aire y con las paredes del túnel), ¿llegaría el objeto al otro extremo del túnel o se detendría antes?



AVISO: El objeto de *Simple+mente física* no va más allá del placer que proporciona plantearse y resolver sencillas cuestiones razonando (y experimentando) de acuerdo con principios básicos de la física. No hay ningún tipo de compensación, excepto la satisfacción personal y no van dirigidas a ningún grupo de personas en particular (es decir, están abiertas a todo el mundo).

El primer día hábil de cada semana se presentará una nueva cuestión y la respuesta a la cuestión de la semana anterior.

Rafael Garcia Molina - Departamento de Física, Universidad de Murcia (rgm@um.es)

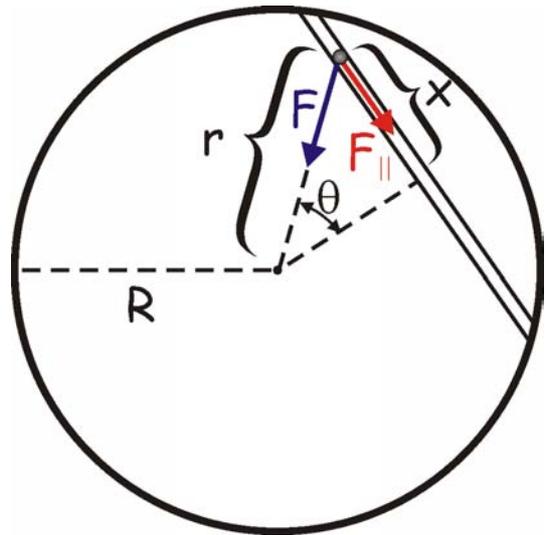
<http://bohr.fcu.um.es/miembros/rgm/s+mf/>

<http://www.fisimur.org>

****La ilustración de la cabecera fue realizada por Clàudia Garcia Abril a la edad de 6 años****

¹ Cabe esperar que algún día cese la vorágine constructora que nos rodea, porque se imponga el sentido de la razón o... porque ya no quede ningún espacio natural por destruir. En ese caso, quizá podría emplearse la maquinaria sobrante para excavar un atajo a través de la Tierra.

Resp.: La fuerza que experimenta un objeto de masa m situado a una distancia r del centro de la Tierra está dirigida hacia el centro de la misma y vale $F = G M(r) m / r^2$, donde G es la constante de gravitación universal, y $M(r)$ es la masa contenida en la esfera de radio r . Pero como el objeto de masa m sólo puede moverse por el túnel, la única fuerza que intervendrá en su movimiento es la componente de F paralela a la dirección de túnel, que vale:



$$F_{\parallel} = F \sin \theta = F x / r = G M(r) m x / r^3,$$

siendo x la distancia entre el objeto y el punto central del túnel, hacia donde siempre está dirigida la fuerza (independientemente de donde se halle el objeto).

Suponiendo que la Tierra tiene una densidad ρ homogénea, la masa de una esfera de radio r vale $M(r) = \rho 4 \pi r^3 / 3$. Al sustituir esta expresión en la de la fuerza neta que actúa sobre el objeto en el interior del túnel, obtenemos que $F_{\parallel} = (4 \pi \rho G m / 3) x$. Para indicar que el sentido de la fuerza es opuesto al del alejamiento x respecto del centro del túnel, escribimos la expresión anterior en la forma $F_{\parallel} = -k x$, donde $k = 4 \pi \rho G m / 3$ es una constante; como vemos, la fuerza es directamente proporcional a la distancia hasta el centro del túnel y siempre está dirigida hacia el centro del mismo. Esto indica que el objeto se mueve como un oscilador armónico, cuyo periodo vale $T = 2 \pi \sqrt{m/k}$; teniendo en cuenta el valor de la constante armónica k , el objeto oscila alrededor del centro del túnel con un periodo $T = 2 \pi \sqrt{3 / (4 \pi \rho G)}$; después de sustituir valores numéricos² se obtiene que cualquier objeto tarda 1.4 horas en el viaje de ida y vuelta por cualquier túnel que vaya en línea recta de un punto de la superficie terrestre a otro. Curiosamente, éste sería el mismo tiempo que tardaría un objeto orbitando alrededor de la Tierra a ras del suelo (suponiendo que es una esfera perfecta y sin montañas): $T = 2 \pi \sqrt{R^3 / (G M_T)}$.

La respuesta a la pregunta original es que el objeto sí llegaría al otro extremo del túnel, donde su velocidad se anularía y volvería a caer por el mismo, llegando nuevamente al punto de partida después de 1.4 horas, desde donde volvería a repetirse el movimiento de manera infinita si no existiera rozamiento.

Evidentemente, los resultados anteriores parten de la hipótesis de que la Tierra es una esfera perfecta de densidad constante y de que no hay fricción en el movimiento por el interior del túnel, el cual, por otra parte, no podría construirse por impedimentos técnicos y debido a la naturaleza de la Tierra.

² $\rho = 4 \pi R^3 / (3 M_T)$, donde $R = 6.37 \times 10^6$ m y $M_T = 7.98 \times 10^{24}$ kg son el radio y la masa de la Tierra, respectivamente; $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻².